

MINISTERO D'AGRICOLTURA, INDUSTRIA E COMMERCIO

DIREZIONE DI STATISTICA.

ANNALI DI STATISTICA.

SERIE 2^a — VOL. 18.

1881.



ROMA

TIPOGRAFIA EREDI BOTTA

1881

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE VOLUME.

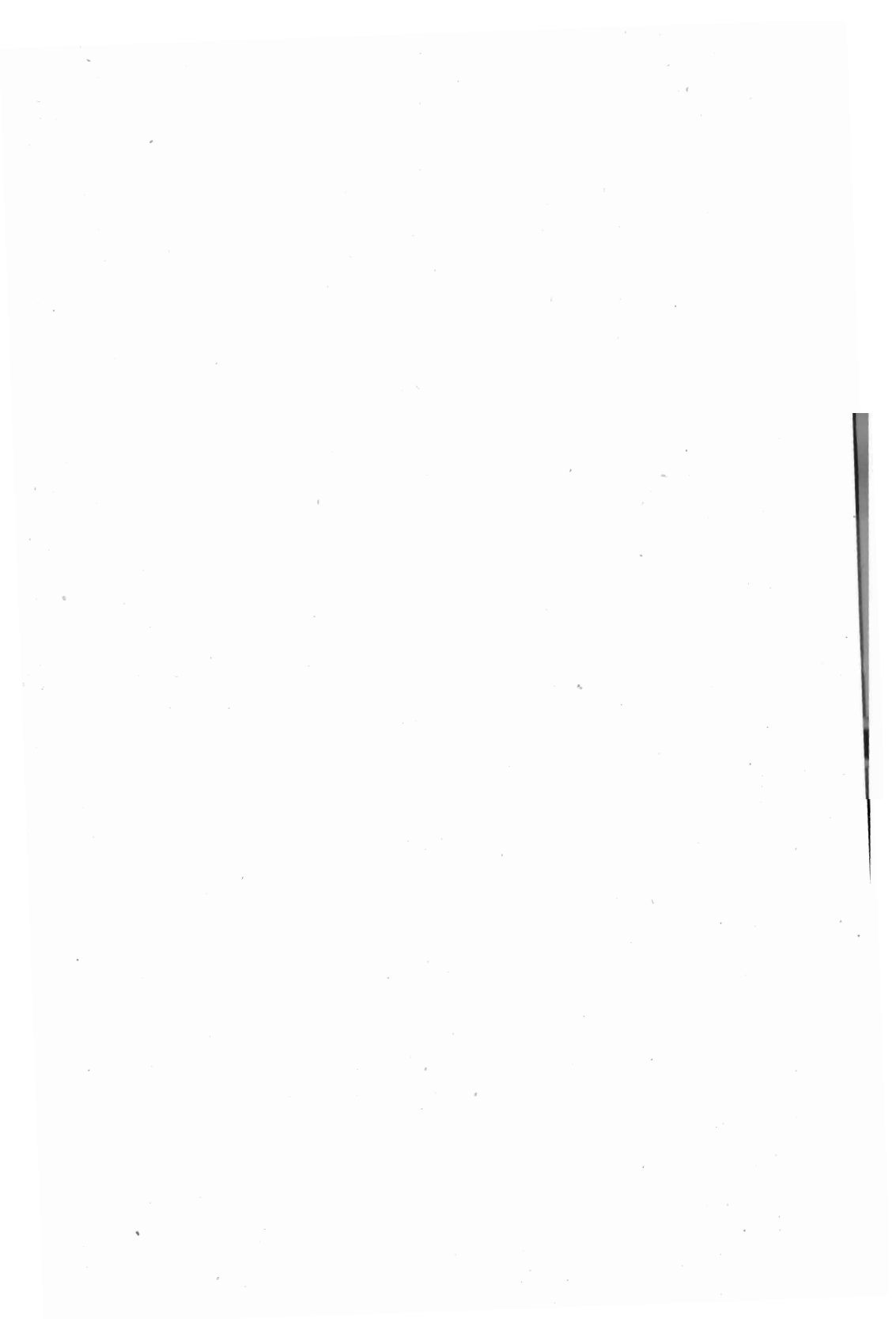
	Pag.
Dell'ufficio dell'Attuario e degli studi matematici che debbono essere necessaria preparazione al medesimo nell'interesse della scienza statistica, per il signor T. B. SPRAGUE, con prefazione di MAAS. — Traduzione italiana per il signor A. SCIFONI	1
Aritmometro di Thomas, suo principio, descrizione ed uso, per AGOSTINO CAVALLERO	17
Calcolo delle tavole di mortalità per mezzo dei risultati della statistica della popolazione. — Memoria pubblicata dall'Ufficio federale Svizzero di statistica	49
Tavole di sopravvivenza delle 20 compagnie inglesi ed assicurazioni contro gli accidenti. — Memoria dell'ingegnere A. PAOLINI	81
Dei criteri matematici per formare tavole di coefficienti di pensione a fondo perduto e recuperabile per le cassepensioni operaie. — Studio dell'ingegnere A. NOVELLIS ..	91
Sulla determinazione della mortalità mediante i dati della statistica della popolazione, del dottore G. F. KNAPP. — Sunto fattone dall'ingegnere L. LORIA	115
Mittheilungen aus der Geschäfts-und Sterblichkeits-Statistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha für die fünfzig Jahre von 1829 bis 1878, von Dr. A. EMMINGHAUS. — Cenno bibliografico dell'ingegnere L. PEROZZO	175
Stationary Population — <i>A Paper showing Approximately the numbers of Males who Emigrated in 1851-70 from certain English Counties, and indicating the effect produced by such Emigration upon the numbers of the people at several ages.</i> By THOMAS A. WELTON. — Cenno bibliografico dell'ingegnere L. PEROZZO	177
Calcul des chances et philosophie de la Bourse. — Cenno bibliografico dell'ingegnere A. PAOLINI	180

ANNALI DI STATISTICA.

SERIE 2^a — VOL. 18.

ERRATA-CORRIGE.

- A pag. 53 - Morti all'età di 0 a 1 anno 1878 - invece di 16,000, leggasi: 16,800.
.. 65 - Totale morti all'età da 2 a 3 anni - invece di 6,282, leggasi: 6,286.
.. 111 - Età 27 anni - leggasi: coefficiente 0,477.
.. 177 - Titolo - invece di *Tatonsary*, leggasi: *Stationary*.



DELL' UFFICIO DELL' ATTUARIO

e degli studi matematici che debbono essere necessaria preparazione al medesimo
nell'interesse della scienza statistica.

Per il signor T. B. SPRAGUE, con prefazione di MAAS.
Traduzione italiana per il signor A. SCIFONI. (1)

La parola *attuario* è poco conosciuta nella nostra lingua, sebbene la sua etimologia sia molto antica e risalga ai Romani, pei quali *actuarius* significava *scriba, notarius, qui acta perscribit: actuarius* era anche colui che nelle milizie si occupava di tenere i conti della paga e del vitto che si somministravano ai militi, una specie dell'intendentente nei moderni corpi militari.

In italiano *attuario* significa notaio pubblico, scrittore e custode di atti pubblici. Non è in questo senso peraltro che noi vogliamo servircene, ma sibbene nel senso che si attribuisce da tutti in Inghilterra alla parola *actuary*, colla quale si comprende colui che si occupa esclusivamente dell'applicazione delle matematiche alle assicurazioni o più generalmente alle questioni finanziarie.

I francesi, anch'essi, non avendo una parola nella loro lingua per indicare la professione di *actuary*, adottarono la parola *actuaire*, che nel loro dizionario ha il medesimo significato che nel nostro, e la resero così popolare.

Non sappiamo con certezza se la professione di *actuary* esistesse in Inghilterra prima dell'istituzione delle assicurazioni sulla vita, ma quello che è certo si è che gl'impiegati addetti alle compagnie d'assicurazione per calcolare le tariffe e dirigere le operazioni sotto il rapporto scientifico, presero il titolo di *attuari*, titolo che è poi rimasto

(1) Il signor MAAS, direttore della Società francese d'assicurazione l'*Union* pubblicava, nel n° 15 del tomo IV del *Journal des Actuaires français*, colla traduzione dell'articolo del signor SPRAGUE una prefazione, dalla quale abbiamo tolto alcune delle notizie che seguono.

loro in seguito. Il signor Morgan fu il primo attuario addetto alla società *The Equitable* nel 1774. Le compagnie di assicurazioni crescendo sempre in numero, la professione di attuario cominciò ad essere conosciuta da tutti, e ben presto si addivenne alla distinzione fra gli attuari residenti, cioè quelli specialmente addetti ad una compagnia, e gli attuari consulenti, cioè quelli che senza essere particolarmente al servizio di una società, davano pareri sulle varie questioni di assicurazioni a tutti coloro che ne li richiedevano. Sembra che il signor F. Baily, autore della *Teoria delle annualità vitalizie*, sia stato il primo attuario consulente, e come tale fu consultato nel 1819 dal signor Maas padre, quando questi venne inviato a Londra dalla *Compagnie d'Assurances Générales* di Parigi, che allora s'istituiva; d'altra parte il signor Milne, autore di un trattato pure assai stimato sulla materia e pubblicato nel 1815, era attuario del *Sun*. Si fu infine nel 1819 che la professione di attuario ricevette in qualche modo una consacrazione legale colla nomina del signor Finlaison ad attuario presso la Commissione del bilancio.

Gli attuari erano già assai numerosi e le assicurazioni assai diffuse in Inghilterra, quando essi ebbero l'idea di riunirsi in società e di creare un Istituto per dare in qualche modo un regolamento alla loro professione. Ciò avvenne nel 1848, e due anni dopo l'Istituto, volendo fare anche di più, preparava un progetto di legge, in forza del quale ai suoi membri soltanto sarebbero state riconosciute le qualità necessarie per prendere il titolo di attuario ed esercitarne la professione. Gli attuari hanno, in seguito, rinunciato a questa pretesa, ma tuttavia la consuetudine ha dato ad essi ragione, ed ora è ben certo che non si è attuari in tutta la forza della parola se non si è stati ricevuti nel seno dell'Istituto della Gran Bretagna e d'Irlanda, o della Facoltà di Scozia, che è stata fondata sulle stesse basi.

È certo altresì che verun tribunale designerebbe come attuario in una causa chi non fosse membro delle nominate società, e la legge del 1870 che dispone dover ciascuna compagnia, a determinate epoche, far esaminare la sua situazione da un *actuary*, ha inteso indicare con ciò un attuario riconosciuto da quegli Istituti.

D'altronde le condizioni che si richiedono in Inghilterra per essere ricevuto come attuario non sembrano essere assai rigorose e sono analoghe a quelle che vengono imposte a tutti coloro che desiderano divenir membri di qualsiasi altra società. Vi sono tuttavia da subire degli esami di capacità, ma si può esserne anco dispensati, e moltissimi dei membri dell'Istituto non sono stati sottoposti a tale formalità. L'esame di capacità, come è facile supporlo, versa principalmente sulle matematiche in base di un programma prestabilito.

In Francia, sebbene la professione di attuario non abbia tanti cultori come in Inghilterra, dove le assicurazioni sulla vita esistono da oltre un secolo, tuttavia l'applicazione di questa scienza alle finanze, alla statistica, alle assicurazioni ha ricevuto anche un impulso notevole. E nel 1872, per iniziativa specialmente di egregi uomini, come i signori Maas, Charlon, Simon, Achard, Courcelle-Seneuil, Javary, fu istituita una società di attuari, che prese il titolo di *Cercle des Actuaires Français*, e per cura della quale si pubblica una rivista trimestrale assai importante, rivista in cui sono stati pubblicati studi pregevolissimi di alcuni membri della società, nello stesso tempo che vi sono state accolte anche le traduzioni di alcuni lavori appartenenti ad attuari inglesi.

In Italia non abbiamo veruna istituzione di questo genere e mancherebbero forse elementi sufficienti a formarla ed a farla fiorire. Eppure sarebbe desiderabile che di tanti giovani valenti nello studio delle matematiche, alcuni si dedicassero alla professione di attuario. Essi, oltrechè servirebbero all'incremento degli studi statistici, e per conseguenza a tutti quei corpi morali che si giovano dei risultati di questa scienza, potrebbero anche procurare a loro stessi delle posizioni relativamente lucrose, in specie quando, come è vivamente a sperare, e come senza dubbio avverrà, le assicurazioni sulla vita entrassero veramente nelle abitudini degli Italiani, per cui vi fosse largo campo all'operosità di parecchie compagnie.

Si è nel desiderio appunto di mostrare quanto sia degna del loro obbiettivo la professione di attuario per le molte cognizioni che richiede e per l'utilità che può arrecare a diverse pubbliche o private istituzioni, che abbiamo creduto far conoscere più generalmente anche qui in Italia, traducendolo, un lavoro del signor Sprague, vicepresidente del Circolo degli attuari di Londra, letto da esso innanzi alla società degli attuari di Edimburgo, e riprodotto dal giornale dell'Istituto (1). Cediamo quindi la parola al signor Sprague.

« Qualcuno penserà forse che l'argomento che io voglio trattare innanzi a voi questa sera non abbia verun interesse. Si ammette generalmente che un attuario sperimentato debba necessariamente esser ben provvisto di cognizioni matematiche e non si ha bisogno di aggiungere altro; ma se dovessi scusarmi d'aver scelto l'argomento che impredo a svolgere, potrei rammentarvi che un matematico nulla ritiene per dimostrato *a priori*. Mentre ognuno vi dirà che è evidente per sè

(1) *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, vol. 18, n° XCVIII. *On the usefulness of Mathematical studies to the Actuary*. An Address to the Actuarial Society of Edinburgh. By the Honorary President T. B. SPRAGUE M. A., Vice-President of the Institute of Actuaries.

stesso che 2 e 2 fanno 4 e che ciò non ha bisogno d'esser provato, il matematico sa invece che quella proposizione non è, nel vero senso della parola, evidente per sè stessa, e che può venir dimostrata rigorosamente. Quando ci limitiamo a questioni così semplici, non vi è gran male nel ritenere come evidenti delle proposizioni che sarebbero tuttavia suscettibili di prova; ma il caso è affatto differente quando passiamo a questioni più difficili, e non è uno dei meno importanti vantaggi dell'iniziarsi alle matematiche quello di abituare grado a grado la mente a esigere una prova rigorosa d'un gran numero di proposizioni importanti, che ordinariamente sono ritenute per dimostrate. Così dunque, anzichè ritenere come evidente l'utilità degli studi matematici per gli attuari, io mi propongo di esaminare accuratamente in che e come servano ai medesimi tali studi, ed io spero che le conclusioni alle quali verrò riusciranno in qualche modo utili a coloro fra voi che desiderano spingere i loro studi matematici oltre quel grado di coltura che si considera comunemente come indispensabile all'attuario.

« Con questo scopo passerò uno dopo l'altro in rivista i vari rami delle matematiche di uso più generale.

« Per cominciare, citerò la *Geometria elementare* di Euclide. Non solo lo studio di Euclide è un preliminare necessario ad altri studi geometrici, ma è altresì grandemente utile per abituare lo studente ad un seguito di ragionamenti rigorosi. Ognuno che possieda a fondo il primo libro d'Euclide acquista una conoscenza pratica di ciò che è un ragionamento rigoroso e diviene meno soggetto di chiunque altro a lasciarsi sviare dagli esempi di ragionamenti speciosi che s'incontrano costantemente in siffatte materie. Un altro vantaggio dello studio di Euclide consiste nella precisione del linguaggio adoperato. Ciascuna specie di figura geometrica sulla quale si deve ragionare riceve un nome distinto che non può dar luogo ad equivoci, per guisa che il nome solo è sufficiente ad informarci con precisione e senza ambiguità della natura della figura che egli serve ad indicare. L'abitudine di adoperare il linguaggio in questo senso stretto e preciso ha un valore incalcolabile non solamente per un attuario, ma eziandio in ogni ramo delle scienze, dirò anzi in qualunque professione. Senza la precisione del linguaggio la chiarezza del pensiero non esiste, e quando vediamo uno scrittore servirsi di termini vaghi od inesatti, non sarà ingiusto verso di lui il concludere che i suoi pensieri sono confusi.

« Non bisogna tuttavia supporre che questo vantaggio sia proprio soltanto dello studio di Euclide o delle matematiche; poichè molte altre materie, se vengano studiate con uno spirito d'ordine, possono ingenerare questa abitudine della precisione del linguaggio.

« I vantaggi che provengono dallo studio dell'algebra sono di tut-

t'altra specie. Il primo ed uno dei principali vantaggi della scrittura algebrica si è la facilità che ci procura d'abbracciare a colpo d'occhio una lunga serie di operazioni complicate, le quali, se fossero tradotte in parole, esigerebbero molto maggior tempo e maggiore attenzione per seguirle, oltrechè non verrebbero così facilmente comprese. Questo vantaggio lo si trova anche nel caso di proposizioni le più semplici. Quando noi paragoniamo la proposizione semplicissima: « se la somma di due numeri viene aggiunta alla loro differenza, il totale è eguale a 2 volte il numero più grande » colla sua traduzione algebrica $(a+b) + (a-b) = 2a$; o l'altra proposizione: « se la somma di due numeri viene moltiplicata per la loro differenza, il prodotto è eguale alla differenza dei loro quadrati, » colla formola $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, noi riconosceremo subito quanto le formole siano superiori in semplicità e chiarezza. È vero che in questo caso l'impiego delle parole *somma* e *differenza* dà all'enunciazione verbale di quelle proposizioni una concisione che le rende più difficili a comprendersi alla prima di quello che lo sia la loro espressione coi simboli algebrici, ma tuttavia ciò non si verifica sempre. Se noi prendiamo una formola di poco più complicata come questa, per esempio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la quale col linguaggio ordinario deve essere enunciata come segue: « Il quadrato della somma di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati aumentata del doppio prodotto dei numeri stessi: » il vantaggio è ancora più decisivo in favore della formola paragonata al suo enunciato verbale. Ciò sarà anche più vero, se noi prendiamo delle espressioni più lunghe e se, per esempio, ci proviamo di dare la traduzione verbale della proposizione:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

oppure:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

« Tale è egualmente il vantaggio che si ottiene nello studio della teoria delle annualità vitalizie, sostituendo le formole alle enunciazioni verbali.

« È vero che i primi autori di opere relative alle assicurazioni sulla vita hanno dato degli enunciati verbali o regole per trovare la soluzione dei problemi, ma ciò non può venir considerato che come una concessione fatta all'imperfezione delle cognizioni matematiche dei loro lettori, e giova sperare che non ve ne sarà altrimenti bisogno per l'avvenire. La verità di questa osservazione sarà, ne sono sicuro, pienamente riconosciuta da ogni algebrista, ed essa mi autorizza ad affermare che chiunque aspiri a divenire attuario dovrà studiare a fondo

l'algebra per familiarizzarsi coi simboli algebrici, in guisa da procurare a sè stesso questa superiorità che dà l'uso delle formole sopra gli enunciati verbali.

« Ma può riuscire utile di esaminare anche un po' più minutamente questi vantaggi, ed io voglio prendere un esempio dalle tavole ben conosciute D e N : (1)

« Innanzi a questo onorevole Consesso io posso enunciare senza bisogno di spiegazioni le equazioni $a_x = \frac{N_x}{D_x}$, $\alpha_x = \frac{N_{x-1}}{D_x}$.

« Se noi vogliamo descrivere, senza l'uso dei simboli algebrici, le soluzioni che offrono queste equazioni, dobbiamo dire per la prima: per trovare il valore di una rendita annua vitalizia *posticipata* sopra una testa di una data età, dobbiamo dividere il numero che è posto di fronte a questa età nella colonna N per il numero corrispondente che figura nella colonna D .

« Per la seconda equazione, bisognerà dire: per trovare il valore di una rendita annua vitalizia *anticipata* sopra una testa di una data età, occorre dividere il numero della colonna N posto di fronte all'età minore d'un anno della testa proposta per il numero della colonna D posto di fronte a questa età.

« Vediamo ora più precisamente in che consiste la superiorità della indicazione algebrica. In primo luogo, invece della frase: età data, noi mettiamo la lettera x .

« In secondo luogo: il numero posto nella colonna N di fronte alla età x viene sostituito da D_x , e lo stesso per N_x . Il valore di una rendita annua vitalizia posticipata sopra una testa dell'età x è rappresentato dal simbolo a_x , e quello di una rendita annua vitalizia anticipata da α_x .

« Infine noi abbiamo il simbolo $=$ per esprimere che le quantità fra le quali si trova posto sono eguali fra loro.

« Il vantaggio derivante dall'impiego dei simboli algebrici è della stessa natura di quello che offre il nostro sistema di numerazione, in confronto del sistema romano o dell'enunciazione verbale di un numero. Così, quando noi scriviamo 1874, noi cogliamo il significato di questo numero assai più presto di quando ci serviamo del vecchio si-

(1) L'autore si riferisce alle notazioni adottate da quasi tutti gli Attuari inglesi; secondo i quali chiamando l_x il numero dei viventi all'età x di una data tavola di sopravvivenza, e v il fattore di sconto per l'unità di valore e di tempo, (cosicchè, se è i l'interesse annuo per lira, $v = \frac{1}{1+i}$), si ha $D_x = l_x \times v^x$, ed $N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\omega}$, essendo ω l'età più avanzata della tavola.

stema romano MDCCCLXXIV, o, nel linguaggio ordinario, milleottocentosettantaquattro.

« A questo proposito, permettetemi di fare qualche osservazione sulle espressioni di cui ci serviamo per indicare le varie categorie di assicurazioni sulla vita, e ciò tanto più inquantochè la loro importanza non è abbastanza apprezzata da tutti. Da ciò che ho detto sin qui consegue che le indicazioni di cui si servono gli attuari sono una specie di linguaggio simbolico. In tal guisa esse reagiscono sul linguaggio ordinario.

« Così quando adottiamo i simboli convenuti \hat{a}_x e \bar{a}_x , noi sentiamo ancor più il bisogno di semplificare i nomi delle annualità che questi simboli rappresentano e da ciò la creazione delle espressioni *annualità completa* e *annualità continua*, in luogo delle frasi esplicative: *annualità pagabile fino al giorno del decesso* per la prima, e *annualità pagabile cumulando gli interessi composti computati continuamente, cioè ad ogni istante*. Non lascerò questo argomento senza fare un cenno dell'inconveniente che vi è nel cambiare male a proposito il significato dei termini adottati fino allora.

« Quando un termine tecnico, come *annualità*, che ha un significato ben definito e universalmente compreso, viene adoperato in un senso anche leggermente diverso, s'incorre in un inconveniente serio e si può anche sconvolgere grandemente lo studio di questa materia. Ciò ha fatto appunto, voi lo sapete, uno scrittore ben conosciuto, che ha adoperato quella parola per specificare ciò che si chiama ordinariamente una *annualità anticipata*. Lo stesso scrittore ha alterato il significato del simbolo ben conosciuto N_x , per guisa che, sebbene egli conservi la equazione $a_x = \frac{N_x}{D_x}$, nè l'una nè l'altra delle parti di essa ha più il significato che le viene ordinariamente attribuito. Io debbo fare uno sforzo per moderare il mio linguaggio quando voglio segnalare la perniciosa influenza di cambiamenti tali come quelli suaccennati, e dirò persino che essi possono avere l'effetto di diminuire il valore scientifico e d'impedire la diffusione di quelle opere nelle quali sono stati accolti.

« Istituyendo un confronto fra le differenti opere che sono state pubblicate in questo paese sulle assicurazioni, nulla emerge di più rimarchevole che la introduzione graduale ed il progresso del sistema di indicazioni adottato per esprimere i differenti problemi ai quali dà luogo l'argomento. Nelle prime opere su questa materia, come la *Introduzione allo studio delle annualità* di William Dale, non si fa uso di alcuna specie di indicazioni convenzionali. Nelle opere di Morgan ve n'è un principio; ma quelle ivi adottate differiscono assai dalle altre

che sono in uso oggi. Baily, Milne, Griffith Davics e David Jones hanno successivamente fatto un più grande uso delle indicazioni algebriche, e non è temerità il predire che la prossima opera sulle assicurazioni sulla vita, chiunque ne sia l'autore, segnerà ancora un progresso nello stesso senso.

« Passando ora a ciò che concerne la geometria analitica, non ho bisogno di rammentarvi che è assai sovente desiderabile, se non necessario, di tracciare graficamente la curva che rappresenta i diversi valori della funzione per i differenti valori della variabile; così, per esempio, quando l'ascissa è presa per la linea delle età e l'ordinata indica la decima mortuaria, od il suo valore reciproco, cioè sopra quanti viventi di una data età si ha un morto. Supponiamo che sia stata costruita una figura di questo genere e che si vogliano descrivere i punti caratteristici della curva; la conoscenza della geometria analitica ci rende capaci di farlo nel modo il più semplice ed il più chiaro. Noi possiamo indicare che ad una certa età vi è un massimo, a un'altra un minimo, a una terza un punto di inflessione; che in certi casi l'uno o l'altro degli assi coordinati è un assintoto alla curva; e quelli ai quali sono familiari le proprietà delle curve algebriche non domanderanno veruna spiegazione dei termini di cui ci siamo serviti. Siccome per altro non possiamo studiare a fondo le proprietà delle curve senza l'aiuto del calcolo differenziale, così dobbiamo concludere che la conoscenza del calcolo differenziale è utile all'attuario.

« Vengo poi alla teoria delle probabilità, sulla quale, in fondo, riposa tutta la teoria delle annualità vitalizie. Abbenchè non ne sia stato fatto che pochissimo o verun uso nella deduzione delle numerose formole per i premi unici ed annuali, tuttavia questa teoria ci spiega la ragione per la quale noi adoperiamo senza esitazione le tavole ordinarie di mortalità e ci addimostra sino a qual punto possiamo fidarci delle conclusioni che ne vengono dedotte. Se questa teoria fosse meglio compresa dagli attuari, noi non incontreremmo così spesso le asserzioni erronee che figurano frequentemente nei resoconti e prospetti pubblicati dalle Compagnie di assicurazioni. Non ci si direbbe, per esempio, che su 1000 persone d'una data età, viventi al principio di un anno, è certo che ne moriranno tante nell'anno, o che, perchè i sinistri hanno ecceduto la proporzione ordinaria in un anno, si può prevedere che ciò sarà bilanciato da una diminuzione nell'anno prossimo. Non si leggerebbe nei resoconti delle Compagnie che i sinistri ascessero a somme importanti, sebbene il numero dei morti non abbia oltrepassato la media. Sarebbe troppo lungo spiegare l'inesattezza di queste diverse forme di linguaggio. Io mi limiterò a dire che tutte indicano nozioni

completamente erronee sul calcolo delle probabilità. Prendiamo solamente un esempio semplicissimo: supponiamo che una moneta sia stata gettata in aria venti volte di seguito e che ogni volta sia apparso il diritto di essa; supponiamo inoltre che la moneta in questione sia omogenea e che non vi sia veruna ragione materiale perchè ne debba apparire il diritto piuttostochè il rovescio. Dopo ciò, se la moneta è gettata in aria altre venti volte, è forse una ragione l'aver avuto il diritto venti volte nella prima serie, per credere che nella seconda serie si avrà piuttosto il rovescio? È un'idea questa che le persone abituate alle tavole da giuoco non riescono ad abbandonare, e per sostenerla vi mettono innanzi degli argomenti assai speciosi. Così vi dicono che, ammesso non vi sia ragione per avere il diritto più spesso del rovescio, si otterrà, se la moneta viene gettata in aria un gran numero di volte, una quantità eguale di diritti e di rovesci. Quindi, se vi è stata una serie di diritti, bisogna, perchè l'eguaglianza si mantenga, che faccia seguito una serie di rovesci. Cionondimeno questo ragionamento è completamente vizioso. In primo luogo possiamo osservare che se si è avuto il diritto venti volte di seguito, vi è ragione per supporre che havvi qualche cosa nella fabbricazione della moneta che rende più probabile il diritto che il rovescio; ma se noi supponiamo che la moneta sia fabbricata regolarmente, la conclusione rigorosa del fatto osservato sarà, che il numero di volte che si è avuto il diritto, per quanto importante esso sia, non può avere alcuna influenza sui colpi susseguenti. Come dunque conciliar ciò coll'eguaglianza nel numero dei diritti e dei rovesci che a lungo deve prevalere? Assai semplicemente, osservando come la teoria c'insegna che l'eguaglianza si stabilirà quando il numero dei colpi aumenterà indefinitamente, e che per conseguenza qualunque numero finito di diritti o di rovesci si prenda a considerare successivamente, che siano 20, 50, 100, o un numero più grande, non avrà più importanza relativamente a un numero infinito di prove.

« Lo studio della teoria delle probabilità è assai difficile nei rami più elevati di essa, ma è altresì uno di quelli che meritano tutta l'attenzione dell'attuario. Questa teoria ci insegna a calcolare non solamente il numero dei sinistri che dobbiamo prevedere sopra un numero di individui osservati, ma anche la probabilità che il numero delle morti resti al disotto della media, ovvero la oltrepassi. Quando il numero dei sinistri superi la media, la teoria c'insegna a riconoscere se ciò debba venire attribuito ad irregolarità accidentali, o se indichi che gli individui sono stati scelti male. Essa ci dimostra eziandio i vantaggi reali che derivano alle Compagnie d'assicurazione sulla vita dall'aumento del numero degli individui assicurati ed insegna all'at-

tuario come possa saviamente servirsi delle riassicurazioni per estendere i suoi rischi sopra una più vasta scala.

« Il metodo delle differenze ha un'importanza tutta speciale per l'attuario, come quello che gl'insegna le regole dell'interpolazione. È spiacevole che l'interpolazione sia trattata in una maniera concisa e insufficiente nei trattati di algebra come nelle opere di assicurazioni; le sue applicazioni sono così numerose e importanti che il tempo ed il lavoro dedicati ad acquistarne conoscenza, leggendo le opere che trattano della materia, saranno assai utilmente impiegati. Nelle mani di un attuario abile, un'interpolazione fatta giudiziosamente varrà spesso ad evitare un lavoro penoso, sia rendendo inutile un calcolo diretto, sia fornendo la prova dell'esattezza dei risultati ottenuti per altra via. Abbenchè sia possibile di dimostrare tutte le formole d'interpolazione coi processi dell'algebra ordinaria, tuttavia la conoscenza del calcolo differenziale presenterà le formole stesse sotto un nuovo aspetto. Questa conoscenza renderà altresì l'attuario assai meglio padrone delle formole e gli darà l'attitudine a trasformarle, per guisa che io non esito a consigliare all'aspirante attuario di rendersi completamente familiare questo ramo delle matematiche.

« Esaminiamo ora con qualche dettaglio in che consistono le funzioni ordinarie dell'attuario. Egli deve calcolare i premi per i rischi speciali, calcolare i valori di riscatto delle polizze d'ogni specie, apprezzare il valore degli interessi vitalizi e delle riversioni offerte in garanzia di prestiti. Egli può altresì venir chiamato a dare la sua opinione sull'ammontare delle spese, cui si potesse ragionevolmente esporsi per estendere le operazioni; ma al di sopra di qualsiasi altra cosa, il suo dovere il più importante sarà di fare, sotto la sua responsabilità, l'esame periodico della posizione della sua Compagnia. Per ciò che riguarda tutte queste materie, si può asserire con molta giustezza che gli autori danno regole precise per i casi più ordinari che si presentano, regole che un attuario apprenderà presto nel corso della sua pratica. L'attuario potrà venire consultato non solamente sopra gli argomenti dei quali abbiamo testè fatto cenno, ma altresì sulla solvibilità delle società di mutuo soccorso, le cui combinazioni, come, per esempio, i soccorsi in caso di malattia, sono affatto differenti da quelle che sono familiari all'attuario nella sua pratica abituale. Egli sarà consultato sul valore dei diritti di presentazione e di patronato, come sulla divisione della proprietà fra il proprietario diretto e l'usufruttuario e su differenti questioni dello stesso genere. Tutte le volte che la questione proposta all'attuario differirà, sia pure leggermente, da quelle colle quali egli ha dimestichezza, sarà probabilmente necessaria qualche modificazione della formola da adoperare, ed in questo caso

una conoscenza profonda delle matematiche gli sarà assai utile. È una cosa relativamente molto semplice il seguire in un libro la dimostrazione di una formola; ma bisogna essere assai più familiari colla scienza per riuscire a dedurre una nuova formola quando i dati siano stati sia pur poco variati; ed un attuario deve essere pienamente al giorno dei metodi matematici per poter essere ben sicuro dell'esattezza di una formola dedotta da lui stesso; si è questa forse la ragione principale per la quale deve venir richiesto a chi aspira a divenire attuario uno studio assolutamente serio delle matematiche, e se quello è lo scopo, poco monta quale sia il ramo delle matematiche che egli studi; l'essenziale è che egli sia completamente abituato a maneggiare l'algebra, in guisa da essere capace di trasformare una formola e di riconoscere prontamente una formola cognita quando gli si presenti sotto un altro aspetto negli scritti altrui. Bisogna dire altresì che nella pratica l'abilità matematica non dispensa da quel tatto che l'esperienza sola può dare. Per esempio, quando un attuario provetto sia invitato a fissare il premio per un rischio assai poco probabile, come sarebbe quello che tre teste giovani e di buona salute venissero a morire prima di una testa sola molto più avanzata in età, egli saprà che non varrà il tempo e la pena di calcolare il premio netto di una simile eventualità; poichè nella pratica, quel tanto di cui si dovrà caricare il premio netto di tali assicurazioni sarà superiore al premio stesso, e tutta la questione si ridurrà a determinare il *minimum* che si potrà richiedere, tenendo conto della commissione e delle spese, e il *maximum* che si potrà ottenere in ragione della concorrenza.

« Nello stesso modo, se si dovrà calcolare una tariffa di premi ascendenti, bisognerà prendere in considerazione la grande probabilità che hanno le polizze di questo genere di venire abbandonate, e il punto importante sarà quello di fissare un premio remuneratore per il primo periodo di cinque anni, per esempio: e sarà essenziale che il premio pagabile per questo periodo superi quello di un'assicurazione temporaria per cinque anni, e ciò allo scopo di compensarsi della facoltà data all'assicurato di continuare nell'assicurazione, o di abbandonarla alla fine del detto periodo.

« Un'osservazione debbo fare prima di lasciare questo argomento, ed è che l'attuario ha bisogno di maneggiare le cifre ancor più delle formole. Egli deve sottoporre ogni nuova formola alla prova del calcolo numerico. Specialmente per la mancanza di una legge di mortalità teorica, il calcolo numerico è importante, anzi assai importante per la dimostrazione delle formole. È necessario quindi che lo studioso si dedichi a quei rami delle matematiche nei quali il calcolo numerico ha la parte principale. Così gli saranno particolarmente utili la teoria

dei logaritmi ed i metodi pratici di calcolo delle tavole dei logaritmi stessi.

« L'argomento della trigonometria ha anch'esso una grande importanza per le formole necessarie alla risoluzione dei triangoli ed altri problemi che ricevono un'applicazione numerica. Quindi sarà utile allo studioso la conoscenza delle formole e dei metodi trigonometrici, non solamente per metterlo in grado di studiar meglio il calcolo differenziale e integrale, ma altresì per abituarlo ad associare l'idea di una formola matematica alla sua applicazione numerica. In molti rami delle matematiche, segnatamente nelle opere che si raccomandano a quegli allievi i quali vogliono dedicarsi all'insegnamento, si è presa a torto l'abitudine di sdegnare le applicazioni numeriche. È questo il caso dell'astronomia piana, la quale, come viene presentata nei libri di testo dell'Università di Cambridge, è semplicemente una riunione di proposizioni, della cui portata lo studente non si rende conto che imperfettamente, mancando assolutamente le applicazioni numeriche.

« Oltre gli argomenti sovraccennati, un attuario è chiamato sovente a dare il suo parere sopra importanti questioni di polizza, sull'adozione di nuove misure di premi, di nuove condizioni d'assicurazione o di nuovi metodi per valutare le riserve. Nelle assicurazioni sulla vita, come in qualunque altro ramo di scienza o d'affari, sopravvengono costantemente dei cambiamenti. Così, in quanto riguarda ciò che può chiamarsi la base scientifica delle assicurazioni, cambiamenti importantissimi sono stati fatti, in un periodo di tempo assai breve, nella scelta delle tavole di mortalità adoperate per la determinazione dei premi e delle riserve. Le prime compagnie che hanno calcolato le loro tariffe di premi sopra una base scientifica, si sono servite della tavola di Northampton coll'interesse del 3 per 100. Più tardi venne una classe di compagnie che si servirono della medesima tavola coll'interesse del 4 per 100. Queste ultime avevano, io credo, ragione di cambiare la base; ma un piccolo numero delle prime rimase fedele all'uso delle Tavole originali. Dopo la pubblicazione, fatta dal Milne, della Tavola di Carlisle, quella di Northampton cominciò, e giustamente, a esser tenuta in minor pregio, e per una lunga serie d'anni la Tavola di Carlisle godette decisamente il favore degli attuari. Tavole più moderne, come quella dedotta dall'esperienza delle 17 Compagnie, quella dell'*Equitable* e le Tavole inglesi del dottore Farr, si sono disputate il favore del pubblico e sono state adottate da un certo numero di Compagnie, senza riuscire tuttavia a rimpiazzare completamente la legge di Carlisle. Il lavoro ancor più recente dell'Istituto promette di essere un competitore assai temibile per gli altri, sia pel suo merito intrinseco, sia per quella stessa ragione che aveva già molto contri-

buito a diffondere la Tavola di Carlisle ; cioè che numerose Tavole ausiliari sono state calcolate e pubblicate sulle medesime basi. Quando un attuario è chiamato a dare il suo parere sulla opportunità di cambiare le basi dei calcoli di una Compagnia, egli deve prendere in considerazione un'infinità di punti pei quali non troverà negli autori verun appoggio. Egli dovrà esaminare sino a qual grado i nuovi dati di mortalità e d'interesse concorderanno con quelli che gli possono emergere dall'esperienza della sua Compagnia e quale sarà la conseguenza dell'adozione di nuovi elementi.

« Inoltre le condizioni pratiche delle assicurazioni si modificano costantemente. Nei primi tempi si era stabilita la regola che gli assicurati non dovessero viaggiare fuori di Europa e persino certi porti erano esclusi dai viaggi permessi all'assicurato sul continente. Così la navigazione della baia di Biscaglia e dell'imboccatura dell'Elba era considerata come troppo pericolosa per essere autorizzata senza soprappremio. Alcune delle Compagnie più conservatrici hanno ancora nelle loro polizze simili condizioni, e ne troviamo la traccia nella pratica di quelle Compagnie che non sono abbastanza liberali, che permettono bensì agli assicurati di viaggiare nell'America del Nord ed in certi porti fuori di Europa, ma esigono ne venga loro richiesta l'autorizzazione preventiva.

« Certi cambiamenti, quando vengono adottati da alcune Compagnie, lo sono in seguito necessariamente da tutte, come, per esempio, l'abolizione del diritto d'ammissione, il pagamento del bollo e degli onorari medici da parte della Compagnia anzichè del proponente. Altre modificazioni, come la soppressione della clausola portante la nullità della polizza nel caso di morte per duello, condanna giudiziaria o suicidio, poterono essere adottate da un numero considerevole di Compagnie, senza che la concorrenza abbia forzato le altre a seguirne l'esempio. Recentemente abbiamo veduto cambiamenti ancor più fondamentali introdotti nella pratica in quanto si riferisce alle condizioni di residenza all'estero. Alcune delle più antiche Compagnie percepiscono ora una misura di premio fissa per tutte le parti del mondo al di là dei limiti ordinari, mentre che una delle più giovani ha abolito completamente nella pratica i soprapremi e accetta tutti gli individui indistintamente, qualunque siano la loro residenza e la loro professione, a un saggio di premio uniforme. Le condizioni di altre Compagnie dispongono che in verun caso non sarà esigibile il soprappremio dopo cinque anni di durata della polizza, mentre da altre, finalmente, non viene accordato questo privilegio che a quegli assicurati i quali non avranno viaggiato durante quei primi cinque anni. L'attuario, sia che egli consideri o no queste innovazioni come un progresso, deve sempre stare in

guardia ed osservarne attentamente l'effetto; ed egli non sarà capace di formarsi una opinione giusta sul risultato probabile, se non si è abituato a risolvere problemi di ogni sorta.

« È vero che le questioni che sorgono così di tempo in tempo vengono frequentemente discusse dagli scrittori nelle riviste periodiche di assicurazione, e lo studioso è perciò raramente abbandonato alle sue proprie risorse quando si tratta di formarsi un criterio; ma affinché egli sia in grado di apprezzare e di seguire i ragionamenti degli altri, bisogna che egli si sia familiarizzato coi processi e metodi algebrici. D'altronde, in ciò che si riferisce alle questioni pratiche, che di tempo in tempo si presentano necessariamente all'esame dell'attuario, non è sufficiente formarsi un'opinione di seconda mano. L'attuario convenientemente preparato, deve saper discutere tutte le questioni che si presentano e rispondervi egli stesso. Gli sarà utile allora di confrontare la sua risposta con quelle che saranno date da altri autori, che avranno senza dubbio esaminato la questione sotto un aspetto diverso; e che sia poi riconosciuta giusta o no la soluzione primitiva dell'attuario, ciò non importa, quel processo d'investigazione gli sarà stato ad ogni modo giovevole. Forse anco ne ricaverà egli maggior profitto quando gli toccherà riconoscere che la sua primitiva soluzione era viziata da qualche errore di ragionamento, errore che egli avrà scoperto paragonando il suo metodo con quello di altri scrittori. Credo perciò che l'abitudine di prender parte alle controversie che si sollevano, di tanto in tanto, nelle riviste d'assicurazione, favorirà grandemente il progresso dell'aspirante attuario; non vi è d'altronde esercizio migliore per la mente del discutere un aspetto della questione, che sia il vero o il falso, facendo valere tutti gli argomenti ed esempi propri di esso e facendo rilevare nello stesso tempo i supposti errori di un contraddittore, sempre evitando tuttavia accuratamente una vivacità intempestiva di argomentazioni e resistendo ad ogni tentazione di trascendere a personalità offensive.

« Non ho bisogno di aggiungere che i consigli d'un attuario hanno più probabilità d'esser seguiti quando non esprimono soltanto la di lui opinione personale, ma sono anche appoggiati da argomenti validi, desunti da fatti ben stabiliti. Quando viene proposto un cambiamento di polizza, come per esempio una riduzione della misura dei premi, o l'adozione di misure più liberali per la residenza all'estero, i quesiti posti all'attuario dai suoi amministratori, o quelli che spontaneamente si offrono alla sua mente, troveranno sovente la miglior soluzione nell'esame dei fatti risultanti dall'esperienza della Compagnia cui egli appartiene. Può esservi luogo, per esempio, a formare una Tavola di mortalità ed a calcolare i premi d'assicurazione in base dei dati forniti

da una categoria speciale di polizze emesse dalla Compagnia. Si è questo un soggetto che esige le più grandi cure, primieramente nello stabilir bene i fatti e secondariamente nella maniera di trattarli. Occorre appena di aggiungere che per stabilire i fatti si richiede una certa conoscenza delle matematiche, ma che una volta coordinatili, la maniera di aggiustarli in guisa da poterne dedurre una Tavola di mortalità soddisfacente, la quale non presenti delle variazioni sensibili e nello stesso tempo non si scosti troppo dai fatti originali, è un problema che esige nell'attuario il possesso dei rami i più elevati delle matematiche per risolverlo completamente. Non solamente una conoscenza intima del calcolo differenziale e integrale è utile in questo soggetto, ma anche la conoscenza del metodo dei minimi quadrati può rendere i più grandi servigi. Fin qui ci eravamo limitati a dire in generale che la conoscenza del calcolo differenziale era utile a chi aspirasse a divenire attuario, ma quando veniamo a parlare di questa parte del nostro soggetto e ad esaminare i metodi che sono stati impiegati col più grande successo per la graduazione delle Tavole di mortalità, siamo costretti a riconoscere che un attuario non può essere considerato capace di adempiere a tutti i doveri della sua professione se non ha una conoscenza abbastanza estesa del Calcolo differenziale e integrale. Inoltre non bisogna dimenticare che negli ultimi anni si è adoperato questo Calcolo per ottenere più esattamente il valore delle annualità pagabili per semestre, trimestre, o altre frazioni, nonchè delle annualità complete, e in molte altre questioni, specialmente nella teoria delle annualità continue. Presentemente non è tuttavia essenziale per un attuario d'aver familiari queste ricerche; ma lo sarà forse fra non molto, e frattanto siffatti studi avranno il vantaggio di rendere l'attuario più pratico delle parti meno complesse della materia.

« Fin qui ho limitato le mie osservazioni all'utilità che hanno le matematiche per l'attuario propriamente detto; ma un gran numero di attuari aspirano, senza dubbio, a coprire una posizione più influente e più in vista, quella cioè di Direttore, ed occorre dir qui qualche parola delle posizioni relative di Attuario e di Direttore. Un semplice attuario è un uomo di scienza, il cui compito è unicamente quello di lavorare per la soluzione dei problemi che gli vengono sottoposti. Il Direttore invece è il rappresentante della Compagnia e spetta a lui di occuparsi delle comunicazioni col di fuori. Egli deve indagare, d'accordo coi rappresentanti delle altre Compagnie, quali sono i desideri del pubblico in ciò che concerne le condizioni e i premi di assicurazione: egli esamina ciò che si può accordare agli agenti a titolo di commissione o stipendio; egli riceve le domande di prestiti e decide se si debbano o

no accogliere. Ad ogni momento, egli richiede dei calcoli all'attuario, sia per verificare l'esattezza dell'operato giornaliero della Compagnia, sia per giudicare se qualche cambiamento proposto possa venire tradotto in pratica con piena sicurezza. Paragonando fra loro le funzioni dell'attuario e del Direttore quali le abbiamo testè definite, è forse difficile il dire se le une siano più importanti delle altre; egli è certo tuttavia che un Direttore assolutamente competente, deve essere in grado, se le circostanze lo rendano necessario, di trovare egli stesso la soluzione delle questioni che gli si presentano. Se egli non lo fa, vuol dire che ritiene poter più utilmente impiegare il suo tempo. Nello stesso modo che può dare le sue istruzioni a un segretario per redigere un rapporto un po' lungo sopra un dato affare, dar l'incarico a un altro di rispondere a lettere che esigono speciale attenzione, così anche può lasciare alle cure dell'attuario il fare i calcoli necessari per rispondere alle varie questioni che si presentano. In altri termini, il Direttore deve essere egli stesso un abile attuario per adempiere completamente alle sue funzioni, e quindi ciò che sono venuto dicendo intorno all'utilità delle matematiche per l'attuario s'applica egualmente a coloro che aspirano a divenire Direttori. »

ARITMOMETRO DI THOMAS
SUO PRINCIPIO, DESCRIZIONE ED USO

PER

AGOSTINO CAVALLERO

Professore di macchine a vapore e ferrovie alla Scuola d'applicazione
per gl'ingegneri e preside del R. Istituto tecnico di Torino.

Fra le molte ed utili macchine, delle quali per cura dell'assennata e benemerita Provincia va continuamente arricchendosi la collezione di meccanica dell'Istituto tecnico torinese, trovasi un esemplare a 16 cifre della macchina calcolatrice inventata dal signor *Thomas* (di *Colmar*), e da lui denominata *aritmometro*. Il grande giovamento, che da questa macchina acquistata dall'istituto, or fa già più d'un anno, ho potuto trarre io stesso soprattutto pel calcolo di tavole numeriche, mi ha invogliato a compilare queste poche pagine aventi per oggetto di far conoscere, nel modo più chiaro per me possibile, il principio su cui fondasi la costruzione d'una macchina, si può quasi dire, perfetta nel suo genere e d'utilità incontestabile nelle lunghe calcolazioni aritmetiche, la descrizione delle sue parti più importanti e l'uso pratico della medesima.

Per quanto io mi sappia, i soli strumenti calcolatori, ai quali fino al presente, astrazione fatta dell'aritmometro di Thomas, sia toccato l'onore d'una vera diffusione, sono il pallottoliere delle scuole primarie, la tavola od abaco grafico di Lalanne, il regolo logaritmico ed il

Nota. — La direzione di statistica, che già possiede due esemplari dell'aritmometro di THOMAS, ha creduto interessante per i cultori della statistica l'offrir loro questa semplice e chiara descrizione che l'esimio professore CAVALLERO ha pubblicato dapprima negli *Annali dell'Istituto tecnico di Torino*, vol. VIII, 1880.

planimetro (1). Il pallottolliere serve particolarmente per l'insegnamento del sistema di numerazione. La tavola grafica di Lalanne, che consiste in una intricatissima rete di linee variamente inclinate tra di loro, sebbene di pochissimo costo ed atta a tutte le operazioni aritmetiche, ciò non di meno non è grandemente in uso perchè difficile n'è la lettura e di più ogni operazione richiede la conoscenza di una regola speciale differente da quella che si riferisce alla corrispondente operazione aritmetica (2). Il regolo calcolatore, inventato dal matematico inglese *Edmondo Gunter* fin dall'anno 1624, può definirsi il diagramma lineare d'una tavola di longaritmi, della quale invero tiene il luogo (3). Col suo aiuto non solo si possono effettuare tutte le operazioni dell'aritmetica, ma si risolvono numericamente con speditezza problemi d'algebra e di trigonometria. Però l'uso di questo strumento, preziosissimo in molti casi, non è da consigliarsi per quelle operazioni le quali esigono un risultato finale anche soltanto di una qualche approssimazione, quasi sempre il regolo essendo unicamente in grado di somministrare tre cifre, di cui una inoltre di lettura incerta. I planimetri final-

(1) Per coloro, ai quali pigliasse vaghezza di conoscere i numerosi strumenti ideati sino ad oggi allo scopo di rendere, con operazioni meccaniche, maggiormente spedito il conteggio aritmetico e sollevare ad un tempo la mente umana dalla fatica grandissima inerente alle calcolazioni di lunga lena, strumenti intorno ai quali stimarono prezzo dell'opera l'occuparsi anche sommi matematici, come *Napier, Pascal, Leibnitz, Carlo Babbage* ed altri, io citerò qui alcune pubblicazioni in cui questi strumenti trovansi per lo meno in buona parte menzionati, e parecchi eziandio estesamente descritti: a) *Sur l'additionneur de M. Roht, rapport de THEODORE OLIVIER, suivi par la nomenclature de tous les essais plus ou moins infructueux et dispendieux faits sur les machines à calculer* — *Bulletin de la Société d'encouragement, pour l'Industrie nationale* — Parigi, anno 1843, fascicolo di luglio a pagina 415; b) *Instruments et machines à calculer, par M. Michel Roux* — *Etudes sur l'exposition de 1867, par Eug. Lacroix* — Parigi, 1867, vol. 2°, a pag. 69; c) *Sull'elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica*, dottissimo scritto dell'ingegnere Antonio Favaro già allievo della Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Torino ed ora professore di statica grafica alla Scuola consimile di Padova, vol. V, anno 1879, del periodico tecnico pubblicato dall'ingegnere Giovanni Sacheri in Torino, *L'ingegneria civile e le arti industriali*, a pag. 138 (Torino, Camilla e Bertolero).

(2) Tali almeno sono i motivi che, dopo l'esperienza di molti anni fatta nelle scuole tecniche operaie di San Carlo in Torino, mi hanno indotto a smettere l'uso di questa tavola calcolatrice molto ingegnosa e minutamente descritta dallo stesso inventore nella pubblicazione *Abaque ou compteur universel donnant à vue les résultats de tous les calculs d'arithmétique, de géométrie, de mécanique, etc.*, par LÉON LALANNE; 3° édit.; Paris, 1863.

(3) L'importazione e diffusione di questo strumento in Italia sono dovute all'illustre ingegnere QUINTINO SELLA, che pubblicò sul medesimo un aureo libro intitolato *Teoria e pratica del regolo calcolatore* (Torino, 1859), e sta ora elaborandone una terza edizione.

mente sono pure strumenti di grande utilità, ma, come suona il loro nome, limitata al calcolo delle superficie.

Le nozioni ora esposte intorno agli strumenti calcolatori più degni di menzione, non tenendo conto sempre dell'aritmometro di Thomas, bastano a dimostrare che quelli sono molto ancora lontani dal risolvere completamente il problema della calcolazione meccanica, del problema cioè che ha per oggetto di sostituire nei lunghi conteggi numerici i calcoli mentali con operazioni puramente meccaniche, le quali esigano il più breve tempo possibile, conducano a risultati d'esattezza infallibile e di più, laddove non possono giungere le ordinarie tavole dei logaritmi, siano suscettive di fornire questi risultati con tutta la voluta approssimazione. È inoltre mestieri che la macchina, per così fatto scopo ideata, sia d'una costruzione solida, ragionevolmente semplice, di piccole proporzioni, di facile e sicuro maneggio e per ultimo di un prezzo non soverchiamente elevato.

Tale appunto fu il non poco arduo assunto che il signor Thomas intraprese prima dell'anno 1820, ed intorno a cui egli lavorò per lo spazio di 30 anni con rara tenacità di proposito e con grande abilità. Nell'anno 1820 Thomas aveva già concepito ed applicato il principio, che forma ancora oggidì il fondamento della macchina calcolatrice conosciuta sotto il di lui nome, ed otteneva in Francia per la sua invenzione un privilegio di privativa. Nell'anno successivo 1821 il matematico Franceeur faceva gli encomi della prima macchina costrutta dal Thomas in una relazione letta alla Società d'incoraggiamento per l'industria nazionale in Parigi. In seguito Thomas attese a maggiormente migliorare l'opera sua, e ripresentata la sua macchina nel 1851 alla Società medesima, sopra una relazione molto favorevole di Benoit, ebbe in premio una medaglia d'oro (1). Cominciò allora la diffusione della macchina di Thomas, della quale da lungo tempo posseggono ed adoperano con grande vantaggio gli esemplari di 12, 16 e 20 cifre in Francia le principali amministrazioni pubbliche e private, le società ferroviarie, la scuola di ponti e strade, lo stabilimento meccanico del Creuzot, ecc.; in Inghilterra, oltre ad altri istituti, l'osservatorio di Cambridge, ed in Alemagna, Russia e Svizzera un buon numero di politecnici e di scuole d'arti e mestieri. Dal 1851, sino all'ultima Esposizione universale tenuta in Parigi nell'anno 1878, Thomas continuò

(1) Le relazioni ora citate di FRANCEUR e di BENOIT sono inserite rispettivamente nei volumi degli anni 1822 e 1851 del *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale*, Paris, 1822 e 1851. La relazione del FRANCEUR è inoltre accompagnata da una tavola di disegno contenente i più minuti particolari della prima macchina presentata dal signor Thomas.

sempre ad arrecare utili modificazioni al suo aritmometro, arrestandosi alla disposizione che io tra breve passerò a descrivere, e la quale è lecito l'asserire con piena ragione che fa dello strumento in discorso la macchina calcolatrice più perfetta che al presente si conosca (1).

Principio fondamentale su cui fondasi la costruzione dell'aritmometro Thomas. — A rendere più chiara la descrizione, che tra poco esporrò dell'aritmometro Thomas, gioverà parlare prima colla debita estensione del principio sul quale particolarmente si fonda la costruzione di questo strumento. Volendo enunciare siffatto principio con brevi parole, può dirsi che esso consiste nell'impiego di rotismi dentati, composto ognuno di un numero di denti variabile a volontà. S'immagini un piccolo cilindro volubile intorno al proprio asse ed armato, sulla superficie laterale per metà circa della sua circonferenza, di nove denti la cui lunghezza varia in modo crescente ed uniforme dall'un dente all'altro, occupando gradatamente il più corto di questi denti soltanto $\frac{1}{9}$ della lunghezza del cilindro, quello successivo $\frac{2}{9}$, il terzo $\frac{3}{9}$, e così fino all'ultimo che abbraccia l'intera lunghezza del cilindro. Questo, in una delle sue estremità, fingasi munito di un manubrio per mezzo del quale viene impresso al cilindro il moto rotatorio. Accanto allo stesso cilindro giace in direzione parallela un secondo asse di rotazione, la cui sezione trasversale ha la forma quadrata, e sul quale può farsi scorrere un rocchetto dentato cilindrico di 10 denti uniformemente distribuiti su tutta la sua circonferenza. La distanza compresa tra i due assi è tale che il rocchetto, trovandosi in posizione conveniente sul proprio asse, imbecca ad ogni giro del cilindro con un certo numero di denti di quest'ultimo, od anche non forma incastro con veruno dei medesimi denti. Così supponendo che il rocchetto venga collocato in corrispondenza del termine del dente del cilindro, il quale occupa i $\frac{5}{9}$ della lunghezza di questo, torna palese che per ciascuna rivoluzione del cilindro il rocchetto avanzerà di 5 denti, e che al contrario esso rimarrebbe immobile ove fosse invece trasportato oltre l'ultimo nono della lunghezza del cilindro, in maniera cioè da non far presa con alcuno dei denti dello stesso cilindro.

Si concepisca dopo di ciò ancora che: 1° il rocchetto nello spostarsi lungo il suo asse porti con sè un indice scorrevole su d'aeconcia scala graduata, sulla quale ad uguale distanza fra loro in un colla cifra 0,

(1) Nel 1849 comparve in Francia, per opera dei signori Maurel e Jayet, un'altra macchina calcolatrice sotto il nome di *Arithmaurel*, la quale però siccome composta degli organi caratteristici dell'aritmometro di Thomas e di struttura assai più complicata, sembra caduta in oblio (si veggano il *Bulletin* testè citato — anno 1849, ed anche gli *Annales des ponts et chaussées* — serie 3^a, t. VIII, anno 1854).

in corrispondenza dei 9[9 in cui trovasi divisa la lunghezza del cilindro siano incise le altre cifre naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2° all'asse di rotazione del medesimo rocchetto, in una sua estremità, si trovi solidariamente applicato un disco portante le dieci cifre anzidette ripartite in modo uniforme sulla propria circonferenza; 3° finalmente ognuna di queste cifre, mentre girano il rocchetto ed il disco, passi sotto una finestrella fissa, vale e dire praticata in una parete faciente parte del sostegno di tutto il meccanismo. Con una somigliante disposizione di cose diviene manifesto che, volendo far comparire sotto la finestrella una data cifra 0, 1, 2, ecc., basterà collocare l'indice annesso al rocchetto sopra la cifra corrispondente della scala, ed imprimere semplicemente al sistema un giro di manovella. Se per motivo d'esempio la cifra scelta è 5, il rocchetto farà presa con 5 denti del cilindro, avanzerà pertanto durante il giro della manovella o del cilindro di 5 denti, e quindi la cifra 5 del disco, o quadrante, verrà a collocarsi nella finestrella.

Limitato però lo strumento ad un sol cilindro, coi rispettivi rocchetti, quadrante e finestrella, sarebbe unicamente suscettivo di riprodurre i numeri d'una sola cifra. In conseguenza, volendo anche potere rappresentare in modo analogo un numero di più cifre od ordini di unità, bisognerà aggiungere accanto al sistema precedente tanti altri sistemi identici, composti cioè ciascuno d'un cilindro, d'un rocchetto, d'un quadrante e d'una finestrella, quanti sono questi ordini d'unità. Si potrà allora evidentemente semplificare la struttura dello strumento, per ciò che si riferisce al movimento di rotazione da comunicarsi ai vari cilindri, facendo cioè uso d'una sola manovella motrice, la quale, ad esempio, per via di un albero maestro e di coppie di ruote dentate d'angolo trasmetta simultaneamente il moto a tutti questi cilindri. Pongasi, per chiarire meglio quanto precede, che i sistemi testè menzionati siano in numero di 8. Si potranno allora nelle 8 finestrelle corrispondenti inscrivere tutti i numeri interi da 0 fino a 99 999 999, dando per ogni numero un sol giro alla manovella motrice.

Meccanismo speciale per eseguire le ritenute da un quadrante all'altro. — Inscritto un dato numero, per esempio A , nelle finestrelle dello strumento, fingasi che, lasciando tal quale questo numero, gli indici annessi ai rocchetti dei vari sistemi vengano disposti in guisa da segnare un altro numero intero B , siffatto però che la somma di esso col precedente ($A+B$) non richiegga alcun riporto, o ritenuta, da un ordine di unità all'altro. Allora è palese che senz'altro questa somma apparirà nelle finestrelle, sol che facciasi compiere un secondo giro pel medesimo verso alla manovella motrice. Che se invece alcune delle cifre dei due numeri A e B , corrispondenti allo stesso ordine di unità,

assieme sommate, formano un totale maggiore di 9, scorgesi il bisogno di riportare la parte di questo totale eccedente il 9 all'ordine di unità immediatamente superiore, cioè al quadrante successivo. Si comprende inoltre che simile riporto deve potersi effettuare indipendentemente dal moto del cilindro con cui forma sistema questo quadrante successivo, e di più senza dover spostare il rispettivo rocchetto dalla sua posizione attuale.

La necessità di tali ritenute dall'uno all'altro quadrante rende ragione della mancanza di denti per una parte della circonferenza di ciascun cilindro. Dopo mezzo giro questo cilindro ha già fatto avanzare il rispettivo rocchetto del voluto numero di denti, corrispondente alla cifra particolare da segnarsi sul suo quadrante. Poscia fino al termine del giro il cilindro gira a vuoto, non comunicando più cioè il movimento al rocchetto. Però quest'ultimo riceve allora il moto dal cilindro del sistema d'ordine immediatamente inferiore nella maniera che segue. Nell'istante in cui il quadrante di questo sistema, che deve segnare un numero maggiore di 9, viene a collocarsi colla cifra 0 successiva al 9 sotto la propria finestrella, mercè d'un piccolo dente ond'è armato lo stesso quadrante, rimane liberato dall'azione resistente di una molla un nottolino acconciamente disposto, il quale a sua volta sposta un piccolo bocciuolo solidario coll'asse di rotazione del cilindro appartenente al sistema in discorso. Questo bocciuolo così spostato forma incastro con un secondo rocchetto dentato, pure di 10 denti, applicato all'asse di rotazione del rocchetto del sistema successivo, ma in un punto fisso, e fa avanzare lo stesso rocchetto di un dente, mentre il rocchetto scorrevole montato sul medesimo asse gira a vuoto: con ciò il quadrante corrispondente a questo asse, che fino al termine del giro del rispettivo cilindro non partecipa più del moto di quest'ultimo, si avvanza esso pure d'una cifra, effettuando il voluto riporto. Nel tempo stesso la molla testè accennata, reagendo, ritorna il bocciuolo ed il nottolino alle posizioni loro primitive.

Rispetto al meccanismo or ora descritto, avente per oggetto la registrazione delle ritenute, vuolsi ancora aggiungere un'osservazione della massima importanza. Quest'osservazione è che affine di agevolare il movimento della manovella motrice, e procacciare insieme allo strumento la debita durata, fa mestieri sopprimere il maggior numero possibile delle resistenze passive inerenti al meccanismo, o per dir meglio bisogna procurare almeno che queste resistenze non si sviluppino tutte ad un tempo, ma l'una successivamente all'altra. Può darsi infatti che tutti i quadranti, o parte di essi, segnino la cifra 9 simultaneamente, e che in conseguenza debbansi pei medesimi eseguire nello stesso istante le ritenute da un quadrante all'altro. Ciò creerebbe uno

sviluppo contemporaneo, epperò eccessivo di resistenze al movimento della manovella, con pericolo che avvenga la rottura di qualche organo dello stromento. Ad evitare quest'inconveniente Thomas pensò di disporre il meccanismo in modo che le ritenute in questione non succedano mai, anche due soltanto, nello stesso momento: la qual cosa egli ottenne, molto ingegnosamente e semplicemente, distribuendo i denti dei vari cilindri in guisa che quelli occupano porzioni diverse delle superficie laterali di questi riferiti ad un piano comune fisso di paragone, al piano cioè in cui giacciono gli assi geometrici di tutti i cilindri.

Meccanismo commutatore del verso di rotazione dei quadranti per potere eseguire le sottrazioni in luogo delle somme. — Ho già detto in quale maniera semplicissima e sicura si effettua coll'aritmometro la somma di due numeri interi qualsivogliano A e B . Si dispongono successivamente i rocchetti indicatori in modo da segnare sulle loro scale prima il numero A , e poscia il numero B . Appena iscritto numero A , mediante un primo giro della manovella motrice, si fa comparire questo numero nelle finestrelle: in seguito segnato il numero B , un secondo giro di manovella dato nello stesso verso produce nelle finestrelle la somma $A+B$. Suppongasì ora, per fissare le idee, che B per esempio sia minore di A , e debbasi invece sottrarre B da A , cioè vogliasi la differenza $A-B$ in luogo della somma dei due numeri dati. Se fosse lecito di far girare la manovella motrice in senso contrario, s'inferisce di leggieri da quanto precede che, dopo d'aver iscritto il numero A nelle finestrelle con un primo giro di manovella, e segnato l'altro numero coi rocchetti indicatori, un secondo giro della manovella nel verso opposto farà apparire nelle finestrelle la differenza $A-B$ invece della somma $A+B$.

Senonchè conviene, soprattutto per poter noverare più facilmente i giri di manovella, che questa abbia sempre a rotare per lo stesso verso. Or bene Thomas ha, nella sua macchina, raggiunto eziandio quest'altro scopo, provvedendola d'un terzo meccanismo speciale, di cui giova fin d'ora indicare la parte sostanziale. I quadranti non furono, come fin qui ho detto per maggior semplicità, da lui montati direttamente sugli assi di rotazione dei rocchetti indicatori: quelli invece ricevono il movimento da questi mercè tre piccole ruote dentate d'angolo siffattamente disponibili che, girando due di esse coll'asse di rotazione del rocchetto, epperò anche colla manovella motrice, pel medesimo verso, possano a volontà la terza ed il quadrante colla medesima solidario rotare nell'uno o nell'altro senso. Per invertire la rotazione dei quadranti, rispetto a quella della manovella motrice, s'impiega un braccio di leva opportunamente combinato con altri organi. Allora senza ulte-

riori spiegazioni si comprende che, continuando la manovella motrice a girare pel medesimo verso, sui quadranti rimane dei due numeri dati *A* e *B* fatta la sottrazione invece della somma. Applicherò d'ora innanzi, per brevità di parola, il nome di *commutatore* al meccanismo di cui son venuto dichiarando l'ufficio.

Descrizione dell'aritmometro. — Lo svolgimento dato alla parte precedente, che riguarda il principio fondamentale di costruzione dell'aritmometro, mi dispensa dall'entrare qui in minuti particolari intorno alla sua descrizione, la quale pertanto restringerò nei brevi cenni che seguono, rimandando il lettore, che desiderasse di conoscere partitamente i vari organi costituenti la macchina di Thomas, all'estesa leggenda che chiude queste pagine. Le due tavole di disegno illustrative, che accompagnano il presente scritto, rappresentano nella figura 1 l'aritmometro completo, in una cioè alla cassetta entro cui trovavasi stabilmente riposto, e dalla quale soltanto venne tolto il coperchio, il tutto in proiezione orizzontale ad $\frac{1}{3}$ del vero; nella figura 2 una porzione dello strumento del pari in proiezione orizzontale, ma in grandezza naturale e senza le due piastre sovrastanti alle due parti fissa e mobile dell'intero meccanismo; nella figura 3 finalmente anche una porzione, al vero, della proiezione orizzontale della parte mobile dello strumento, vista però dal basso all'alto e supposta distaccata dal meccanismo sottostante.

Si può l'intero meccanismo dell'aritmometro, per chiarezza di discorso, intendere siccome composto di cinque distinti meccanismi parziali, cioè: 1° del sistema dei tamburi o cilindri dentati, e dei rocchetti dipendenti dai medesimi, che serve ad eseguire le somme di numeri interi le quali non richieggono alcun riporto da un ordine d'unità all'altro; 2° d'un meccanismo speciale che, allorquando le somme da effettuarsi abbisognano di riporti o ritenute, indipendentemente dagli anzidetti cilindri opera queste ritenute; 3° d'una serie di quadranti applicati su d'una piastra mobile, allo scopo di moltiplicare fra loro due numeri interi qualunque, vale a dire anche con un moltiplicatore avente più d'una cifra; 4° d'un commutatore, o meccanismo atto a trasformare il verso del movimento degli organi, i quali debbono eseguire le volute operazioni, acciocchè l'aritmometro possa sottrarre e dividere in luogo di sommare e moltiplicare; 5° d'un'altra serie particolare di quadranti destinati alla numerazione dei giri della manovella motrice. Dirò brevi parole, e tenendo il medesimo ordine, di ciascuno di questi meccanismi parziali.

Mediante una manovella girevole intorno ad un asse verticale, e situata presso l'estremità di destra dell'aritmometro (figure 1 e 2), si imprime il moto rotatorio ad un albero maestro orizzontale, il quale a

sua volta lo comunica ad otto cilindri parimente orizzontali ed armati di denti di varia lunghezza per metà circa della loro circonferenza. Con questi cilindri, e per quel numero di denti corrispondente alla cifra che ciascun cilindro deve riprodurre, si mettono in presa altrettanti rocchetti dentati scorrevoli lungo assi di sezione quadrata e paralleli agli assi dei cilindri medesimi. In tal modo, cioè fino a tanto che dura l'incastro dei cilindri e rocchetti ora accennati, prendono anche a girare i quadranti, che d'ora innanzi denominerò *quadranti principali o superiori*, ed i quali fanno apparire nelle finestrelle superiori dello strumento le cifre di qualsivoglia numero intero avente non più di otto cifre. I rocchetti si collocano al loro sito mercè le scale graduate da 0 a 9, che veggonsi incise nella piastra fissa dell'aritmometro lateralmente ad altrettante scanalature, in ognuna delle quali si può fare scorrere nei due versi un bottone armato d'indice. Questi bottoni, muovendosi, trascinano seco i rocchetti sovra menzionati nelle posizioni convenienti. Il numero dato rimane inscritto nelle prime otto finestrelle superiori di destra, solo che facciasi compiere un giro alla manovella motrice nel senso in cui cammina l'ago di un orologio.

In ogni giro della manovella motrice i quadranti in quistione rimangono immobili durante l'intervallo di tempo per cui i cilindri, non formando più incastro coi loro rocchetti, girano a vuoto. Orbene, vennero messi a profitto questi intervalli di tempo per potere, in un secondo giro dato alla manovella, dopo del quale nelle finestrelle superiori deve apparire la somma del numero precedente con se medesimo, eseguire le ritenute da un quadrante all'altro, ossia registrare i giri interi fatti in ciascun quadrante sul quadrante consecutivo a sinistra. Per simile oggetto, appena che uno dei quadranti segna la cifra 9 nella rispettiva finestrella, grazie ad una acconcia disposizione dei denti sui vari cilindri, principia l'azione a vuoto del cilindro successivo a sinistra, in altri termini questo cessa dal far muovere il proprio quadrante. In pari tempo un dente, annesso al quadrante del cilindro precedente, ha già armato uno scatto a molla, mercè cui lo stesso cilindro può comunicare invece il moto al quadrante consecutivo or ora mentovato, però solamente per l'avanzamento di una cifra, attesochè tosto la molla reagisce ed interrompe codesta comunicazione di moto. In cosiffatta maniera l'ultimo dei quadranti considerati tien conto del giro intero dato dal quadrante precedente a destra.

I quadranti sin qui menzionati trovansi disposti su di una parte dello strumento, che dirò *piastra mobile o scorrevole*, potendosi essa fare scorrere a volontà da sinistra verso destra, e reciprocamente. Affine di comprendere l'uffizio di questa piastra, pongasi di dover sommare un dato numero intero con se medesimo più di nove volte, vale a

dire di doverlo moltiplicare per un altro numero intero avente più di una cifra. Siccome allora il numero esprime il prodotto, che deve rimanere iscritto nelle finestrelle superiori, potrà contenere più di otto cifre, e quindi avere bisogno di occupare altre finestrelle, oltre le prime otto di destra, così vedesi in causa del numero limitato dei cilindri, la necessità di mettere in presa con questi alcuni dei quadranti corrispondenti alle nuove finestrelle. D'altro canto è da notarsi che, ad esempio, dopo i primi nove giri della manovella motrice, i giri successivi non possono più alterare la cifra delle unità semplici del prodotto, vale a dire la cifra iscritta nel primo quadrante a destra, il quale perciò si potrà rendere indipendente dal primo cilindro di destra, ponendo invece in presa con questo cilindro il secondo quadrante di destra, col secondo cilindro il terzo quadrante, e via via coll'ottavo cilindro il nono quadrante. Occorrerà di liberare anche il secondo quadrante di destra dal primo cilindro, con cui quello ora trovasi in presa, e spostare in modo analogo i quadranti successivi da sinistra verso destra, allorché i giri della manovella motrice avranno oltrepassato il numero di 99, in altre parole quando si dovrà moltiplicare il primo numero dato per la cifra delle centinaia di un moltiplicatore di tre cifre. Tale appunto è la ragione d'essere della piastra scorrevole dell'aritmometro, la quale, trasportata nelle sue varie posizioni, si colloca esattamente a sito, e vi si arresta in modo sicuro facendo ad ogni posizione penetrare un dente annesso inferiormente alla medesima in tacche scolpite a convenevole distanza tra di loro nella parte fissa dello strumento. Avvertirò ancora relativamente alla piastra in questione che, per poterla fare scorrere nei due sensi, è mestieri sollevarla dapprima pel suo lembo longitudinale inferiore; pel quale oggetto appunto essa è girabile intorno ad un asse orizzontale coincidente coll'altro suo lembo longitudinale solidario colla piastra stessa e che scorre entro anelli raccomandati alla parte fissa sottostante dello strumento.

Il meccanismo commutatore, del quale sostanzialmente già vengano indicati sia l'oggetto, sia il modo di agire, ha per suo principale organo una leva, della quale nella figura 1 a sinistra scorgesi la sommità armata di bottone. Questa leva si muove in un piano verticale entro una breve scanalatura scolpita, a somiglianza di quelle degli otto bottoni indicatori; nella piastra fissa dell'aritmometro in senso trasversale, ed alle cui estremità stanno scritte le parole *addizione-moltiplicazione* e *sottrazione-divisione*. Spingendo la leva contro l'una o l'altra di queste estremità, per mezzo di organi trasmettitori intermedi, acconciamente disposti e visibili sulla figura 2, s'inverte il senso della rotazione dei quadranti superiori o principali, mentre la manovella motrice continua a girare pel medesimo verso. Fra gli organi ora

accennati mi contenterò qui di segnalare soltanto le tre ruote dentate d'angolo, che servono a trasmettere il moto a ciascun quadrante, e delle quali le due girevoli intorno ad un asse comune orizzontale, che è quello stesso del rispettivo rocchetto indicatore, trovansi fra loro congiunte da un manicotto scorrevole lungo questo asse. La leva del commutatore, passando dall'una all'altra posizione estrema, non fa altro che spostare lungo l'anzidetto asse d'una piccola quantità le due ultime ruote: con che la ruota annessa al quadrante e la quale formava, per esempio, incastro con quella delle due ruote sottoposte, che corrisponde al moto di avanzamento, ossia alla somma o moltiplica, viene invece ad imboccare coll'altra delle stesse ruote ed imprime al quadrante un moto di regresso necessario per operare la sottrazione o divisione.

Per ciò che riguarda l'ultimo meccanismo parziale, cioè il meccanismo novatore dei giri della manovella motrice, farò notare soltanto che il medesimo consiste in nove altri quadranti, i quali corrispondono alle finestrelle inferiori (figura 1) e saranno perciò d'ora innanzi denominati *quadranti inferiori*. La stessa manovella comunica il moto a questi quadranti per via di un rotismo dentato visibile nella figura 2, però sempre ad un solo quadrante per volta, il quale varia a seconda della posizione assegnata alla piastra scorrevole. Così il quadrante, che solo riceve il moto ad ogni giro di manovella, giusta la disposizione riportata nella figura 1, è il primo a destra. Trasportando la piastra mobile di una, due, tre, ecc., tacche verso destra, il moto della manovella resta comunicato invece al secondo, terzo, ecc., quadrante di destra.

Nel porre qui termine alla descrizione dell'aritmometro importa ancora che sia richiamata un istante l'attenzione sulle due dentiere annesse tanto alla serie dei quadranti superiori, quanto a quella dei quadranti inferiori, come pure sui bottoncini che sorgono presso ciascuno dei quadranti delle due serie. Le dentiere si adoperano per rimettere a zero tutti assieme e prontamente le due serie di quadranti, facendo girare nel debito verso i due grossi bottoni applicati alle estremità della piastra scorrevole. I bottoni minori che accompagnano ognuno dei quadranti, servono per ricondurre a zero questi quadranti separatamente, ed anche per collocarli su quell'altra cifra che si desidera. Sia le due dentiere, sia i piccoli bottoni dei primi dieci quadranti principali di destra non ponno muoversi senza aver prima sollevata la piastra mobile. Entrambe le dentiere, allorchè tutti i rispettivi quadranti trovansi ricondotti a zero, e solo che si rilascino i grossi bottoni leggermente, rientrano da sè nelle proprie guide per opera di una molla da orologio unita all'asse di rotazione di ciascun bottone.

Modo di eseguire coll'aritmometro le principali operazioni della aritmetica: iscrizione di un dato numero nei quadranti principali. —

Quanto son venuto sin qui esponendo è sufficiente acciò si possano comprendere senza difficoltà i procedimenti da tenersi per eseguire qualsiasi operazione dell'aritmetica colla presente macchina, massime se riflettesi che questi procedimenti non richiedono la conoscenza di alcuna regola speciale, seguendosi in essi sia per la natura, come per la disposizione dei calcoli, le regole comuni dell'aritmetica. La prima e fondamentale operazione da sapersi effettuare coll'aritmometro è quella che ha per oggetto l'iscrizione di un dato numero intero nei quadranti principali. Per riguardo a questa operazione possono distinguersi tre casi: 1° il più frequente ed importante in cui il numero dato non contiene più di otto cifre; 2° quello nel quale è proposto un numero avente più di otto cifre; 3° il caso in cui devesi inscrivere un numero terminato da uno o più zeri.

Sia dato, per cagione d'esempio, il numero 87534672 da inscrivere nelle otto prime finestrelle superiori a destra (figura 1). Partendo da sinistra, si collocheranno successivamente i bottoni indicatori in corrispondenza delle cifre 8, 7, 5, 3, 4, 6, 7 e 2. Poscia disposta la leva del commutatore contro l'estremità che si riferisce alla somma, essendo tutti i quadranti principali a zero, si darà alla manovella motrice un giro. Dopo di questo si vedrà apparire senz'altro nelle prime otto finestrelle di destra il numero proposto 87534672.

Abbiassi in secondo luogo da inscrivere 99999999999999 che è il massimo numero di 16 cifre. È chiaro che la parte formata dalle prime otto cifre di destra può venire tutta assieme riprodotta nelle prime otto finestrelle superiori di destra secondo il metodo or ora indicato. Si riempiranno poscia le otto altre finestrelle di sinistra col le cifre rimanenti per mezzo dei bottoncini annessi alle finestrelle medesime, avvertendo soltanto, per le due prime di esse a destra, di tenere sollevata la piastra scorrevole. Nell'esemplare, che è disegnato nelle unite tavole e corrisponde alla seconda delle quattro grandezze per lo più assegnate dall'inventore al suo aritmometro, non si può riprodurre un numero maggiore di quello scelto nel presente caso.

Rammentando infine ciò che dianzi si disse intorno all'ufficio della piastra scorrevole, è ovvio il riconoscere che i numeri aventi in tutto più di otto cifre, delle quali però quelle in più di otto siano insieme altrettanti zeri e le ultime cifre a destra del numero, si possono più speditamente inscrivere col procedimento indicato pel primo caso. Così supposto dato il numero 5786430000 di dieci cifre, essendo tutti i quadranti superiori a zero, si trasporterà la piastra mobile di 2 tacche, in modo da liberare dal meccanismo motore i due primi di questi quadranti a

destra. Poscia, inserito coi bottoni indicatori nelle loro otto scanalature il numero di sole otto 57864300, un semplice giro di manovella basterà a far comparire d'un tratto nelle prime dieci finestrelle superiori a destra il numero dato 5786430000.

Addizione di numeri interi e decimali. — Ogni giro della manovella motrice riproducendo nelle finestrelle superiori il numero inscritto nelle scanalature, e l'aritmometro operando da sè le ritenute dall'uno all'altro ordine di unità, divien manifesto che: 1° se questo numero si conserva lo stesso, dopo 2, 3, 4 ecc. giri di manovella si avranno successivamente nelle dette finestrelle il doppio, il triplo, il quadruplo dello stesso numero; 2° se poi ad ogni giro della manovella cangiasi il numero rappresentato dai bottoni indicatori, il numero finale risultante dopo l'ultimo giro nelle finestrelle sarà la somma di tutti i numeri successivamente iscritti nelle scanalature. Il procedimento pertanto da osservarsi per sommare mediante l'aritmometro quanti si vogliono numeri interi si ridurrà alle operazioni seguenti:

a) Rimettere tutti i quadranti principali e bottoni indicatori a zero;

b) Disporre il commutatore per la somma;

c) Inscrivere successivamente i numeri da sommarsi nelle scanalature, e dare un giro di manovella dopo ognuna di queste inserzioni.

Il medesimo procedimento si potrà palesemente estendere alla somma dei numeri decimali, coll'unica avvertenza di ridurli tutti dapprima allo stesso denominatore. Così siano da sommarsi i numeri 23,41; 218,815; 3574,0242; 968,7. Questi numeri ridotti ad avere un egual numero di cifre decimali diventano 23,4100; 218,8150; 3574,0242; 968,7000: epperò considerati allora come numeri interi, facendo cioè astrazione dalle virgole, verranno successivamente iscritti nelle scanalature, dando dopo ciascuna iscrizione un giro di manovella. Apparirà così nelle finestrelle superiori il numero intero 47849492, dal quale separate verso destra con una virgola le prime quattro cifre decimali, si ricava pel totale dei quattro numeri decimali dati 4784,9492. Questa separazione delle cifre decimali potrà farsi eziandio dal principio dell'operazione per mezzo degli spilli d'avorio, di cui l'aritmometro è provvisto, e dei piccoli fori scolpiti appunto per simile uopo tra le finestrelle superiori, come tra quelle inferiori, infiggendo uno spillo nel quarto foro, a destra, di quelli compresi fra le finestrelle superiori.

Sottrazione e sua prova. — È già noto l'ufficio di commutatore, vale a dire che basta spingere la leva di comando di questo meccanismo contro l'estremità della rispettiva scanalatura indicata colle parole sottrazione-divisione acciò un giro della manovella motrice, in luogo

di operare una somma, sottragga invece il numero espresso nelle scanalature corrispondenti ai cilindri da quello che trovasi riportato nelle finestrelle superiori. La macchina compie da per sè gli imprestiti da farsi fra i vari ordini di unità. Ecco in conseguenza il procedimento che dovrà seguirsi per sottrarre un numero intero o decimale da un altro, avvertendo soltanto, pel caso dei numeri decimali, di ridurre primieramente il minuendo ed il sottraendo ad avere lo stesso numero di cifre decimali :

a) Rimettere i quadranti principali e bottoni a zero, e disporre il commutatore per la somma ;

b) Rappresentare il minuendo per mezzo dei bottoni indicatori e riprodurlo con un giro di manovella nelle finestrelle superiori ;

c) Trasportare il commutatore al luogo corrispondente alla sottrazione ;

d) Inscrivere il sottraendo nelle scanalature e dare un secondo giro di manovella, dopo del quale si otterrà l'apparizione del resto cercato nelle finestrelle.

Ritornato il commutatore al punto primitivo, è chiaro che un terzo giro di manovella farà riapparire il minuendo nelle finestrelle, offrendo così un mezzo semplicissimo di eseguire la prova della fatta sottrazione.

Moltiplicazione: fino a quali numeri può spingersi in questa operazione l'uso dell'aritmometro. — La moltiplicazione di un numero intero qualunque per un altro numero intero d'una sola cifra si eseguisce, dopo d'aver iscritto il moltiplicando nelle finestrelle superiori, dando alla manovella tanti giri, quante sono le unità del moltiplicatore. Se poi quest'ultimo contiene più d'una cifra, qualmente venne già indicato parlando dell'uso della piastra scorrevole, bisognerà operare come segue:

a) Rimettere i quadranti principali, i bottoni indicatori ed anche i quadranti inferiori a zero ;

b) Collocare il commutatore al luogo della moltiplicazione ;

c) Inscrivere il moltiplicando nelle scanalature ;

d) Dare tanti giri alla manovella, quante unità si contengono nella prima cifra detta del moltiplicatore. Nelle finestrelle superiori apparirà il primo prodotto parziale, e nella prima finestrella inferiore a destra rimarrà inserita la cifra considerata del moltiplicatore ;

e) Trasportare d'una tacca verso destra la piastra scorrevole e dare alla manovella tanti giri quante sono le unità della cifra delle decine del moltiplicatore. Questa cifra si troverà riprodotta nella seconda finestrella superiore, e nelle finestrelle inferiori si avrà la somma dei due primi prodotti parziali. E così si continuerà fino a completo

esaurimento del moltiplicatore, il quale alla fine deve trovarsi interamente riprodotto nelle finestrelle superiori.

Pei numeri decimali si procede come pei numeri intieri, separando soltanto alla fine verso destra tante cifre decimali, quante sono complessivamente quelle di tutti i fattori. Anche la moltiplicazione di più di due numeri fra loro si opera rapidamente coll'aiuto dell'aritmometro, seguendo un processo analogo a quello qui sopra dichiarato dapprima pei due primi fattori, poscia pel prodotto risultante ed il terzo fattore, e via via.

È cosa poi molto facile il riconoscere fino a qual punto è possibile spingere nella moltiplicazione dei numeri l'uso dell'aritmometro. Perciò basta l'osservare dall'un canto che il prodotto finale, dovendo risultare inscritto nelle 16 finestrelle superiori, questo prodotto non potrà mai avere più di 16 cifre. D'altra parte il numero delle cifre di un prodotto di numeri interi è uguale alla somma dei numeri delle cifre dei vari fattori, ovvero a questa somma diminuita di uno. Da tutto questo conseguiva chiaramente che coll'aritmometro a 16 finestrelle superiori, qual è appunto quello disegnato nelle due annesse tavole, si potranno al più moltiplicare fra loro un numero di 8 cifre per un altro pure di 8 cifre, ed anche un numero di 9 cifre per un altro di 7, dovendosi alle due precedenti considerazioni aggiungere ancora quest'altra, cioè che il numero delle cifre del moltiplicatore non può superare quello dei cilindri, i quali nell'aritmometro a 16 finestrelle superiori sono otto. Sarà possibile moltiplicare eziandio tra di loro numeri di 9 e 10 cifre rispettivamente per numeri di 8 e 7 cifre, ma solo nei casi in cui il prodotto non contenga più di 16 cifre. Il numero adunque delle finestrelle superiori costituisce un elemento caratteristico della potenza, per così dire, dell'aritmometro, le cui diverse grandezze si potranno adunque distinguere fra loro mercè la semplice indicazione del numero di queste finestrelle (1).

Divisione: prova di questa operazione; maniera di trovare quante cifre decimali si vogliano del quoziente, quando questo non è un numero intero. — La divisione di un numero intero per un altro, come si pratica in aritmetica, consiste in una serie di successive sottrazioni del divisore dal dividendo spinte fino ad avere un resto uguale a zero, ovvero minore del divisore. Da questa considerazione, e da quanto si è qui addietro esposto intorno alla sottrazione, emerge palesemente il procedimento da seguirsi nella divisione dei numeri intieri. Lo stesso procedimento si potrà estendere ai numeri decimali, dopo solo d'avere

(1) Le grandezze fino ad oggi adottate dal THOMAS sono in numero di quattro e corrispondono ai numeri 10, 12, 16 e 20 delle finestrelle in discorso.

eguagliato il numero delle cifre decimali nel dividendo e nel divisore, ed anche considerando questi come numeri interi e separando alla fine nel quoziente il voluto numero di cifre decimali. Ecco dapprima il procedimento in discorso :

a) Rimettere i quadranti superiori ed inferiori, come pure i bottoni indicatori a zero ;

b) Disporre il commutatore per fare la somma ;

c) Inscrivere prima il dividendo delle finestrelle superiori, e poscia il divisore nelle scanalature, partendo da destra ;

d) Trasportare il commutatore al luogo della divisione ;

e) Trasportare la piastra scorrevole verso destra di tante tacche, finchè la prima o seconda cifra a sinistra del dividendo si trovi sulla prima cifra, pure di sinistra del divisore, secondo che la prima cifra del dividendo è maggiore o minore della prima cifra del divisore, e dare alla manovella il numero di giri necessario acciò la prima, o le due prime cifre considerate del dividendo siano ridotte ad una sola cifra minore della prima cifra del divisore (1). Avuta l'avvertenza di rimettere nuovamente a zero tutti i quadranti inferiori, in uno di questi apparirà la prima cifra del quoziente.

f) Far tornare indietro d'una tacca la piastra scorrevole ed operare in modo analogo al precedente: ciò che darà nel quadrante inferiore successivo di destra la seconda cifra del quoziente. Nel caso in cui la prima cifra a sinistra del nuovo dividendo fosse minore di quella corrispondente del divisore, la seconda cifra del quoziente sarebbe zero, e bisognerebbe far rientrare d'un'altra tacca la piastra scorrevole. L'operazione poi si proseguirà in tale maniera fino a che nelle finestrelle superiori s'abbia zero, od un numero minore del divisore. Questo numero è il resto finale della divisione, mentre il quoziente cercato si vedrà iscritto nelle finestrelle inferiori.

Esempio. — Debba dividere 5309251 per 8257. Inscritti il primo di questi numeri nelle finestrelle superiori e l'altro nelle scanalature, si trasporta verso destra la piastra mobile tanto che la seconda cifra 3 del dividendo venga sulla prima cifra 8 del divisore. Disposto allora il commutatore per la divisione, si daranno, dopo d'aver rimesso a zero tutte le finestrelle inferiori, 6 giri di manovella. Le prime due cifre del dividendo trovandosi così ridotte a 3, cifra minore della prima cifra 8 del divisore, si conchiuderà che 6 è la prima cifra del quoziente. In seguito si farà rientrare di una tacca la piastra scorrevole: con che

(1) O meglio, più generalmente parlando, acciò la parte a sinistra del dividendo, che abitualmente si separa per ottenere la prima cifra del quoziente, diventi un numero minore del divisore.

la seconda cifra 5 del primo resto 355051 inscritto nelle finestrelle superiori verrà a trovarsi sulla prima cifra 8 del divisore. Si daranno dopo di ciò 4 giri di manovella, e si dirà che 4 è la seconda cifra del quoziente, atteso che le due prime cifre 35 dell'attuale dividendo trovansi ridotte a 2 cifra minore di 8, ed il dividendo stesso al resto 2477. Trasportata infine d'un'altra tacca all'indietro la piastra mobile, in modo da far corrispondere la seconda cifra 4 dell'ultimo resto ottenuto nelle finestrelle superiori alla prima cifra 8 del divisore, e con 3 giri di manovella avendosi tutte le stesse finestrelle ridotte a zero, si terrà 3 come la terza ed ultima cifra del quoziente, il quale sarà dunque 643 esattamente e si troverà inscritto nelle finestrelle inferiori.

La prova della divisione si farà moltiplicando il divisore, tuttora inscritto nelle scanalature, per il quoziente, lasciando tal quale il resto finale nelle finestrelle superiori, ove questo non sia zero. Si collocherà pertanto, riprendendo l'esempio che precede, il commutatore alla moltiplica e si daranno 3 giri di manovella. Trasportata d'una tacca verso destra la piastra scorrevole si daranno altri 4 giri di manovella. Spostata ancora d'una tacca la piastra scorrevole pel medesimo verso, con 6 ultimi giri di manovella si otterrà nelle finestrelle superiori un prodotto 5309251 uguale al dividendo.

Allorquando il quoziente non è un numero intero, per avere un dato numero di cifre decimali basterà aggiungere al dato dividendo tanti zeri quante sono queste cifre decimali, ed eseguire la divisione come precedentemente, separando poscia nel quoziente intero così ottenuto le volute cifre decimali. Ad esempio, volendosi il quoziente di 8517 per 12649 esatto fino al mezzo millesimo, il che torna a dire, volendosi ridurre la frazione ordinaria $\frac{8517}{12649}$ in decimale con errore minore di mezzo millesimo, si dovrà dividere 85170000 per 12649. Si troverà 6733 per quoziente intero con un resto finale 4283; epperò si conchiuderà che 0,673 è il quoziente domandato.

Estrazione della radice quadrata. — La formazione delle potenze per mezzo dell'aritmometro non offrendo difficoltà, farò subito passaggio all'estrazione della radice quadrata dai numeri interi. Se invece venisse dato un numero decimale, oppure la radice cercata non fosse un numero intero, fin d'ora si può osservare che si dovrà procedere come pei numeri interi, solo che prima bisognerà nel primo caso rendere pari il numero delle cifre decimali, e nel secondo aggiungere al dato numero tante coppie di zeri, quante sono le cifre decimali che si desiderano della radice. Ciò premesso, ecco senz'altro il procedimento da tenersi per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero:

a) Si divida il numero dato in membri di due cifre, partendo

da destra. Il primo membro a sinistra potrà anche avere una sola cifra;

b) Essendo tutti i quadranti e bottoni a zero, il commutatore al luogo della somma, s'inscriverà il numero dato nelle finestrelle superiori; e siccome il numero delle cifre della radice è uguale a quello dei membri poc'anzi accennati, si fisseranno tante scanalature, quante debbono essere queste cifre, partendo da destra. Siano queste scanalature, considerate successivamente da sinistra andando verso destra, designate con S_1, S_2, S_3, S_4 , ecc. Dopo di ciò si trasporteranno il commutatore al luogo della divisione, e la piastra mobile verso destra tanto che la prima cifra a sinistra del numero dato, ovvero la seconda se il primo membro a sinistra è di due cifre, venga sopra la scanalatura S_1 .

c) Si cercheranno, a mente come in aritmetica, il massimo quadrato contenuto nell'anzidetto primo membro di sinistra e quindi la sua radice. Si avrà così la prima cifra della radice domandata che si indicherà col bottone della scanalatura S_1 . Allora si daranno alla manovella tanti giri, quante sono le unità di questa cifra, la quale si vedrà comparire in una delle finestrelle inferiori, mentre in quelle superiori il primo membro a sinistra si troverà diminuito del quadrato della prima cifra della radice.

d) Si trasporterà poscia la piastra scorrevole verso sinistra di una tacca. Col bottone della scanalatura S_1 e, occorrendo, anche con quello della scanalatura consecutiva a sinistra, s'indicherà il doppio della prima cifra già ottenuta della radice. Ove le cifre delle finestrelle superiori, che corrispondono a questo doppio, formassero un numero minore del doppio stesso, è chiaro in tal caso che la seconda cifra della radice sarebbe zero, e si dovrebbe far rientrare d'una seconda tacca la piastra scorrevole. Dopo tutto ciò si dividerà il numero costituito dalle cifre or ora menzionate delle finestrelle superiori pel doppio sottoposto della prima cifra trovata della radice; ed il quoziente, che non potrà oltrepassare 9, sarà la seconda cifra della radice cercata. Si daranno pertanto alla manovella tanti giri che bastino, mai però più di 9, cessando soltanto quando nelle finestrelle superiori in luogo delle cifre corrispondenti al doppio della radice trovata si abbia un numero minore di questo doppio. Il numero dei giri così compiuti di manovella, che rappresenta la seconda cifra della radice, si vedrà nel frattempo apparire in un'altra delle finestrelle inferiori.

e) S'indicherà il doppio della parte avuta della radice per mezzo dei bottoni delle scanalature S_1, S_2 , e all'occorrenza eziandio, come già fu avvertito, col bottone della prima scanalatura posta a sinistra di queste. Si farà scorrere la piastra mobile di una nuova tacca verso si-

nistra, e si continuerà in tal modo l'operazione fino a che siasi terminato di considerare tutti i membri del numero dato. Nelle finestrelle inferiori si troverà inscritta l'intera radice, ed in quelle superiori apparirà il resto finale pel caso in cui il numero dato non sia un quadrato perfetto: donde segue un mezzo assai spedito di eseguire la prova della fatta operazione. Ritornato il commutatore al luogo della moltiplicazione, ed inscritta, partendo da destra, la radice ottenuta nelle scanalature S_1, S_2, S_3 , ecc., si moltiplicherà questa radice per se stessa, lasciando nelle finestrelle superiori tal quale il resto risultante dalla estrazione della radice. Si avrà la prova dell'esattezza di ogni operazione compiutasi vedendo riapparire alla fine in queste finestrelle il numero dato.

Esempio. — Sia dato il numero decimale 5,035,061,463,982,204 la cui radice quadrata non si può col mezzo delle tavole ordinarie dei logaritmi calcolare esattamente nemmeno per la parte intera.

Il numero delle cifre decimali essendo già pari, si farà subito la scomposizione del numero in membri binari, cosicchè l'operazione proposta riducesi ad estrarre la radice quadrata da un numero intero di 16 cifre, la quale radice consta di 8 cifre, di cui le tre prime di destra si ricorderà alla fine che sono cifre decimali. Ecco l'indicazione di questa radice colla scomposizione in membri binari:

$$\sqrt{50.35.06.14.63.98.22.04}$$

Si dovranno considerare tutte otto le scanalature, le quali danque, partendo da sinistra, denoterò con $S_1, S_2, S_3, \dots S_8$. S'inscriverà il numero posto sotto il radicale nelle finestrelle superiori facendo uso, anche per tutte le cifre, dei bottoncini annessi a queste finestrelle. Si collocherà il commutatore al luogo della divisione, e la piastra mobile verrà fatta scorrere verso destra tanto che la seconda cifra a sinistra 0 del numero dato si trovi sopra la scanalatura S_1 . Il massimo quadrato contenuto in 50 essendo 49, risulterà per prima cifra della radice cercata 7 che si segnerà col bottone di questa scanalatura. Dati allora 7 giri di manovella, per sottrarre il quadrato 49 dal primo membro 50, verrà 1 in luogo di questo membro nelle finestrelle superiori, e la prima cifra 7 della radice apparirà nella seconda finestrella inferiore a sinistra.

Il doppio della cifra ottenuta essendo 14 si segnerà questo doppio coi bottoni della scanalatura S_1 e della successiva a destra S_2 , non essendovene più altra a sinistra. Per questo stesso motivo invece di due tacche, come dovrebbero fare, attesochè la cifra 1 rimasta del primo membro in un colla prima 3 del membro successivo 35 formando il numero 13 minore del doppio 14 della radice già trovata, la seconda cifra

della radice è zero, si trasporterà la piastra mobile d'una sola tacca verso sinistra. Il doppio così della parte ottenuta essendo 140, s'inscriverà questo numero 140 nelle scanalature S_1, S_2, S_3 , e, qualmente si pratica in aritmetica, si dividerà il numero formato da 135 e dalla prima cifra o del membro seguente 06, vale a dire il numero 1350 pel doppio 140 della radice trovata; per la quale divisione il dividendo ed il divisore sono già al loro sito, cioè colla seconda cifra 3 del dividendo sulla prima cifra 1 del divisore. Sebbene il 140 nel 1350 stia più di 9 volte, tuttavia ogni cifra della radice non potendo superare 9 si conchiuderà che la seconda cifra della radice è 9. Indi coi bottoni delle quattro scanalature S_1, S_2, S_3, S_4 si indicherà il numero 1406 e si daranno 9 giri di manovella: ciò che farà apparire nelle finestrelle inferiori, la terza cifra 9 or ora ottenuta dalla radice (1), e nelle finestrelle superiori al luogo del numero 13509 il resto 825.

Si farà nel seguito nuovamente il doppio della parte fin qui avuta della radice $2 \times 709 = 1418$, che s'indicherà mediante i bottoni delle quattro scanalature S_1, S_2, S_3, S_4 . Accanto al resto testè citato 825 si considererà il membro seguente 14, e si disporrà ogni cosa in modo da poter dividere 8251 per 1418. Si farà scorrere cioè la piastra mobile d'una tacca all'indentro: con che si verrà ad avere la prima cifra 8 del dividendo sulla cifra 1 del divisore. Siccome poi 1418 sta 5 volte in 8291, così s'inscriverà il numero 14185 nelle prime cinque scanalature a sinistra e si daranno 5 giri di manovella. Apparirà la nuova cifra 5 della radice voluta nelle finestrelle inferiori, e così si proseguirà fino ad avere considerati tutti gli altri membri del numero proposto. La radice risultante essendo 70958302, e tre dovendo essere le cifre decimali della chiesta radice, verrà finalmente per questa il numero decimale 70958,302.

Altro procedimento per estrarre la radice quadrata. — Non reputo superfluo il riferire qui succintamente un altro procedimento (2), per estrarre la radice quadrata da un numero intero, fondato sopra una proprietà della progressione aritmetica $\div 1. 3. 5. 7. 9. \dots$, sulla pro-

(1) Se stante il grande numero di cifre della radice cercata, il quale è superiore al numero 8 delle scanalature dell'aritmometro disegnato nelle annesse tavole e venne così scelto a bello studio per trattare subito uno degli esempi più complicati, non si fosse dovuto far rientrare d'una sola tacca, invece di due, la piastra scorrevole, le cifre 7, 0, 9 fin qui ottenute della radice si troverebbero tutte e tre inscritte nelle finestrelle inferiori, mentre nel presente caso concreto in queste finestrelle manca la cifra di mezzo 0 che bisognerà avere l'avvertenza di inserire nella radice al termine dell'operazione.

(2) Vedi l'opuscolo *Instruction pour se servir de l'aritmomètre, machine à calculer, inventé par M. THOMAS (de Colmar), Paris, 1873*, in cui a pag. 23 e seguenti trovasi riportato in disteso questo procedimento.

prietà cioè che la somma di tutti i termini considerati di questa progressione è uguale al quadrato del numero degli stessi termini, e di più l'ultimo termine accresciuto di 1 unità uguaglia il numero di tutti i termini della progressione. Da questa proprietà derivasi il seguente procedimento per estrarre la radice quadrata da un numero intero, e che io mi restringerò ad esporre su d'un esempio. Si domanda la radice quadrata del numero 378225. Inscritto questo numero nelle finestrelle superiori, osservando che la sua radice ha tre cifre, si considerino le tre prime scanalature di destra, le quali si designeranno con S_1, S_2, S_3 andando da sinistra verso destra. Si trasporti, collocato il commutatore al luogo della divisione, la piastra mobile verso destra fino al punto in cui la 2^a cifra 7 del primo membro corrisponda alla scanalatura S_1 . Si sottraggano dopo di ciò dal primo membro a sinistra 37 successivamente i termini 1, 3, 5, 7....., dell'anzidetta progressione per mezzo di altrettanti giri di manovella, inscrivendo prima questi numeri 1, 3, 5, 7....., nella scanalatura S_1 ed in quella immediatamente consecutiva a sinistra, fino a tanto che il numero sovrastante 37 sia ridotto ad un altro minore dell'ultimo termine sottratto. Si troverà che bisogna sottrarre i primi sei termini 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11: donde ricavasi che 6 è la prima cifra della radice domandata, la quale rimarrà ad un tempo riprodotta in una delle finestrelle anteriori.

Nelle finestrelle superiori in luogo del 1° membro considerato 27 si avrà il resto 1, che unito agli altri membri forma il numero 18225. Questo numero contiene ancora il doppio prodotto $(600 \times 2) = 1200$ della parte 600 già ottenuta della radice per la parte rimanente, più il quadrato di quest'ultima parte. Bisognerebbe pertanto, onde ottenere la parte restante della radice, togliere successivamente dal numero 1200 i termini dalla progressione

$$\div (1200 + 1). (1200 + 3). (1200 + 5).....$$

Se non che si può procedere più speditamente, cercando della stessa parte ancora incognita della radice, che è un numero di 2 cifre, una sola cifra alla volta, vale a dire prima la cifra delle decine. In altre parole conviene meglio considerare primieramente il numero 182 formato dal detto resto 1 e dal solo secondo membro 82 del numero dato. A questa maniera invece della progressione precedente si dovrà prendere la seguente

$$\div (120 + 1). (120 + 3). (120 + 5).....$$

i cui termini andranno successivamente sottratti da 182. Si trasporterà adunque la piastra scorrevole d'una tacca verso sinistra, per segno che il numero 18225 ora contenuto nelle finestrelle posteriori venga a

risultare colla sua prima cifra 1, sulla prima cifra anche 1 del numero 120 inscritto nelle scanalature S_1 , S_2 e la precedente a sinistra. Siccome un sol giro di manovella dà $182 - (120 + 1) = 61$ numero minore di $(120 + 1)$, così si conchiuderà che 1 è la seconda cifra cercata della radice, la quale cifra si vedrà a un tempo apparsa in un'altra delle finestrelle anteriori.

Ragionando alla stessa maniera s'inscriverà in seguito nelle scanalature S_1 , S_2 , S_3 ed in quella precedente a sinistra il doppio $2 \times 610 = 1220$ della parte trovata 610 della radice; e fatta rientrare la piastra scorrente d'una nuova tacca, acciò il numero 6125 rimasto nelle finestrelle posteriori vada a collocarsi colla sua prima cifra 6 sulla cifra 1 del numero 1220 inscritto nelle scanalature, con successivi giri della manovella si sottrarranno i primi 5 termini della progressione

$$\div (1220 + 1). (1220 + 3). (1220 + 5). (1220 + 7) \dots :$$

dopo del che, tutti i quadranti principali trovandosi ridotti a zero, s'inferirà che 5 è l'ultima cifra della radice quadrata del numero proposto 378225, ossia che questo è un quadrato perfetto avente per radice 615, la quale vedrassi contemporaneamente riprodotta nelle finestrelle anteriori.

Estrazione della radice cubica; formazione delle tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri naturali; convenienza, in alcuni casi, dell'opera simultanea di due calcolatori. — Il procedimento per estrarre la radice cubica da un numero intero coll'aritmometro essendo del tutto conforme alla regola che comunemente s'adopera in aritmetica, io mi dispenserò qui dal farne parola. Unicamente osserverò che, siccome l'operazione in discorso richiede di tratto in tratto la registrazione di alcuni numeri a parte sulla carta, ed anche l'esecuzione di parecchi calcoli, i quali torna più comodo l'effettuare senza l'aiuto dell'aritmometro, così conviene meglio per l'estrazione della radice cubica l'opera simultanea di due persone, l'una incaricata unicamente delle operazioni meccaniche da eseguirsi col mezzo dell'aritmometro, e l'altra delle registrazioni e dei piccoli calcoli da farsi a parte sulla carta. In tal modo l'estrazione non solo della radice cubica, ma quella delle radici 4^a , 5^a , ecc., si possono coll'aritmometro eseguire abbastanza comodamente e rapidamente.

Altri esempi di casi in cui per l'uso dell'aritmometro torna molto vantaggiosa l'opera simultanea di due calcolatori, sono la formazione delle tavole, dei quadrati e dei cubi dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ecc. Un calcolatore maneggia lo strumento, mentre l'altro registra mano i risultati, eseguisce i calcoli minori nella maniera ordinaria e dirige insieme tutta l'operazione. In entrambi questi casi conviene,

prima di quella richiesta, compilare una tavola ausiliaria delle differenze che passano tra l'un quadrato e l'altro, e fra l'un cubo e l'altro dei numeri 1, 2, 3, 4,..... Indicando con a un numero intero qualunque, la differenza fra i quadrati del numero intero, che lo segue immediatamente e dello stesso numero a è espressa da

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1;$$

e si ha per la differenza analoga di due cubi consecutivi dei numeri naturali

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a = 3a(a + 1).$$

In conseguenza, l'uno dei calcolatori dettando successivamente i numeri naturali, l'altro mediante l'aritmometro potrà subito ottenere i valori di $2a$ e $3a$, i quali saranno registrati dal primo calcolatore. Quest'ultimo avrà solo ad accrescere di 1 unità i valori di $2a$, affine di ricavarne la prima tabella ausiliaria relativa alle differenze dei quadrati. Allora, siccome nelle finestrelle superiori trovasi già il quadrato del numero precedente, così è chiaro che, inseriti sotto dettatura nella scanalatura i successivi valori di $(2a + 1)$, un semplice giro di manovella fornirà i quadrati dei numeri susseguenti. La stessa cosa deve dirsi dei cubi, allorchè pure col mezzo dell'aritmometro siansi trovati i valori di $3a(a + 1)$ riferentisi alla seconda delle citate tabelle ausiliarie.

Uso promiscuo dell'aritmometro e delle tavole dei logaritmi, e delle tavole delle linee trigonometriche naturali. — In moltissimi casi riesce utilissimo l'impiego promiscuo dell'aritmometro e delle due specie di tavole ora menzionate. Si offrono questi casi allorchè si ha bisogno di applicare i numeri a formole logaritmiche ed esponenziali, ovvero a funzioni contenenti qualcuna delle linee trigonometriche. Tali per modo d'esempio sono le due formole seguenti:

$$\log p = a - \frac{b}{\tau} - \frac{c}{\tau^2},$$

oppure

$$v = \frac{m}{p^n}$$

proposte dal professore Rankine per calcolare rispettivamente la pressione p in atm. del vapor d'acqua saturo ad una data temperatura assoluta, ed il volume specifico v in mc. dello stesso vapore che corrisponde ad una nota pressione p pure in atmosfere. Le quantità a, b, c, m, n , sono altrettante costanti, le quali hanno i valori qui appresso riportati:

$$a = 4,8598919; b = 1484,3033008; c = 2203156,2866521;$$

ed

$$m = 1,670,433; n = \frac{16}{17}.$$

Egli è evidente che la calcolazione numerica di queste formole diviene meno laboriosa, e di più può effettuarsi con tutta l'esattezza desiderabile, facendo uso insieme dell'aritmometro e dei logaritmi. Così per la prima di tali formole, il cui logarimo è decimale, converrà determinare i valori di τ^2 , $\frac{b}{\tau}$ e $\frac{c}{\tau^2}$ col mezzo dell'aritmometro, e quindi quello di p ricorrendo alle tavole comuni dei logaritmi. Per la seconda formola, ottenuto il valore di $\log. p$ colle tavole stesse, i calcoli rimanenti si potranno eseguire con speditezza ed esattezza maggiori impiegando l'aritmometro. Del pari quest'altra formola frequentissima della meccanica applicata

$$Q. \frac{\text{sen } \alpha \pm f \cos \alpha}{\cos \beta \pm f \text{sen } \beta},$$

in cui rappresentano α e β due angoli, Q l'intensità d'una forza ed f un coefficiente, con grande vantaggio si potrà calcolare numericamente cercando i valori di $\text{sen } \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{sen } \beta$, $\cos \beta$ nelle tavole delle linee trigonometriche naturali, e poscia effettuando ogni operazione col l'aiuto dell'aritmometro.

A questo punto, sembrandomi di avere esposto intorno alla macchina calcolatrice di Thomas quanto basta per mettere in evidenza i pregi singolari di essa e farne comprendere l'uso per ogni genere di calcolo numerico, porrò fine al mio umile scritto con alcune considerazioni dirette specialmente a promuovere tra noi l'introduzione di così fatto strumento. In primo luogo vuolsi notare a quest'uopo che, per lunghe prove a cui l'aritmometro di Thomas venne assoggettato, è posta fuori d'ogni dubbio la sua solidità ad onta che lo strumento offra l'apparenza di una macchina molto complessa e delicata. Soprattutto poi furono ampiamente dimostrate la rapidità somma ed il grado supremo d'infallibilità, con cui mercè questo strumento si eseguono la massima parte delle più faticose e lunghe operazioni aritmetiche. In 20 secondi si moltiplicano col suo mezzo fra loro due numeri di 8 cifre ciascuno, in 24 secondi si divide un numero di 16 cifre per un altro di 8, ed in poco più d'un minuto primo si riesce ad estrarre la radice quadrata da un numero di 16 cifre, facendo inoltre di questa e dell'operazione precedente le prove (1). Per tali titoli preziosissimi di me-

(1) Oltre le pubblicazioni già citate in questo scritto sull'aritmometro di

rito, a cui debbonsi aggiungere ancora il prezzo relativamente non elevato (1), la possibilità di farlo riparare in caso di guasti anche da un orologiaio, il suo piccolo volume (per la massima grandezza centim. 55 + 16 + 7), il maneggio agevolissimo per ogni persona, infine la sua facile manutenzione che richiede solo di tempo in tempo qualche goccia d'olio da orologio, io oso sperare che la macchina di Thomas, utilissima agli astronomi, matematici, ingegneri, finanzieri, ecc., per ogni sorta di calcoli numerici, segnatamente di lunga lena e con grande quantità di cifre, possa anche diffondersi nella nostra penisola: al quale intento se avranno potuto, sia pur solo in tenue parte, contribuire queste modeste pagine, io mi reputerò sommamente lieto d'averle scritte e rese di pubblica ragione.

Leggenda delle figure illustrative del presente scritto.

FIGURA 1. — Aritmometro unito alla cassetta, in cui si trova stabilmente riposto, e visto in proiezione orizzontale (ad $1/3$ del vero).

FIGURA 2. — Proiezione orizzontale di una porzione dell'aritmometro senza la piastra scorrevole (in grandezza naturale).

FIGURA 3. — Proiezione orizzontale della piastra scorrevole vista dal basso all'alto (in grandezza naturale).

AA piastra mobile, o scorrevole, la quale porta due serie di finestrelle, le une *C* dette superiori in numero di 16, in cui appariscono le cifre dei numeri sui quali devesi operare, e le altre in *D* in numero di otto, denominate finestrelle inferiori, in cui vengono registrati i giri compiuti dalla manovella motrice. Il massimo numero inscrivibile nelle finestrelle superiori è 9 999 999 999 999 999.

BB piastra fissa, la quale cioè copre superiormente pressochè tutta la parte fissa dell'aritmometro, a cui la piastra stessa trovasi fermata per mezzo delle due viti *g* e *g'*. Alla piastra mobile va congiunto

THOMAS, veggansi ancora a questo proposito le due seguenti: 1° *Dictionnaire de mathématique appliquée*, par H. SONNET, Paris, 1867; 2° Una memoria dell'ingegnere LEMOYNE inserita negli *Annales des ponts et chaussées*, série 3^a, t. VIII; Paris, 1854.

(1) Si riferiscono nella presente nota i prezzi in lire italiane, ed inclusa ogni spesa accessoria d'imballamento, trasporto e dogana ed aggio dell'oro, ai quali si possono acquistare le grandezze più in uso dell'aritmometro di Thomas presso *Felice Bardelli e Comp.*^a ottici e meccanici in Torino: a) aritmometro a 12 cifre completo, lire 520; b) id. a 16 cifre, lire 650; c) id. a 20 cifre, lire 1040.

in modo invariabile, nel senso longitudinale, un asse cilindrico Ω (figura 2 e 3), il quale trovasi infilato in due occhi α solidari colla piastra fissa BB allorquando lo strumento è montato, vale a dire le due piastre non sono separate l'una dall'altra come scorgesi nelle figure 2 e 3. L'asse or ora menzionato, mentre è invariabilmente unito colla piastra mobile AA entro tre orecchielle β , può invece rotare intorno a sè medesimo nei due occhi α : la qual cosa permette appunto di sollevare la stessa piastra AA per il lembo prospiciente la piastra fissa BB , facendola girare intorno all'anzidetto asse. Così sollevata la piastra mobile può ancora farsi scorrere da sinistra verso destra e reciprocamente.

E bottoni muniti lateralmente di aghi j , in numero di otto, i quali possono farsi scorrere nel senso trasversale in altrettante scanalature a scolpite nella piastra BB , Gli aghi j camminano lungo otto scale graduate, su cui sono cioè ad eguali distanze fra loro incise le dieci cifre naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ed indicano sulle scale medesime i numeri interi da 0 a 99 999 999 che vogliansi riprodurre nelle corrispondenti finestrelle superiori C della piastra mobile, ovvero sommare coi numeri già inseriti nelle stesse finestrelle, od ancora sottrarre da questi numeri.

F manovella motrice armata nell'estremo libero d'una impugnatura e girevole, in un solo verso a somiglianza d'una sfera da orologio, intorno ad un asse verticale coincidente coll'altro estremo i . Sotto questa manovella trovasi infisso nella piastra BB un piccolo dente h tagliato superiormente in isbieco. Un dente consimile, vale a dire segato anche in isbieco, è annesso alla manovella ad una distanza dall'asse di rotazione i uguale a quella del dente h : così che la manovella in ogni sua rivoluzione, dovendo spingere il primo di questi denti come su di un piano inclinato al suo passaggio sul dente h , risente un leggiero ostacolo il quale avverte che la rivoluzione è giunta al suo termine.

G leva di comando del meccanismo commutatore del verso secondo cui girano i quadranti principali o corrispondenti alle finestrelle superiori c della piastra mobile. Questa leva è girevole entro la scanalatura f intorno ad un asse orizzontale coincidente colla sua estremità inferiore e raccomandato ad una delle spranghette J , che servono a collegare tra di loro le due cartelle o pareti verticali $KK, K'K'$ comprendenti le parti del meccanismo sottoposte alla piastra fissa BB . La stessa leva G per via del tirante L e d'un braccio M produce la rotazione, nell'uno o nell'altro senso, dell'asse orizzontale l , e quindi mercè le due asticciuole che annettono il medesimo asse colla piastra UU , genera lo spostamento di questa piastra nel senso trasversale della macchina. Secondo che la leva G e la piastra UU vengono collocate nell'una o nell'altra delle loro posizioni estreme, facendo sempre gi-

rare la manovella motrice F' per lo stesso senso, i quadranti principali dell'aritmometro prendono a rotare nel senso che corrisponde al loro avanzamento, oppure nel senso contrario: in altri termini la macchina rimane disposta in guisa da potere eseguire le somme e le moltiplicazioni, ovvero le sottrazioni e le divisioni. Tutto ciò spiega il perchè sulla piastra fissa BB , presso le due estremità della scanalatura f , vennero incise le parole addizione-moltiplicazione e sottrazione-divisione.

I e H bottoni girevoli intorno ad assi verticali, che servono a rimettere speditamente a zero i quadranti delle finestrelle inferiori D e superiori c . Questi due bottoni si fanno girare rispettivamente colle mani destra e sinistra, ed entrambi verso la parte centrale dello strumento relativamente al lembo inferiore della piastra mobile, avendo ognora l'avvertenza di tenere nel frattempo sollevata questa piastra; in tal modo si costringono a spostarsi nel senso longitudinale due dentiere ZZ e ZZ' , l'una da sinistra verso destra e l'altra nel senso contrario. Le due dentiere a loro volta producono la rotazione di rocchetti speciali dentati, che sono annessi agli assi tanto dei quadranti X delle finestrelle inferiori, quanto di quelli Y corrispondenti alle finestrelle superiori, i quali quadranti essendo liberi dal meccanismo motore dello strumento, perchè la piastra AA è sollevata, prendono essi pure a girare fino a tanto che la cifra 0 non venga per tutti a collocarsi sotto la propria finestrella. Giunto così ciascun quadrante a zero, rimane immobile, attesochè i rocchetti colle due dentiere portano solo 9 denti o, per dir meglio, sono privi del dente che corrisponde allo zero del relativo quadrante, epperò cessa l'incastro fra dentiera e rocchetto appena che lo zero apparisce nella finestrella, ossia il rocchetto presenta alla dentiera il triplo vano corrispondente al dente soppresso. Si possono scorgere alcuni di siffatti vani sulla figura 3, nella quale trovansi rappresentati i rocchetti in questione ζ nei quadranti X delle finestrelle inferiori. Una volta ricondotti i quadranti delle finestrelle superiori e di quelle inferiori a zero, basta rilasciare alquanto i bottoni H ed I : chè una molla da orologio unita al loro asse di rotazione tosto li obbliga a girare nel verso contrario, e fa rientrare le due dentiere fino alle posizioni loro primitive. Sulla medesima figura 3 è disegnato il tamburo α contenente la molla del bottone di destra I per le finestrelle inferiori. Le due dentiere scorrono entro acconci ritegni Ψ e Ψ' . Di più esse nella loro corsa attiva, come nell'altra del ritorno vuoto, rimangono leggermente spostate nel senso trasversale, in guisa da avvicinarsi ai rispettivi rocchetti, ovvero da allontanarsene: tutto ciò si ottiene per via di scanalature, qualmente vedesi nei ritegni Ψ , oppure foggiano una porzione del lembo inferiore della dentiera a piano inclinato e costringendo questo piano a passare su d'apposita co-

piglia infissa nella piastra AA . Thomas ricorse a quest'ultimo partito per la dentiera delle finestrelle superiori $Z'Z'$.

$K'K'$ terza cartella o parete longitudinale del castello contenente le parti del meccanismo sottoposto alle due piastre fissa e mobile dell'aritmometro: essa è di altezza un po' minore di quella delle altre due cartelle già state nominate KK e $K'K'$, alla seconda delle quali trovasi congiunta per mezzo di spranghette trasversali similmente a quanto già si disse delle due cartelle maggiori.

N albero maestro di trasmissione del moto della manovella motrice all'intero meccanismo. Dall'asse di rotazione della manovella il moto è comunicato per mezzo d'una doppia coppia di ruote dentate d'angolo φ e μ all'albero N , il quale lo trasmette ai cilindri P mediante altre coppie di ruote dentate angolari k, k' .

O ruota di forza, alla quale va unito un nottolino che non figura sul disegno: questa ruota impedisce il moto regressivo della manovella motrice F (figura 1) e quindi dell'intero meccanismo.

P cilindri orizzontali, in numero di otto, l'un l'altro paralleli, volubili intorno ai loro assi ed armati sulla superficie laterale, per una mezza circonferenza circa, di nove denti δ ciascuno di lunghezza variabile. Partendo dall'estremità degli stessi cilindri, posta dalla parte dell'albero di trasmissione del moto N , il primo dente abbraccia tutta la lunghezza del cilindro, il dente successivo soltanto $\frac{8}{9}$, e così fino all'ultimo che ne occupa $\frac{1}{9}$.

Q assi di rotazione parimente orizzontali e disposti parallelamente ai cilindri P , che ricevono il moto da questi cilindri per comunicarlo ai quadranti principali Y (figura 3) dell'aritmometro. A quest'uopo sui medesimi assi, che sono di sezione trasversale quadrata, trovansi montati i rocchetti cilindrici dentati n scorrevoli lungo il rispettivo asse in uno ai colletti m . Secondochè ognuno dei rocchetti n viene spinto partendo dall'albero N , ad $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{9}{9}$ della lunghezza dei cilindri P , per ciascun giro di questi avanza di 1, 2, 3, ..., 9 denti. Lo spostamento degli stessi rocchetti lungo gli assi Q si ottiene facendo scorrere (figura 1) i bottoni E nelle scanalature a , i quali trasportati rimpetto alle cifre 0, 1, 2, 3, ..., 9 delle scale scolpite sulla piastra fissa BB parallelamente a queste scanalature trascinano seco un braccio che si collega ai colletti m , e quindi anche ai rocchetti n .

R ed S altri assi orizzontali di rotazione paralleli e successivi ai precedenti Q , che ricevono in modo continuo il moto dall'albero maestro N e lo trasmettono agli assi R', S allorchando i riporti dei giri dall'uno all'altro dei quadranti principali Y debbono estendersi al nono ed al decimo di questi quadranti, cioè ai due quadranti consecutivi a quelli i quali corrispondono agli otto cilindri P .

T e *W* disco girevole coll'asse *S* e braccio orizzontale annesso alla leva *G* (figura 2) del meccanismo commutatore del verso secondo cui prendono a rotare i quadranti principali. Il disco *T* è, sopra una porzione del suo contorno, privo d'un segmento: esso, ad ogni volta che (figura 1) la manovella nutrice ha terminato la sua rivoluzione, viene a collocarsi colla porzione mancante dinanzi al braccio *W*, il quale potendo allora passare dall'uno all'altro fianco del disco permette di spostare la leva di comando del commutatore, cioè di trasportarla nell'altra estremità della sua scanalatura *f*. In conseguenza è da avvertirsi che il commutatore non si può smuovere dalla sua attuale posizione, se la manovella *T* non viene dapprima spinta fin contro il suo dente d'arresto *h*.

X quadranti noveratori dei giri di manovella e corrispondenti alle finestrelle inferiori della piastra mobile (figura 1); essi sono in numero di nove, e ricevono separatamente, quando la piastra mobile *AA* non trovasi sollevata il movimento di rotazione intorno al rispettivo asse per via d'un sistema di ruote dentate, delle quali l'ultima è lo stesso quadrante armato appunto a quest'uopo di 10 denti sulla sua circonferenza. Affinchè ciascun quadrante possa numerare da 0 fino a 9 i giri della manovella fa mestieri che esso sia collocato, colla cavità corrispondente τ praticata inferiormente nella piastra mobile, sopra la ruota dentata cilindrica ω (figura 2) giacente in un piano verticale, mentre il quadrante giace in un piano orizzontale. Così ponendo il primo quadrante di destra in presa colla ruota ora mentovata ω si possono contare i giri di manovella fino a 10; trasportandovi sopra il secondo quadrante col fare scorrere verso destra la piastra mobile si noverano gli stessi giri nuovamente da 0 sino a 10, e lo stesso dicasi via via per tutti gli altri quadranti. Questi successivi trasporti della piastra mobile e dei quadranti in parola sono necessari per passare dalle cifre di un ordine d'unità a quelle di altri ordini.

Y quadranti principali o corrispondenti alle finestrelle superiori dell'aritmometro *c* (figure 1 e 3), i quali, se la piastra mobile trovasi al suo sito abituale, sono orizzontali. I medesimi sono in numero di sedici, e corrispondono gli otto primi verso destra agli assi *Q*, ed i due consecutivi agli assi *R'* ed *S'*. L'asse di rotazione verticale di ciascun quadrante porta, oltre la piccola ruota dentata cilindrica che ha relazione colla dentiera *Z' Z'*, e venne già nominata qui addietro, una ruota dentata d'angolo la quale a seconda della posizione assegnata alla piastra *UU* del commutatore fa incastro coll'una o coll'altra delle ruote consimili sottostanti *p*, *p'* montate sugli assi *Q*, *R'*, *S'*: in tal modo il quadrante piglia a girare pel verso conveniente. La disposizione data alle due ruote *p*, *p'* pei vari sistemi è molto semplice, trovandosi esse

solidarie con un piccolo tubo che la piastra UU fa scorrere avanti e indietro sugli assi testè mentovati Q ed R' , S' .

b (figura 1) bottoncini, i quali, dopo d'aver sollevata la piastra mobile, servono a rimettere separatamente ciascuno dei quadranti principali ad una cifra quale si voglia. Ognuno di questi bottoncini ha comune col rispettivo quadrante Y l'asse di rotazione. Affinchè poi, manovrando gli stessi bottoncini, il quadrante concepisca un moto intermittente, ed ogni sua cifra s'arresti un istante sotto la relativa finestrella C , il contorno del quadrante offre la forma ondulata ed incontra, per così dire, allo scatto di ciascuna cifra un leggiero ostacolo al suo movimento per l'opera (figura 2) di una molla γ la quale colla sua estremità libera foggjata ad arpione penetra nei vani del contorno medesimo.

c (figura 1) bottoncini consimili ed analogamente disposti ai precedenti, che del pari s'impiegano per rimettere i quadranti delle finestrelle inferiori P allo zero, od a qualsiasi altra cifra. Venne già spiegato come, per via di bottoni speciali H ed I , tanto i quadranti principali Y , quanto questi X possono tutti assieme e più prontamente condursi allo zero (figure 1 e 3).

d ed e (figura 1) piccoli fori praticati nella piastra mobile fra le finestrelle superiori ed inferiori, nei quali s'infigge un piccolo spillo d'avorio allo scopo di separare nei numeri inseriti nelle due serie di finestrelle le cifre decimali da quelle intere.

o piccole ruote dentate cilindriche montate solidariamente sugli assi Q ed R' , S' , le quali hanno per ufficio di produrre il movimento di questi assi allorchè la macchina deve operare dei riporti o ritenute da uno all'altro dei quadranti Y . Ecco in quale guisa ciò avviene. Si ponga che uno di questi quadranti sia in procinto di passare dalla cifra 9 a 0, in altri termini che debbasi riportare 1 al quadrante successivo a sinistra, cioè farlo avanzare di un dente o cifra indipendentemente dal moto impressogli per opera del rispettivo cilindro P . In tal frattempo è dunque necessario primieramente che questo cilindro lasci immobile il rocchetto n , e l'asse di rotazione Q del nuovo quadrante possa invece ricevere il moto dall'altro rocchetto o . Già è noto che il cilindro P per la mezza circonferenza, lungo la quale non trovasi armato di denti, girerà a vuoto, non imprimendo appunto per sua parte alcun moto al rispettivo rocchetto n ed asse Q . Gli è mentre il cilindro P opera a vuoto che il suo quadrante Y , se sta per passare dalla cifra 9 a 0 sotto la relativa finestrella, viene col dente ϵ ad incontrare il nottolino z (figure 2 e 3) mantenuto al suo luogo attuale per l'azione di una molla w . Sforzata così questa molla, l'asticciuola orizzontale $g g$ corrispondente rimane spostata parallelamente a sè medesima e verso i ci-

lindri P , facendo imboccare il bocciuolo o dito t colla ruota dentata o dell'asse Q , ovvero del quadrante Y , successivi. Pertanto la ruota o e questo quadrante restano avanzati di un dente o d'una cifra, operando la voluta ritenuta, ossia registrando una diecina di giri del quadrante precedente. Il manicotto congiunto all'asticciuola $q q$ mercè d'apposito braccio, scorrevole in uno al dito t lungo l'asse del vicino cilindro P a destra, è verso la cartella intermedia $K K'$ foggiate a guisa di superficie elicoidale r , così che, appena quando l'asse Q torna a ricevere il moto dal relativo cilindro P , essendo dalla molla w spinto il manicotto contro il dente p , tosto il manicotto stesso col dito t , e l'asticciuola $q q$ col nottolino z fanno ritorno alle loro posizioni di prima.

s ed u (figura 2) ruote dentate a stella e bocciuoli, montati quelle solidariamente sugli assi Q, R', S' e questi sugli assi dei cilindri P e sugli assi R, S , lungo i quali gli stessi bocciuoli sono scorrevoli unitamente alle dita t . Allorchè questi ultimi vengono spostati in modo da imboccare nei vani delle ruote dentate o , i bocciuoli u si portano dirimpetto alle ruote s agevolando la rotazione degli assi Q, R', S' necessaria per operare i riporti dall'uno all'altro dei quadranti Y , e contribuendo insieme ad evitare ogni deviazione delle asticciuole $q q$ durante il loro spostamento.

v tacche (figura 2) scolpite nella cartella intermedia $K' K'$ in numero di nove, nelle quali s'incestra il dente Δ , di cui è munito inferiormente la piastra AA (figure 2 e 3), affine di arrestare questa piastra in determinati punti dal suo scorrimento longitudinale. Mercè queste tacche ed il dente Δ la piastra stessa AA può in modo sicuro collocarsi longitudinalmente in nove diverse posizioni, per ognuna delle quali dieci dei quadranti principali Y fanno presa cogli assi più volte menzionati Q, R' ed S' ed uno dei quadranti X forma incastro colla ruota dentata ω .

$x x$ ed $x' x'$ guide della piastra UU del commutatore.

y, y copiglie che collegano la stessa piastra coll'asse u appartenente pure al commutatore, e del quale si è fatta parola più sopra.

π, ζ assi orizzontali di rotazione, λ, σ, θ ruote dentate cilindriche e ξ dito solidario coll'asse del primo cilindro P di destra, per mezzo dei quali il movimento della manovella motrice viene trasmesso al quadrante X che fa incastro colla ruota dentata ω . Ad ogni giro della manovella motrice, il cilindro or ora nominato P compie una rivoluzione: con che il dito ξ costringe successivamente le ruote dentate $\sigma, \theta, \lambda, \omega$, epperò l'anzidetto quadrante X ad avanzare di un dente, e trovasi registrato nella finestrella sovrapposta a questo quadrante il giro dato dalla manovella.



CALCOLO DELLE TAVOLE DI MORTALITÀ

PER MEZZO DEI RISULTATI DELLA STATISTICA DELLA POPOLAZIONE.

Memoria pubblicata dall'ufficio federale Svizzero di statistica.

(Dal *Journal de la Société Suisse de Statistique* — Berne, 1880.) (*)

Le tavole di mortalità sono tra gli studi più importanti e più difficili della statistica del movimento della popolazione; si possono anzi considerare come scopo finale di tutte le ricerche sul movimento della popolazione; come scriveva fin dal 1854 il dottor Hermann, direttore dell'ufficio di statistica della Baviera, nella prefazione ad una delle sue pubblicazioni cui era annessa una tavola di mortalità.

Questo studio ha ora acquistato un'importanza straordinaria per l'estensione raggiunta dalle istituzioni di assicurazioni, e per il crescente interesse loro accordato dalle nostre popolazioni. Noi potremo sperare di ottenere un'assicurazione sulla vita ad un tasso nè troppo elevato, nè troppo basso e tale da mettere la solvibilità della compagnia in pericolo, soltanto quando si siano calcolate tavole di mortalità in rapporto colle nostre condizioni d'esistenza. Anche la statistica della popolazione svizzera ha per scopo di stabilire una tavola di mortalità basata sulle esperienze fatte nel nostro paese. Vi furono già parecchi tentativi in questo senso, ma con materiali statistici insufficienti; e metodi difettosi.

Gli anni avvenire ci forniranno i dati necessari per costruire una tavola della mortalità svizzera che risponda alle esigenze della scienza, se le autorità ed il pubblico si uniscono a far scomparire i difetti inerenti alla nostra statistica dello stato civile, e vegliando particolarmente a che si proceda in modo corretto e razionale nel censimento federale del mese di dicembre 1880.

È necessario che il censimento corrisponda alla nostra aspettativa

(*) L'autore di questa memoria avendo riassunto con molta chiarezza e precisione i varii metodi di calcolo della mortalità, crediamo fare cosa grata agli studiosi pubblicandone in questa raccolta la versione italiana.

quanto allo scopo di cui parliamo, se non si voglia, che l'effettuarsi delle nostre speranze sia ritardato ancora di 10 anni. Insistiamo perciò fin da questo momento sulla importante parte, per la quale il censimento avrà a contribuire al compimento del nostro assunto. Ci sforzeremo quindi a dimostrare nel modo più intelligibile i principali risultati delle ricerche fatte fin qui.

Noi prima mostreremo l'insufficienza dei metodi impiegati per stabilire una tavola di mortalità senza il soccorso di un censimento e esamineremo quali indicazioni il censimento ci deve fornire. Consideriamo come indiscutibile, che calcoli fondati sui risultati di popolazioni o territori ristretti, per quanto possano essere preziosi sotto altri rapporti, non possono più costituire la nostra sola base in questa materia, sia che si tratti dei calcoli stabiliti dalle compagnie d'assicurazione e basati sulle esperienze fatte sulle classi dei loro assicurati, scelte, ma troppo poco numerose per le età estreme specialmente; sia ancora che si tratti di calcoli che riposino sui risultati dei censimenti e registri mortuari di certe grandi città.

I metodi sulle norme dei quali si impiegarono i risultati della statistica della popolazione per il calcolo delle tavole di mortalità si suddividono in tre principali gruppi:

- 1° Calcolo per mezzo delle liste annuali dei morti (1);
- 2° Calcolo colle liste delle nascite e delle morti combinate;
- 3° Calcolo coll'aiuto della combinazione delle liste mortuarie coi risultati di un censimento.

I.

Calcolo a mezzo delle liste dei morti.

Se si distribuiscono secondo l'età i morti dati da un'intera popolazione e si calcoli per ciascun anno di età la quota parte su 1000 morti totali, si troverà una grande analogia tra i risultati corrispondenti a diversi anni; ed anche quando in date epoche le epidemie o altre influenze climateriche abbiano fatto maggiore strage, sia tra i giovani, sia tra i vecchi, sia nelle età intermedie, si potrà sempre far scomparire queste discordanze riunendo i risultati di parecchi anni, cosicchè la mortalità di un paese può essere espressa in cifre abbastanza costanti. Pare quindi naturale, che quando si sieno addizionati i morti

(1) I lettori sanno che secondo la dizione proposta (crediamo) primamente dal dottor A. BERTILLOX, si chiamano *liste mortuarie* o *dei morti* le tavole dei morti in un anno, classificati per età quali risultano dai registri dello stato civile. (Nota del T.)

di un paese per 5, 10, 20 anni o più, e se ne sia ripartito il totale secondo l'età dei morti, si concluda che le cifre ottenute rappresentano il quoziente di mortalità della popolazione, e che l'età dei morti di un anno indichi la sorte dei fanciulli nati in quello stesso anno.

È su questo principio che si fonda la tavola di mortalità di Süssmilch.

Tavola I.

Anni	Numero dei morti	Sopravviventi su 1000 nati	Totale dei viventi dalla nascita ad un anno qualunque di età (*)	Numero dei viventi per ogni morto coetaneo	Anni	Numero dei morti	Sopravviventi su 1000 nati	Totale dei viventi dalla nascita ad un anno qualunque di età	Numero dei viventi per ogni morto coetaneo
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0 a 1	250	1000	1,000	4	19	4	499	11,046	125
1 a 2	89	750	1,750	8	20	4	495	11,541	124
3	43	661	2,411	15	21	5	491	12,032	98
4	25	618	3,029	25	22	5	486	12,518	97
5	14	593	3,622	42	23	5	481	12,999	96
6	12	579	4,201	48	24	5	476	13,475	95
7	11	567	4,768	51	25	5	471	13,946	94
8	9	556	5,324	62	26	5	466	14,412	93
9	8	547	5,871	68	27	5	461	14,873	92
10	7	539	6,410	77	28	5	456	15,329	91
11	5	532	6,942	106	29	6	451	15,780	75
12	4	527	7,469	132	30	6	445	16,225	74
13	4	523	7,992	131	31	6	439	16,664	73
14	4	519	8,511	130	32	6	433	17,097	72
15	4	515	9,026	129	33	6	427	17,524	71
16	4	511	9,537	128	34	6	421	17,945	70
17	4	507	10,044	127	35	6	415	18,360	69
18	4	503	10,547	126	36	7	409	18,769	58

(*) Se il numero delle nascite è costantemente eguale a quello delle morti, come per questo metodo si suppone, la popolazione è sempre composta di:

1000 individui di anni 0 a 1
 750 id. id. 1 » 2
 661 id. id. 2 » 3
 618 id. id. 3 » 4 ecc.,

e questo quadro serve da tavola di censimento; noi abbiamo 1000 individui al disotto d'un anno, 1750 al disotto di 2 anni, 2411 al disotto di 3 anni.... e 28,988 in tutto.

Se si sommano al contrario le morti (col. 2) cominciando dalla fine, cioè dal 96° anno, si ottiene, per ogni anno a cui ci arrestiamo, la cifra dei viventi di quell'anno d'età; così per 0 anni la cifra di 1000 (sempre supponendo che dopo un secolo la cifra delle nascite non siasi mai aumentata, ma sia rimasta sempre uguale alla cifra delle morti).

Segue Tavola I.

Anni	Numero dei morti	Sopravvivenuti su 1000 nati	Totale dei viventi dalla nascita ad un anno qualunque di età	Numero dei viventi per ogni morto coetaneo	Anni	Numero dei morti	Sopravvivenuti su 1000 nati	Totale dei viventi dalla nascita ad un anno qualunque di età	Numero dei viventi per ogni morto coetaneo
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
37	7	402	19,171	57	69	10	132	27,894	13
38	7	395	19,566	56	70	10	122	28,016	12
39	7	388	19,954	55	71	9	112	28,128	12
40	7	381	20,335	54	72	9	103	28,231	11
41	7	374	20,709	53	73	9	94	28,325	10
42	7	367	21,076	52	74	8	85	28,410	10
43	7	360	21,436	51	75	8	77	28,487	9
44	7	353	21,789	50	76	7	69	28,556	10
45	7	346	22,135	49	77	7	62	28,618	9
46	7	339	22,474	48	78	6	55	28,673	9
47	8	332	22,806	41	79	6	49	28,722	8
48	8	324	23,130	40	80	6	43	28,765	7
49	8	316	23,446	39	81	5	37	28,802	7
50	8	308	23,754	38	82	4	32	28,834	8
51	9	300	24,054	33	83	4	28	28,862	7
52	9	291	24,345	32	84	4	24	28,886	6
53	9	282	24,627	31	85	3	20	28,906	7
54	9	273	24,900	30	86	3	17	28,923	6
55	9	264	25,164	29	87	2	14	28,937	7
56	9	255	25,419	28	88	2	12	28,949	6
57	9	246	25,665	27	89	2	10	28,959	5
58	9	237	25,902	26	90	2	8	28,967	4
59	9	228	26,130	25	91	1	6	28,973	6
60	9	219	26,349	24	92	1	5	28,978	5
61	9	210	26,559	23	93	1	4	28,982	4
62	9	201	26,760	22	94	1	3	28,985	3
63	10	192	26,952	19	95	1	2	28,987	2
64	10	182	27,134	18	96	1	1	28,988	1
65	10	172	27,306	17	97	0
66	10	162	27,468	16	98
67	10	152	27,620	15	99
68	10	142	27,762	14					

Questo procedimento molto plausibile è conosciuto sotto il nome di metodo di Halley dal medico ed astronomo inglese Halley che lo ha seguito per calcolare una tavola di mortalità pubblicata nel 1693 e basata sui risultati delle liste mortuarie della città di Breslavia.

Molte altre tavole di mortalità (quelle di Tommaso Simpson, Price, Duvillard, ecc.) furono calcolate su questo metodo e furono usate dalle compagnie di assicurazione, ed abbiamo anche al presente trovato questo metodo usato nei calcoli da uomini della scienza.

Ma un tal metodo non è esatto che quando si ammetta che per ciascun anno il numero dei nati sia esattamente uguale a quello dei morti, ipotesi che non si realizza che assai raramente per non dire mai. Basti citare i seguenti numeri che costituiscono i nostri tre ultimi risultati annuali (1) e che da soli bastano a far cadere tutto il metodo.

Tavola II.

ANNI	Nati	Morti	Morti all'età di	
			0 a 1 anno	1 a 2 anni
1876	90,786	66,819	17,899	2,485
1877	89,214	65,353	17,070	3,144
1878	87,833	65,311	16,000	2,901
<i>Totale</i>	267,863	197,483	51,769	8,530

o, per 1000:

1,356	1,000	262.1	43.2
1,000	737	193.3	31.9

Cioè su 1000 morti se ne hanno

262 da 0 a 1 anno e

43 da 1 a 2 anni

mentre che se paragoniamo le morti colle nascite dello stesso periodo noi su 1000 nati troviamo soltanto

193 morti da 0 a 1 anno

32 morti da 1 a 2 anni.

Ma se noi teniam dietro al successivo estinguersi dei nati nel

(1) *Mouvement de la Population de la Suisse pendant l'année 1876. Id. Id. 1877. Id. Id. 1878.* Publiés par le Bureau de Statistique du Département Fédéral de de l'Intérieur. Berne.

1876, 1877 e 1878 noi otterremo secondo le tavole XI e XXI delle pubblicazioni di questi anni (1), i numeri seguenti:

Tavola III.

ANNI	Fanciulli nati-vivi	Di cui morti all'età di			
		0 a 1 anno		1 a 2 anni	
		numero assoluto	per 1000 nati	numero assoluto	per 1000 nati
1876	90,786	18,451	203.3	3,032	33.4
1877	89,244	16,546	185.4
1878	87,833

I nati del 1877 e morti all'età da 1 a 2 anni come i nati del 1878 e morti all'età da 0 ad 1 anno figurano nei registri mortuari del 1878 e 1879 ed i nati del 1878 e morti all'età da 1 a 2 anni debbono essere registrati nel 1879, 1880; si sono quindi, non essendo conosciute le liste dei morti negli anni 1879 e 1880, lasciate in bianco le rispettive rubriche della piccola tavola. Ma bastano le cifre da noi portate a convincerci che si deve ottenere un risultato ben differente, esprimendo il numero dei fanciulli morti nel loro primo anno di vita in funzione delle 190,000 nascite dell'anno da cui provengono realmente, anzichè in funzione dei 65,000 morti dello stesso anno, coi quali essi non hanno alcun rapporto di causalità.

Ma essendo dimostrato dalle cifre che su 1000 nati in Svizzera si constata nel primo anno 200 morti soltanto invece di 260 e durante il secondo da 30 a 35 invece di 60, ne segue che questi 1000 individui dovendo tutti necessariamente estinguersi, le classi più elevate sono affette da una più grande mortalità di quella che è ad esse attribuita dal metodo di Halley. Diffatti le tavole di mortalità costruite su questo antico metodo ammettono generalmente un ordine di estinzione troppo rapido, e le compagnie d'assicurazione che calcolassero le loro tariffe dei premi su di esse, esigerebbero per conseguenza dai contraenti in caso di morte dei premi molto più alti di quello che se esse avessero avuto conoscenza della mortalità reale, per contro farebbero ai contraenti di rendite vitalizie condizioni troppo favorevoli.

Come noi lo abbiamo già detto e come Süssmilch stesso riconosce, non si può identificare la durata della vita dei morti di un anno con quella dei nati dello stesso anno che nel caso in cui la popolazione

(1) V. nota precedente.

sia stazionaria, cioè quando il numero dei nati è costantemente uguale a quello dei morti.

Ora noi sappiamo che la popolazione della Svizzera non è stazionaria, ma crescente. Essa nel 1770 non era di 2,669,000 come nel 1870, ma probabilmente, arrivava solo alla metà di questa cifra e non contava che la metà delle nascite. Se la popolazione della Svizzera fosse stata sempre durante l'ultimo secolo costante ed uguale a quella presente, noi otterremmo per i morti d'uno stesso anno il doppio dei morti all'età 95-100 anni, 1 e 9/10 all'età 85-95, 1 e 8/10 all'età 75-85, ecc. Mentre Süssmilch nella sua tavola di mortalità ripartisce 1000 morti come segue:

0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 anni
250, 89, 43, 25, 14, 12, 11

se avesse tenuto conto dell'accrescimento della popolazione avrebbe ottenuto:

250, 90, 44, 26, 15, 13, 12

cioè invece di 1000 morti, se ne avrebbero 1250, di cui i 250 del primo anno non formerebbero più che il quinto (200 per mille) invece del quarto (250 per mille) e così di seguito.

Se consideriamo i morti di un paese (i morti di ciascun anno di età enunciati al tanto per mille del totale dei morti) come l'espressione dell'estinguersi successivo di 1000 nati, dobbiamo necessariamente ammettere che le morti alle differenti classi di età provengono da un egual numero di nati; e se questo numero in passato era più piccolo di quello presente, conviene nella stessa proporzione colla quale è cresciuto questo numero, aumentare la cifra dei morti che ne deriva, per ottenere quantità comparabili.

Si è fatto questo tentativo partendo dall'ipotesi di un accrescimento assolutamente regolare (con progressione aritmetica o geometrica) della popolazione, si sono da prima corretti i risultati delle liste mortuarie, si è cioè portato il numero dei morti in ciascun anno alla cifra che si raggiungerebbe quando il numero delle nascite fosse sempre stato costante e con queste cifre corrette si è costruita una nuova tavola di mortalità secondo il metodo di Halley. Ma questo procedimento non è giusto che nell'ipotesi che l'accrescimento della popolazione sia regolare. E il numero delle nascite essendo lontano dal crescere regolarmente, essendo la progressione ora rapida ora lenta, e talvolta cangiandosi anche in decrescente, consiglio migliore è di abbandonare questo sistema di correzione più o meno arbitrario per il metodo già dal Laplace indicato per il più semplice, quello cioè di osservare l'ordine di sopravvivenza dei nati per mezzo dei registri dei nati e dei morti.

II.

**Calcolo per mezzo delle liste delle nascite
e delle morti combinate.**

Gli estratti delle liste dei nati si fanno per *anno millesimale* (distinguendo i nati-vivi dai nati-morti, e ciascuna categoria in nati maschi o femmine ed eventualmente anche in legittimi ed illegittimi). Altra volta qualche Stato le pubblicava per anno amministrativo, ed allo stesso modo procedendo per le liste dei morti, non si deve tale differenza prendere in considerazione, non portando divario alcuno. È per contro di una grande importanza il modo con cui sono ripartiti i morti. È evidente che non si rileveranno che i morti in uno stesso anno e che i differenti gruppi di età e di nati non comprenderanno che un solo anno; ma si distinguerà ancora (fatta astrazione dalle ulteriori ripartizioni per mesi) le tre seguenti forme di classificazione.

A.

Ripartizione dei morti per anni di età.

Lista mortuaria per la Baviera.

SESSO MASCOLINO.

Tavola IV.

ANNI	Nascite di maschi	Di cui sono morti all'età di anni				
		0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5
1834	80,389	26,122	2,806	1,497	855	649
1835	79,348	26,662	3,449	1,390	870	701
1836	76,738	26,667	3,001	1,263	938	735
1837	76,525	26,183	2,673	1,364	998	765
1838	79,236	26,320	3,027	1,454	1,011	765
<i>Totale . . .</i>	392,236	132,254	15,046	6,968	4,672	3,618
	1,000	337.2	38.4	17.3	11.9	9.2

Nella tavola del dottor Von Hermann, dalla quale noi togliamo queste cifre, si commette l'errore abbastanza ordinario di considerare

come provenienti dagli 80,389 nati del 1834 tutti i morti durante lo stesso anno all'età di 0 ad 1 anno, durante il 1835 all'età di 1 a 2 anni, nel 1836 all'età di 2 a 3 anni, e così via via. Ciò che è falso: un quarto circa dei morti di 0-1 anno nel 1834 proviene dai nati nel 1833, il quarto dei morti alla stessa età nel 1835 proviene dai nati nel 1834, ecc. Così dei morti all'età da 1 a 2 anni $\frac{4}{9}$ provengono da un anno anteriore a quello calcolato; dei morti delle età seguenti la metà circa, la frazione cresce o diminuisce secondo il numero dei vivi dell'anno precedente.

Ma facendo così figurare nel rilevamento dei morti di un anno un certo numero dei morti dell'anno precedente, mentre poi se ne esclude un certo numero che vi dovrebbe esser compreso si commettono errori che non si compensano.

Così ad esempio noi vediamo nella tavola citata, che i nati maschi in Baviera durante il 1835 sono 79,348 mentre che nel 1836 non sono che 76,738 cioè 2,610 di meno, di cui 887 circa (34 per cento) prima di un anno di età, di modo che l'anno 1836 ha ricevuto dal 1835 un contingente di morti che supera di $222 \left(\frac{887}{4} \right)$ quello che il 1836 ha fornito al 1837. Per l'anno 1838 si presenta il contrario, in questo si hanno 2711 nati maschi più che nel 1837, di questi 922 circa sono morti prima dell'età di un anno, per cui il 1838 ha fornito al 1839 un numero di $\frac{922}{4} = 230$ morti aventi meno di un anno di età in più di quello che l'anno 1838 non ne abbia ricevuti dal 1837.

A far scomparire completamente queste ineguaglianze non basta di riunire le nascite da una parte, e dall'altra le morti di una classe determinata di età che ebbero luogo durante un periodo di più anni, e calcolare quindi per mezzo delle due somme ottenute la mortalità di questa classe di età durante l'intero periodo come si fece nel nostro esempio.

Giacchè se la popolazione durante questo periodo è cresciuta, il numero dei morti proveniente dal periodo precedente e che sono per errore a carico del periodo attuale sarà inferiore al numero dei morti dei quali questo è diminuito anche a torto, e la mortalità calcolata sarà di tanto inferiore al vero.

Questo calcolo diverrà anche più scorretto quando gli estratti delle liste mortuarie non portino che classi di età che comprendano più anni invece di un solo (0-5, 5-10 . . .) giacchè se ora si volesse stabilire il rapporto degli 80,389 nati nel 1834 al numero delle morti da 0-5 anni che avvennero durante lo stesso anno il risultato sarebbe evidentemente falso, provenendo i più anziani morti di questa classe di età,

dai 72,730 nati maschi del 1829. A correggere questo risultato bisognerebbe prima stabilire il numero dei morti di 0-5 anni che si avrebbero, se a partire dal 1829 il numero dei nati fosse stato di 80,389 ogni anno.

B.

Essendo il numero dei nati stabilito per anno millesimale non si potrà esattamente calcolare di quanto essi superino i morti che ripartendo questi ultimi di ciascun anno secondo il millesimo della loro nascita.

Tale fu il sistema seguito dal dottor Engel che elaborò una tavola di mortalità per gli individui nati e morti a Berlino; noi presenteremo qui a mo' d'esempio le cifre di alcuni anni.

Ordine di sopravvivenza osservato a Berlino per le persone del sesso mascolino.

Tavola V.

		ANNI				
		0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5
1843	Nascite	5,719
	Morti	1,358
1844	Nascite e sopravvivenuti	5,899	4,361
	Morti	1,413	458
1845	Nascite e sopravvivenuti	6,199	4,486	3,903
	Morti	1,362	373	147
1846	Nascite e sopravvivenuti	6,492	4,837	4,113	3,756
	Morti	1,426	423	239	107
1847	Nascite e sopravvivenuti	6,348	5,066	4,414	3,874	3,649
	Morti	1,467	486	206	110	81
1848	Sopravvivenuti	4,881	4,580	4,208	3,764
	Morti	580	246	159	132
1849	Sopravvivenuti	4,301	4,331	4,049
	Morti	303	206	142
1850	Sopravvivenuti	3,998	4,125
	Morti	144	91
1851	Sopravvivenuti	3,854
	Morti	110

Rapporto dei sopravvivenuti a 10,000 nati.

Tavola VI.

	ANNI				
	0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5
Nati nel 1843.	5,719	4,361	3,903	3,756	3,649
	10,000	7,626	6,825	6,468	6,380
Id. » 1844.	5,899	4,486	4,113	3,874	3,764
	10,000	7,605	6,972	6,567	6,381
Id. » 1845.	6,199	4,837	4,414	4,208	4,049
	10,000	7,803	7,120	6,788	6,532
Id. » 1846.	6,492	5,066	4,580	4,331	4,125
	10,000	7,803	7,055	6,671	6,354
Id. » 1847.	6,318	4,881	4,301	3,998	3,854
	10,000	7,689	6,775	6,298	6,071

e così di seguito. Quando si conoscono le cifre dei sopravvivenuti per due anni consecutivi, dalla loro sottrazione si ottiene il numero dei morti in questi due anni.

Disponendo così in linea diagonale il numero dei nati e dei sopravvivenuti, invece di disporli in linea orizzontale e ponendo al disotto le cifre dei morti che debbono dedursi dai primi, la tavola ci offre il vantaggio di darci sulla stessa linea per un anno millesimale i sopravvivenuti ed i morti appartenenti alle differenti classi di età consecutive.

Però la tavola del dottor Engel dovrebbe dire :

durante l'anno di nascita invece che da 0 a 1 anno
 » il 2° anno » 1 a 2 anni
 » il 3° anno » 2 a 3 anni ecc.

Difatti le intestazioni da 0 a 1 anno, da 1 a 2, ecc., non sono esatte. I decessi dei fanciulli nati nel 1843 e morti all'età 0-1 anno cadono in parte nell'anno 1843 e parte nel 1844 (per esempio un bambino nato il 1° luglio 1843 e che arrivi all'età di 9 mesi muore il primo aprile 1844). Tra i 458 nati nel 1843 e morti nel 1844 si trovano quelli nati il 31 dicembre 1843 e morti il 1° gennaio 1844, cioè ad un giorno di età, ed altri che nati al 1° gennaio 1843 e morti il 31 dicembre 1844 cioè all'età di 1 anno e 364 giorni, hanno quindi tutti da 0 a 2 anni di età, così i fanciulli nati nel 1843 e morti nel 1845 hanno da 1 a 3 anni, quelli morti nel 1846 da 2 a 4 anni e così di seguito.

I morti dello stesso anno sono dunque divisi e le loro divisioni riunite in gruppi di un'età di

1 a 3 anni	2 anni	in media	
2 a 4 »	3	»	
3 a 5 »	4	»	ecc.

Ammettendo che queste medie sieno esatte, noi otterremo la mortalità da 1 a 2 anni, da 2 a 3, da 3 a 4... da 20 a 21, da 21 a 22... soltanto coll' aiuto di una interpolazione e non direttamente. Quello che noi otteniamo direttamente si è il numero dei sopravvivenuti proveniente da ciascuno degli anni precedenti ed il numero dei morti che da essi provengono, ciò che avevamo fino ad ora inutilmente cercato.

Questa classificazione dei morti secondo il millesimo della loro nascita e la possibilità che ne risulta di calcolare i sopravvivenuti provenienti da ciascun anno costituiscono una rimarchevole superiorità della statistica prussiana. Non si potrebbe pur conservando questo miglioramento, eliminare l'inconveniente di avere in ciascuna categoria dei morti appartenenti a due consecutivi anni di età quantunque provenienti dallo stesso anno di nati? Non sarebbe in altri termini, possibile applicare al metodo del De Engel i miglioramenti del metodo del dottor Von Hermann?

C.

Becker e Knapp proposero *la classificazione dei morti per anno di età e per anno di nascita allo stesso tempo* cioè, poichè i morti di un età (di 0-1 di 1-2 anni, ecc.) provengono sempre da due anni di nascite consecutive, proposero di ripartire i morti secondo questi due anni di nascita.

Noi così procediamo dall'anno 1876 (vedi tavola II) secondo l'esempio di un certo numero di Stati, (1) e questo ci permette di seguire non solo per anno millesimale, ma anche per anno di età l'ordine di sopravvivenza degli individui nati in uno stesso anno.

(1) In Italia soltanto a cominciare dal 1879 si hanno i morti classificati per anno di età, d'anno in anno, mentre fino a tutto il 1878 si davano per gruppi di cinque in cinque anni. Speriamo di poter in avvenire distinguere i morti, non solamente per anni di età, ma anche secondo l'anno di nascita. (Nota del T.)

Morti (senza i nati-morti) nel 1878, per sesso e per anno di età e di nascita.

Tavola VII.

Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			
		Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita			Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita	
0	1878	7116	5612	12728	14	1861	51	52	103	244
	1877	2162	1910	4072		1863	62	79	141	
1	1877	771	774	1545	15	1863	45	60	105	216
	1876	666	690	1356		1862	49	62	111	
2	1876	359	367	726	16	1862	61	79	140	266
	1875	433	394	827		1861	56	70	126	
3	1875	256	224	480	17	1861	65	72	137	283
	1874	271	293	564		1860	72	74	146	
4	1874	187	200	387	18	1860	75	76	151	300
	1873	237	225	462		1859	79	70	149	
5	1873	129	140	269	19	1859	80	84	164	330
	1872	156	168	324		1858	86	80	166	
6	1872	113	106	219	20	1858	81	78	159	315
	1871	127	119	246		1857	73	83	156	
7	1871	100	88	188	21	1857	92	70	162	329
	1870	101	105	206		1856	78	89	167	
8	1870	78	81	159	22	1856	81	71	152	311
	1869	88	103	191		1855	82	77	159	
9	1869	57	63	120	23	1855	70	90	160	354
	1868	57	70	127		1854	107	87	194	
10	1868	55	60	115	24	1854	73	82	155	322
	1867	64	72	136		1853	78	89	167	
11	1867	49	52	101	25	1853	84	93	177	359
	1866	46	65	111		1852	90	92	182	
12	1866	45	64	109	26	1852	82	90	172	318
	1865	60	64	124		1851	78	68	146	
13	1865	43	51	94	27	1851	88	83	171	361
	1864	49	63	112		1850	102	88	190	

Morti (senza i nati-morti) nel 1878, per sesso e per anno di età e di nascita.

Segue *Tabola VII.*

Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti				
		Maschi	Femmine	Totale			Maschi	Femmine	Totale		
				con distinzione dell'anno di nascita					senza distinzione dell'anno di nascita	con distinzione dell'anno di nascita	senza distinzione dell'anno di nascita
28.	1850	99	106	205	42	1836	111	97	208	435	
	1849	101	96	197		1835	130	97	227		
29.	1849	78	91	169	360	43	1835	122	88	210	416
	1848	96	95	191			1834	115	91	206	
30.	1848	88	76	164	326	44	1834	97	103	200	402
	1847	78	84	162			1833	111	91	202	
31.	1847	77	89	166	369	45	1833	121	94	215	442
	1846	95	108	203			1832	121	106	227	
32.	1846	95	86	181	402	46	1832	103	89	192	403
	1845	109	112	221			1831	126	85	211	
33.	1845	110	99	209	431	47	1831	117	95	212	436
	1844	113	109	222			1830	139	85	224	
34.	1844	95	122	217	422	48	1830	114	113	227	495
	1843	101	104	205			1829	149	119	268	
35.	1843	109	85	194	410	49	1829	120	106	226	483
	1842	98	118	216			1828	147	110	257	
36.	1842	100	119	219	440	50	1828	162	113	275	559
	1841	109	112	221			1827	159	125	284	
37.	1841	100	98	198	408	51	1827	144	118	262	602
	1840	110	100	210			1826	192	143	340	
38.	1840	100	95	195	403	52	1826	123	125	248	518
	1839	103	105	208			1825	137	133	270	
39.	1839	106	119	225	430	53	1825	173	110	283	599
	1838	90	115	205			1824	161	155	316	
40.	1838	104	82	186	384	54	1824	157	147	304	631
	1837	106	92	198			1823	152	175	327	
41.	1837	106	108	214	429	55	1823	162	162	324	655
	1836	113	102	215			1822	175	156	331	

Morti (senza i nati-morti) nel 1878, per sesso e per anno di età e di nascita.

Segue Tavola VII.

Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti				Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			
		Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita				Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita	
56.	1822	159	143	302	623	70	1808	231	265	496	996
	1821	169	152	321			1807	251	249	500	
57.	1821	192	150	342	687	71	1807	222	246	468	878
	1820	192	153	345			1806	189	221	410	
58.	1820	175	156	331	715	72	1806	200	234	434	924
	1819	210	174	384			1805	229	261	490	
59.	1819	182	185	367	680	73	1805	226	214	440	873
	1818	166	147	313			1804	200	233	433	
60.	1818	157	137	294	585	74	1804	248	233	481	946
	1817	137	154	291			1803	232	233	465	
61.	1817	160	159	319	671	75	1803	203	211	414	859
	1816	182	170	352			1802	223	222	445	
62.	1816	199	176	375	749	76	1802	212	222	434	803
	1815	199	175	374			1801	170	199	369	
63.	1815	191	204	395	812	77	1801	145	157	302	639
	1814	228	189	417			1800	151	186	337	
64.	1814	221	215	436	867	78	1800	162	145	307	656
	1813	207	224	431			1799	177	172	349	
65.	1813	220	198	418	891	79	1799	141	146	287	560
	1812	219	254	473			1798	141	132	273	
66.	1812	211	252	463	891	80	1798	151	151	302	600
	1811	191	237	428			1797	141	154	298	
67.	1811	206	210	446	864	81	1797	120	122	242	483
	1810	209	209	418			1796	128	113	241	
68.	1810	201	243	444	882	82	1796	97	108	205	367
	1809	210	228	438			1795	80	82	162	
69.	1809	209	207	416	916	83	1795	74	85	159	340
	1808	245	255	500			1794	87	94	181	

Morti (senza i nati-morti) nel 1878, per sesso e per anno di età e di nascita.

Segue *Tavola VII.*

Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			Età compiuta	Anno di nascita	Numero dei morti			
		Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita			Maschi	Femmine	Totale con senza distinzione dell'anno di nascita	
84.	1794	60	59	119	94.	1784	5	3	8	19
	1793	67	61	128		1783	4	7	11	
85.	1793	50	57	107	95.	1783	1	2	3	11
	1792	67	45	112		1782	3	5	8	
86.	1792	38	53	91	96.	1782	3	1	4	7
	1791	49	44	93		1781	2	1	3	
87.	1791	41	43	84	97.	1781	...	1	1	3
	1790	32	39	71		1780	...	2	2	
88.	1790	29	25	54	98.	1780	1
	1789	19	25	44		1779	...	1	1	
89.	1789	16	15	31	99.	1779	1	2	3	7
	1788	27	23	50		1778	...	4	4	
90.	1788	14	15	29	100.	1778
	1787	16	14	30		1777	
91.	1787	13	13	26	Più di 100
	1786	7	10	17		
92.	1786	7	14	21	Età incognita	137	128	...	265	...
	1785	4	6	10		
93.	1785	9	7	16	<i>Totale . . .</i>	33631	31680	...	65311	...
	1784	5	5	10		26	

Riunendo assieme i risultati di diversi anni forniti da questa tavola, noi otterremo le cifre seguenti:

Lista mortuaria svizzera.

Tavola VIII.

NATI-VIVI		Di cui sono morti all'età di anni						
		0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5	5 a 6	
1876 . . .	90,786	a)	13,855	1,676	726	(425)	(290)	(290)
		b)	4,596	1,356	(480)	(340)	(290)	(290)
1877 . . .	89,244	a)	12,474	1,545	(750)	(400)	(285)	(285)
		b)	4,072	(1,350)	(600)	(380)	(285)	(285)
1878 . . .	87,833	a)	12,728	(1,500)	(740)	(400)	(300)	(290)
		b)	(3,900)	(1,300)	(590)	(370)	(280)	(285)
1879 . . .	(86,000)	a)	(12,000)	(1,400)	(710)	(400)	(295)	(285)
		b)	(4,000)	(1,200)	(500)	(365)	(295)	(285)
1880 . . .	(85,000)	a)	(11,800)	(1,450)	(660)	(380)	(295)	(280)
		b)	(4,000)	(1,200)	(530)	(380)	(290)	(285)
Totale . .	438,863		83,425	13,977	6,282	3,840	2,905	2,860
			1,000	100.1	31.8	14.3	8.7	6.6

a) indica il primo anno, b) il secondo anno di morte; le cifre fra parentesi sono cifre fittizie.

I difetti che presentano i metodi *A* e *B* non esistono più in questo e si può tener dietro al successivo spegnersi degli individui nati durante un anno od una serie di anni, quando la popolazione del nostro paese non sia troppo soggetta a considerevoli emigrazioni.

In questo consiste appunto il difetto inerente a questo metodo, come a tutti quelli che vogliono calcolare la mortalità per mezzo della combinazione delle liste dei nati e dei morti. Questa combinazione è turbata dall'emigrazione e dall'immigrazione. Quest'ultima introduce nelle nostre liste di morti, individui che non figurano nelle nostre liste di nati, mentre che l'emigrazione ci toglie i mezzi di constatare l'estinzione di un certo numero di persone che figurano nelle liste dei nati.

Queste perturbazioni sono senza importanza quando le cifre dell'emigrazione e immigrazione sono di poco momento confrontate al totale della popolazione, o quando si compensano, visto che si può ammettere che gli immigrati e gli emigrati appartengano generalmente alle stesse classi di età.

Allo stesso modo supponendo, che l'immigrazione e l'emigrazione, sieno entrambe composte di celibi adulti o di famiglie senza fanciulli di bassa età, di guisa che i primi anni di vita non vi entrino che per poco, si può stabilire per questi primi anni il compenso degli uni cogli altri e fondare il calcolo della mortalità pei primi tre o cinque anni sulla combinazione delle liste dei nati e dei morti. Ma più ci allontaniamo dall'anno della nascita e più la cifra dei superstiti diventa incerta, e sempre più ci allontaniamo dal potere ammettere che tutti i morti provengano e figurino egualmente nelle liste dei nati. E le tavole di mortalità per quei paesi ove si abbia una forte immigrazione o emigrazione calcolate con questo metodo sono completamente inesatte per le classi di età più elevate.

Ma anche quando il calcolo della mortalità non sia perturbato dall'emigrazione o dall'immigrazione, non ci sarebbe possibile di calcolare col solo mezzo delle liste dei nati e dei morti una tavola di mortalità che arrivasse alle età più avanzate, ci mancherebbero a questo i materiali.

La Svezia soltanto possiede liste autentiche di nati e di morti che rimontano a più di un secolo; gli altri Stati non hanno i dati che per alcune diecine d'anni; la Svizzera per soli dieci. Noi dovremmo quindi lasciar trascorrere quasi un secolo prima di poter costruire una tavola di mortalità sulle liste dei nati e dei morti; e costruita che fosse non avrebbe più valore, dovendo una tavola di mortalità indicare la mortalità della generazione presente, più favorevole probabilmente, ma sempre differente da quella che la precederebbe di un secolo.

Fortunatamente non siamo costretti a servirci delle nostre liste di nati per il calcolo della mortalità, passato il periodo dell'infanzia. In ciascun paese civilizzato si fa ogni 10 o 5 anni, o più spesso ancora, il censimento della popolazione, e i risultati vengono pubblicati classificati generalmente per anno di età. Cosicchè al punto, in cui le liste dei nati e dei morti non sono più servibili, si possono sostituire coi risultati dei censimenti che ci danno il numero dei viventi a ciascun anno di età, più esattamente (eccettuati i primi anni pei quali le cifre dei censimenti sono alquanto incerte) di quello che si otterrebbero sottraendo dai nati i morti.

III.

Combinazione delle liste mortuarie coi risultati di un censimento.

Noi non domandiamo più quale sia l'ordine di sopravvivenza anno per anno per un gruppo di 1000; 10,000 o 100,000 individui nati in un anno o in più anni consecutivi. Quando noi ci facciamo ad esaminare la mortalità delle differenti classi di età, noi ci troviamo per ciascun anno di età in presenza di altri individui e dopo di avere stabilita la mortalità per il 6°, il 7°, l'8° ed il 9° anno di età, noi colla combinazione dei risultati costruiamo un ordine di sopravvivenza ideale per gli individui di età diverse e che vivono nello stesso tempo e nelle stesse condizioni climateriche, sociali, ecc.

Ciò ci induce ad una piccola modificazione nel nostro metodo di calcolo. Mentre i metodi di cui abbiamo parlato nel precedente capitolo stabiliscono l'ordine di sopravvivenza deducendo i morti dai viventi della stessa età, noi dovremo ora moltiplicare, di classe in classe di età, il numero dei sopravvissuti d'una stessa età provenienti da uno stesso gruppo di 1000 nati per una frazione che esprima la probabilità di vita per questo anno onde ottenere i viventi dell'anno seguente.

Se, ad esempio, si è osservato che su 920 fanciulli di 0 anni, 730 arrivano ad 1 anno, la probabilità di vita per il 1° anno è di $\frac{730}{920}$; se su 1020 fanciulli di un anno, 1002 arrivano al secondo anno, la probabilità di vita pel 2° anno è di $\frac{1002}{1020}$; se su 840 di 3 anni 830 arrivano al 4° anno, la probabilità è di $\frac{830}{840}$; noi adunque diciamo: la probabilità P di vita per il 0°, 1°, 2°, anno di vita è la seguente:

$$P_0 = \frac{730}{920} = 0.793$$

$$P_1 = \frac{1002}{1020} = 0.982$$

$$P_2 = \frac{830}{840} = 0.988 \text{ ecc.}$$

Perciò quando si voglia calcolare per un gruppo di 1000 nati quelli di essi che arriveranno alle diverse età, otterremo:

a 0 anni	1000	1000
a 1 anno	$1000 \cdot P_0 =$	793
a 2 anni	$1000 \cdot P_0 \cdot P_1 =$	779
a 3 anni	$1000 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 =$	770 ecc.

È vero bensì che qualcuno dei metodi che noi esamineremo in questo capitolo non ci forniranno direttamente la probabilità di vita, ma subito la probabilità di morte per una certa classe o anno di età ($p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$); ma, conoscendo le probabilità di morte per le differenti classi di età consecutive a partire dalle infime età, non si incontra difficoltà a dedurre le corrispondenti probabilità di vita e conseguentemente anche l'ordine di sopravvivenza per 1000 nati, giacchè si ha

$$P_0 + p_0 = 1$$

$$P_1 + p_1 = 1 \text{ ecc.}$$

e

$$P_0 = 1 - p_0; \quad p_0 = 1 - P_0$$

$$P_1 = 1 - p_1; \quad p_1 = 1 - P_1$$

cioè per l'esempio sopracitato

$$p_0 = 0.207$$

$$p_1 = 0.018$$

$$p_2 = 0.012$$

forse i nostri lettori si renderanno più facilmente conto di queste probabilità se, moltiplicandole per 1000, noi diremo

$$p_0 = 207 \text{ per } 1000$$

(su 1000 nati di 0 a 1 anno ne muoiono 207)

$$p_1 = 18 \text{ per } 1000$$

$$p_2 = 12 \text{ per } 1000.$$

Quindi nelle tavole di mortalità, calcolate per mezzo della combinazione delle liste dei morti coi risultati di un censimento, trascuriamo di raffrontare sempre i morti a 1000 nati, e ci limitiamo a dire quanti per 1000 individui di una data età ne morirono durante quell'anno.

Fatte queste osservazioni preliminari passiamo ora ad esame i differenti sistemi sui quali è calcolata la mortalità per mezzo della combinazione dei risultati di un censimento e delle liste dei morti.

Nella più parte degli Stati d'Europa i censimenti hanno luogo durante il mese di dicembre, in molti di essi regolarmente il 31 di quel mese.

Gli individui vengono distribuiti secondo il millesimo della loro nascita, noi otteniamo quindi per mezzo di questi censimenti il numero d'individui appartenenti alle differenti classi di età al principio dell'anno, o per lo meno si può approssimativamente calcolare questo numero coll'aiuto delle liste dei nati e dei morti. (I numeri degli individui aventi anni di vita divisibili per 10 sono un po' esagerati, ed il di più deve essere ripartito sugli anni più prossimi). Tra due censimenti la popolazione, parimenti al 31 dicembre, è calcolata per interpolazione, riportando l'accrescimento di essa sugli anni intermedi, sia proporzionalmente, sia secondo una progressione geometrica. Noi così otteniamo come denominatore della frazione che deve esprimere la probabilità di morte, i sopravvissuti di ciascun anno di nascite, e questo più esattamente, per le classi di età che seguono l'infanzia, di quello che non si ottenga coi metodi accennati al capitolo precedente, giacchè nei risultati dei censimenti si trova inclusa l'influenza che può portare l'emigrazione.

Le liste dei morti sono quali le abbiamo descritte nel secondo capitolo di questo trattato, esse ripartiscono i morti sia per anno di età, sia per anno di nascita, sia simultaneamente per anno di età e di nascita. Ne segue che noi qui troveremo i sistemi citati nel capitolo precedente.

A.

Ripartizione dei morti per anno o per classe di età.

Per motivi di convenienza pratica, la popolazione censita non è iscritta per anno di età, ma per anno di nascita. Noi sappiamo l'età degli individui al 31 dicembre, sia che il censimento abbia luogo in questo stesso giorno sia se si faccia, per esempio: il 1° dicembre aggiungendo ai fanciulli di 0-1 anno i nati nel mese di dicembre, e deducendo dai viventi alle rispettive età i morti durante lo stesso mese. Ciascun individuo nel corso dell'anno ha incontrato il giorno anniversario di sua nascita, ed il numero d'anni da lui vissuto è uguale all'anno del censimento meno l'anno di sua nascita.

Dunque se il 31 dicembre 1870 esistevano 43,000 persone nate nel 1850 esse erano tutte dell'età di 20 a 21 anno. Sarebbe ora giusto il dire, se 300 persone dell'età di 20 a 21 anno sono morte nel 1870 la mortalità di questa età è $\frac{300}{43,000}$ ossia 6,977 per mille? Il procedimento sarebbe analogo a quello del Dr. Von Hermann, che toglie dal numero delle nascite di un anno il numero dei morti nello stesso anno aventi meno di

un anno di età, dal resto sottraei morti di 1 a 2 anni, ecc., come abbiamo detto al capitolo 2, A. È necessario ripetere qui che i morti all'età di 20 a 21 anno che avvennero nel 1870 non sono tutti nati nel 1850, ma per la metà circa nati nel 1849. In fatti i morti all'età di 20 a 21 anni e nati nel 1849 si ripartiscono sul periodo 1° gennaio 1869 al 31 dicembre 1870, allo stesso modo che i morti della stessa età nati nel 1850 sono ripartiti dal 1° gennaio 1870 al 31 dicembre 1871. Calcolando quindi col procedimento sopra indicato noi introdurremmo nel nostro calcolo gli individui nati nel 1849 e morti nel 1870 all'età di 20 a 21 anni, invece di quelli che nati nel 1850 e morti alla stessa età non morirono che nel 1871.

Questa permutazione è solo ammissibile se le due cifre sono eguali, e lo saranno se il numero dei nati è lo stesso nel 1849 come nel 1850, cioè se la popolazione è stazionaria (a queste condizioni sarebbe pure giusto il metodo del Dr. Hermann).

Supponiamo ora che la popolazione sia realmente stazionaria, e che sia quindi permesso di fare la sostituzione sopra accennata, considerare cioè tutti i morti all'età di 20 a 21 anni nel 1870 come nati nel 1850; vi ha ciò non pertanto ancora una obbiezione da fare alla probabilità di morte trovata $\frac{300}{43,000} = \frac{6,977}{1000}$.

È vero che supponendo una popolazione stazionaria il numero dei vivi all'età di 20 a 21 anni è sempre di 43,000 essendo il posto di quelli che muoiono o che passano ad una classe superiore di età tosto occupato da quelli che si avanzano dalla classe inferiore; ma se la classe da 20 a 21 anni si mantiene sempre alla stessa altezza, da che proviene che non ve ne sono 300 meno cioè il numero dei morti di questa classe di età che passano alla classe superiore?

Ciò proviene da questo che, quantunque il censimento ne constati 43,000, il numero di quelli che nello spazio di un anno entrano nel loro ventesimo anno di età non è 43,000 perchè il censimento non trova più tutti quelli che vi sono entrati. Anno per anno, giorno per giorno nuovi individui entrano in questa classe di età mentre altri ne escono, a ciascun censimento noi troviamo in questa classe individui che ne fanno parte da

1 giorno
2 giorni
3 id.
.....
363 id.
364 id.
365 id.

Quindi a ciascun censimento gli individui di questa classe di età hanno in media 20 anni e mezzo, e se si faccia il censimento il 31 dicembre essi sono nati tutti nel 1850.

Perciò i 43,000 individui di 20 a 21 anni, o di 20 $\frac{1}{2}$ in media, di cui il censimento o il calcolo constata l'esistenza al 31 dicembre 1870 hanno già pagato alla morte la metà del loro tributo annuale e propriamente se ne ha $43,000 + 150 = 43,150$ che sono entrati in questa classe di età, ne periranno ancora 150 fino al momento (31 dicembre 1871) in cui tutti gli individui nati nel 1850 avranno oltrepassato il limite superiore di questa classe di età. Di guisa che 42,850 soltanto saranno passati durante l'anno 1871 nella classe seguente, la quale, alla fine del 1871, avrà parimenti già pagata la metà del suo tributo annuale alla morte.

Per convincerci della giustezza di questa argomentazione, basta supporre che tutti i nati nel 1850, invece di essere ripartiti su tutto l'anno, sieno nati tutti il 1° gennaio, quelli tra essi che vivranno ancora il primo gennaio 1870 compiranno in quel giorno il loro ventesimo anno, i vivi nel 1871 al 1° gennaio compiranno il ventunesimo, i 300 casi di morte della classe di età da 20 a 21 anno avranno tutti luogo durante il 1870. In questo caso i nati del 1850 conterebbero al 1° gennaio 1870 43,150 superstiti e 42,850 al 1° gennaio 1871. Dunque se noi non troviamo più che 43,000 individui gli è perchè i nati del 1850 sono distribuiti su tutto l'anno e perchè al censimento (o calcolo) che noi facciamo nel 1870, 31 dicembre, gli individui provenienti dal 1850 hanno l'età media di 20 anni e mezzo. Ma i 300 morti di questa classe di età provengono non pertanto dai 43,150 che sono entrati e la mortalità di

questa classe è in conseguenza $\frac{300}{43,000 + 150} = \frac{6.952}{1000}$.

Se la differenza tra questa cifra e quella da noi precedentemente trovata è poco considerevole, la causa deve essere attribuita alla poca mortalità di questa classe di età. Ma essa diverrà più sensibile quando si calcoli la mortalità della classe di età da 75 a 76 anni. Se il numero dei nati nel 1795 ancora viventi al 1° dicembre 1870 è di 16,000 ed il numero dei morti alla stessa età di 75 a 76 anni nello stesso anno 1870 è di 800, la mortalità di questa classe è di $\frac{800}{16,000} = \frac{50}{1000}$ ma se al

denominatore si aggiunga la metà del numero dei morti si otterrà $\frac{800}{16,400} = \frac{48.78}{1000}$.

È evidente che quest'ultimo metodo fornisce un ordine di estinzione meno rapido, e che i risultati ottenuti applicando il primo metodo di calcolo non sono conformi alla realtà.

Relativamente al nostro primo esempio si è detto che noi possiamo riferire i morti di 20 a 21 anno di età nell'anno 1870 ai viventi della stessa età al 31 dicembre 1870 nel solo caso in cui la popolazione sia stazionaria. Giacchè non vi ha che la metà circa di questi 300 morti che provengano dai nati del 1850, mentre l'altra metà viene dal 1849. Se si ammetta che questi due anni sieno stati ugualmente fecondi di nascite, la permutazione della metà dei morti che ne segue non costituirà un errore. Ma se si fosse da un anno all'altro verificato un accrescimento notevole di nascite, il numero degli individui nati nel 1850 e morti all'età di 20 a 21 anno dovrà anche essere più elevato dei 300, toccare cioè un numero più grande della metà dei morti provenienti dai nati nel 1849 aumentato della metà dei morti provenienti dal 1850. Se noi vogliamo quindi far entrare nel nostro calcolo quelli fra i 300 morti dell'anno 1870 che sono nati nel 1849, dovremo accrescerne il numero nella stessa proporzione che il numero dei nati nel 1850 supera i nati del 1849.

Lo stesso avviene quando, secondo l'antico procedimento, i risultati delle liste dei morti e delle tavole dei censimenti sono dati per classi di età che comprendono più anni. Ammettiamo di conoscere soltanto il numero degli individui morti nel 1870 all'età di 20 a 29 anni, sia 3650, ed il numero di individui della stessa età vivi il 31 dicembre 1870 provenienti dai nati del 1841-1850, sia 428,000. La mortalità di questi dieci anni sarebbe $\frac{3650}{428,000 + \frac{1}{2} 3650}$ nel caso soltanto in cui la popolazione fosse stazionaria. Ma se le nascite crescono di anno in anno, converrà notare, come già spiegammo, che i morti all'età di 20 a 21 anni, provenienti dai nati del 1850, non cadono tutti nell'anno 1870, ma si ripartiscono a metà sugli anni 1870 e 1871; lo stesso avviene per i morti all'età di 21 a 22 anni provenienti dal 1849, per i morti all'età di 22 a 23 anni corrispondenti ai nati nel 1848 e così di seguito, mentre noi ammettiamo che la metà dei morti di 20 a 21 anni provengono dal 1849, la metà dei morti di 21 a 22 anni provenga dal 1848,.... e finalmente la metà dei morti di 29 a 30 anni dal 1840 (giacchè un individuo morto il 1° gennaio 1870 all'età di 29 anni, 364 giorni, è nato il 2 gennaio 1840 e non nel 1841).

Quindi la metà dei morti non proviene dagli anni dei nati che forniscono il numero dei vivi che figurano nel nostro denominatore, ma dai nati dell'anno anteriore; ed è perciò di tanto minore del vero di quanto cresce relativamente il numero delle nascite da un anno all'altro ed esso deve essere aumentato del tanto per mille.

Ma la mortalità così calcolata ha inoltre un altro principale difetto più difficile a correggere.

Noi abbiamo addizionati i morti ed i viventi di 10 anni e ne abbiamo calcolata la mortalità media, come se le cifre relative di questi anni, cioè i loro rapporti rispettivi fossero rimasti gli stessi, come avviene nel caso di una popolazione stazionaria. Ma se dal 1841 al 1850 la popolazione si fosse notevolmente accresciuta? Allora il nostro numeratore si comporrebbe di cifre relativamente piccole dei primi anni aggiunte alle troppo elevate degli ultimi anni, lo stesso avverrebbe per le cifre dei viventi che figurano al denominatore ed evidentemente ne risulterebbe che la mortalità degli anni superiori eserciterebbe un'influenza troppo considerevole sul risultato medio, influenza che si manifesterebbe colla depressione della mortalità media dei 10 anni riuniti.

Consisterebbe la correzione nel dare alle cifre dei morti e dei viventi all'età di 20 a 29 anni il valore che esse avrebbero se la popolazione fosse stazionaria e per determinare queste cifre non secondo semplici ipotesi, ma conformemente al vero noi dovremmo conoscere lo accrescimento medio delle nascite e nello stesso tempo la mortalità durante questi 10 anni. Ma è questo appunto quello che cerchiamo.

Davanti a questa difficoltà noi dobbiamo procurare che le nostre liste mortuarie ed i nostri censimenti sieno pubblicati per anno di età; l'aumento del lavoro e delle spese vien compensato dal vantaggio di ottenere più esatti i risultati che sono lo scopo principale di questi dati.

B.

Distribuzione dei morti secondo il millesimo della loro nascita.

Si tiene lo stesso procedimento descritto al capitolo 2, *B*, colla sola differenza che il numero dei viventi (possibilmente alla fine dell'anno), ci è qui fornito dal censimento. Le variazioni apportate dopo la nascita di questi viventi, dall'immigrazione e dall'emigrazione alla cifra della popolazione, trovano la loro espressione nei risultati dei censimenti. È vero che queste variazioni ci restano ignote per il periodo compreso tra due censimenti, e noi determiniamo l'ammontare della popolazione alla fine di un anno, coll'aumentare la cifra dell'anno precedente delle nascite e col diminuire questo totale dei morti. Ma se noi ammettiamo che l'emigrazione e l'immigrazione, ossia l'eccedenza dell'una sull'altra, che poi otteniamo per mezzo di due censimenti consecutivi sia ripartito proporzionalmente sugli anni intermedi, noi potremo allo stesso modo stabilire il numero approssimativo della popolazione, tenendo conto di questo fattore e riferire al numero d'individui provenienti da un anno di nati-vivi al principio dell'anno il numero dei morti provenienti dalla stessa classe di nati.

È vero che noi in tal modo non otteniamo la mortalità di un solo anno di età, ma riunita la mortalità di due anni di età, e dobbiamo determinare per interpolazione la mortalità di ciascuna, col metodo indicato al capitolo 2, *B*.

C.

Distribuzione dei morti per età e di ciascuna classe di età secondo il millesimo della nascita.

Questo sistema è già stato dimostrato nel capitolo 2, *C*, giacchè le liste dei morti stabilite dalla tavola (Tav. IV) sono le stesse che ci occorrono qui.

Restando fermi nell'opinione che il metodo di calcolo indicato al capitolo 2, *C*, ci fornisca i risultati più veritieri su quanto concerne i 5 primi anni di età, crediamo tuttavia che il metodo che stiamo per spiegare serva pure per le età inferiori, mentre non si può dire la stessa cosa dei metodi *A* e *B* di questo capitolo.

Scopo principale di ogni tavola di mortalità è evidentemente di determinare *la parte di popolazione che muore durante ciascun anno di età*. Ad ottener ciò, o si seguirà un certo numero di individui dall'istante della loro nascita fino a quello della loro estinzione, ovvero viste le difficoltà di questo procedimento, si osserverà la mortalità per ciascun anno di età tra gli individui delle diverse classi *viventi contemporaneamente*.

La cifra della mortalità per ciascun anno di età essendo conosciuta, si può anche stabilire, per mezzo delle esperienze fatte su persone appartenenti a differenti classi di età, l'ordine di sopravvivenza di 1000 individui nati durante lo stesso anno.

È in tal modo che le compagnie d'assicurazione hanno ottenuto i primi risultati di cui si sieno potute giovare. Quantunque le diverse classi di età sieno rappresentate dai loro assicurati in proporzione ben diversa da quella di una popolazione totale, non pertanto (lasciando esse in disparte il metodo di Halley) determinarono la mortalità di ciascuna classe di età; esse semplicemente domandavano quanti individui sono entrati nel loro 20° anno di età? Quanti l'hanno compito? e così di seguito per il 21°, 22°, ecc.

A questo modo esse ottennero le probabilità di vita, e per mezzo di queste l'ordine dei sopravvivenenti.

Ma le loro tavole hanno molti difetti; i loro calcoli della mortalità per certi anni, specialmente per le età inferiori e per la vecchiaia, non sono basate su un numero sufficiente di esperienze, secondariamente gli assicurati appartengono già ad una *classe scelta*, e non hanno la

stessa mortalità del resto della popolazione. È infine provato che gli Stati d'Europa hanno degli ordini di sopravvivenza differenti tra loro, i quali variano pure col variare dei tempi; ed è anche per questo che sarebbe desiderabile di avere una tavola di mortalità svizzera basata sulle nostre esperienze attuali.

Si vuole quindi sapere quale frazione della popolazione muore in Svizzera alle differenti età. Il prof. Zeuner ha già nel suo eccellente *Trattato di statistica matematica* (1), sviluppato il modo di calcolare queste quantità.

Quanto allora egli proponeva e che, viste le grandi lacune che presentava la nostra statistica della popolazione, non si sarebbe in alcun modo potuto realizzare nel 1870, potrà essere eseguito dopo il censimento del 1880 quando quelli che ne saranno incaricati sieno dotati di buon volere.

Ora la questione principale si è di sapere come, secondo lo Zeuner, si possa stabilire il numero di abitanti svizzeri che esistono in ciascun anno di età ed il numero di quelli che vi sopravvivono.

La prima condizione consiste nel determinare la cifra a cui ascende la popolazione (per anno di nascita) al 31 dicembre dell'anno del censimento, sia fissandolo per quello stesso giorno, sia, se è nuovamente bandito pel 1° dicembre aggiungendo al risultato il numero dei fanciulli nati durante il mese di dicembre 1880 togliendo nel tempo stesso il numero dei morti di quel mese distribuiti per anno di nascita secondo i registri dei nati e dei morti.

Stabilita la popolazione per anno di età al 31 dicembre 1880, ponendo molta cura alla minuziosa indicazione dell'anno di nascita di ciascuno, non s'incontreranno più gravi difficoltà su quanto resta a fare.

Si è già visto come un censimento per anno di nascita effettuato, o calcolato al 31 dicembre ci fornisca pure l'età della popolazione. Al 31 dicembre 1880 tutti i nati nel 1870 avranno compiuto il 10° anno, tutti i nati nel 1869 il loro 11°, quelli del 1868 il loro 12°; ma un rilevamento per anno di nascita non ci dice quanti individui nati nel 1870 sieno entrati nell'11° anno nel 1880. Ora noi potremo stabilire questa cifra colle liste dei morti costruite secondo la tavola IV. Supponiamo che il censimento constati al 31 dicembre 1880 60,000 individui vivi nati nel 1870 e che il movimento della popolazione svizzera durante l'anno 1880 constati i morti durante quest'anno a 125 fanciulli di 10 ad 11 anni nati nel 1870, ne risulterà che sul numero totale degli in-

(1) *Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik von D^r GUSTAV ZEUNER.* Leipzig v. v. Arthur Felix, 1869.

dividui nati nel 1870 ve ne hanno 60,000 + 125 che sono restati nel loro 11° anno di età durante il 1880.

E quanti sono entrati nell'anno di età seguente?

Vi sono entrati gli individui nati nel 1870 e viventi ancora al 31 dicembre 1880 meno quelli tra di essi che sono morti nel 1881 all'età di 10 ad 11 anni. Il movimento della popolazione durante il 1881 ci indicherà il numero di questi ultimi. Supponiamo che sia di 135, allora 60,000 — 135 avranno vissuto tutto intero il loro 10° o 11° anno; dunque

$$\frac{60,000 - 135}{60,000 + 125} = \frac{995.676}{1000}$$

sarà la probabilità di vivere l'11° anno; e la probabilità di morte in conseguenza sarà

$$1 - \frac{60,000 - 135}{60,000 + 125} = \frac{135 + 125}{60,000 + 125} = \frac{4.324}{1000}$$

L'esempio seguente ci dimostrerà come si può calcolare anno per anno l'ordine di sopravvivenza col mezzo dei risultati di un censimento e degli estratti delle liste mortuarie.

Tavola IX.

ANNI DI NASCITA	Popolazione al 31 dicembre 1880	Registro delle morti del 1880	Registro delle morti del 1881	Probabilità di raggiungere l'anno di età seguente
1880, età da 0 a 1 anno	1410	230	98	$\frac{1410 - 98}{1410 + 230} = 0,800$
1879, » 1 » 2 anni	1282	20	25	$\frac{1282 - 25}{1282 + 20} = 0,965$
1878, » 2 » 3 »	1240	10	11	$\frac{1240 - 11}{1240 + 10} = 0,983$
1877, » 3 » 4 »	1245	10	10	$\frac{1245 - 10}{1245 + 10} = 0,984$
1876, » 4 » 5 »	1275	8	7	$\frac{1275 - 7}{1275 + 8} = 0,988$
1875, » 5 » 6 »	1220	5	5	$\frac{1220 - 5}{1220 + 5} = 0,992$
1874, » 6 » 7 »	1140	4	5	$\frac{1140 - 5}{1140 + 4} = 0,992$
1873, » 7 » 8 »	1100	4	4	$\frac{1100 - 4}{1100 + 4} = 0,993$
1872, » 8 » 9 »	1080	3	3	$\frac{1080 - 3}{1080 + 3} = 0,995$
1871, » 9 » 10 »	1000	2	2	$\frac{1000 - 2}{1000 + 2} = 0,996$

Cioè se il censimento constata al 31 dicembre 1880, 1410 fanciulli vivi nati nel 1880 e se noi vi aggiungiamo i 230 nati pure nel 1880 ma già morti nell'anno, noi troviamo i 1640 che sono entrati nel 0° anno, se d'altra parte noi dai 1410 dell'età 0-1 togliamo i 98 individui della stessa età che sono morti nel 1881 avremo pel resto i fanciulli che nati nel 1880 avranno compiuto il loro 0° anno. Dividendo quest'ultimo numero per il primo

$$\frac{1410 - 98}{1410 + 230} = 0,800$$

noi otterremo la probabilità che hanno i fanciulli di 0 anni di età (nati-vivi) di arrivare ad un anno di età. Allo stesso modo se noi ai 1282 nati nel 1879 che ci sono forniti dal censimento, aggiungeremo i 20 fanciulli nati lo stesso anno e morti nel 1880 all'età di 1 a 2 anni noi otterremo il numero dei nati nel 1879, che hanno compiuto il 1° anno di età e se noi deduciamo da questi stessi 1282 i 25 che sono morti nel 1881 all'età di 1 a 2 anni, resteranno quelli che hanno compiuto il loro 2° anno di età. L'ultima cifra divisa per la prima

$$\frac{1282 - 25}{1282 + 20} = 0,965$$

rappresenta dunque la probabilità pei fanciulli dell'età di 1 a 2 anni di arrivare a 2 anni di età. Allo stesso modo la probabilità dei fanciulli di 2 a 3 anni di età di toccare il 3° anno sarà

$$\frac{1240 - 11}{1240 + 10} = 0,983, \text{ ecc.}$$

Noi in tal guisa otteniamo su 1000 nati-vivi e di 0 anni di età

1000 \times 0,800 = 800 nell'età di 1 anno;

1000 \times 0,800 \times 0,965 = 772 nell'età di 2 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 = 759 nell'età di 3 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 = 747 nell'età di 4 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 = 738 nell'età di 5 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 \times 0,992 = 732 nell'età di 6 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 \times 0,992 \times 0,992 = 726 nell'età di 7 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 \times 0,992 \times 0,992 \times 0,993 = 721 nell'età di 8 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 \times 0,992 \times 0,992 \times 0,993 \times 0,995 = 717 nell'età di 9 anni;

1000 \times 0,800 \times 0,965 \times 0,983 \times 0,984 \times 0,988 \times 0,992 \times 0,992 \times 0,993 \times 0,995 \times 0,996 = 714 nell'età di 10 anni.

In tal modo noi possiamo effettuare per una popolazione tutta intera il calcolo che le compagnie di assicurazione stabiliscono basandosi sulle loro liste di morti. Zeuner crede che col mezzo dei risultati di un censimento e delle liste dei morti dei due anni tra i quali ha luogo il censimento si possa costruire una tavola di mortalità. Noi non pertanto faremo osservare come dalle nostre esperienze risulti che certi anni come il 1877 e 1878 hanno una mortalità relativamente favorevole ed altri per contro come il 1870 e 1871, che Zeuner voleva prendere come base del suo calcolo danno una mortalità eccessiva. Ne segue che i risultati di due soli anni consecutivi non ci danno una fedele rappresentazione della mortalità media, e che sono necessari per ciò dati più numerosi.

A primo aspetto questi dati non appaiono difficili ad ottenersi: noi possiamo stabilire per mezzo del censimento 1880 e coll'aiuto dei registri dei nati e dei morti del 1881 la cifra della popolazione al 31 dicembre 1881 e basta ripetere lo stesso calcolo.

Ma allora noi ci troviamo a fronte dei difetti del metodo 2, C, visto che, per il calcolo della popolazione al 31 dicembre 1881 e degli anni seguenti non possiamo tener conto che dell'accrescimento e decrescimento proveniente dalle nascite e dalle morti, esclusa l'influenza dell'emigrazione e dell'immigrazione.

Noi possiamo rimediare a questo inconveniente nel modo indicato al capitolo 3, B. Allorchè noi abbiamo stabilito col mezzo dei due censimenti consecutivi l'eccedente dell'immigrazione sull'emigrazione o reciprocamente, noi ripartiamo per classi di età l'aumento o la diminuzione che ne risulta sull'intero periodo decennale; quindi se noi al 1° dicembre 1890 constatiamo una diminuzione, noi dedurremo $\frac{1}{10}$ di questa diminuzione, che proviene dall'essere l'emigrazione superiore, dalla popolazione calcolata come si disse al 1° dicembre 1881, ne dedurremo $\frac{2}{10}$ dalla popolazione calcolata al 1° dicembre 1882, ecc., e questo per ogni classe di età.

Ma è necessario calcolare per ogni anno del periodo 1881-1890, secondo il metodo 2, C, l'effettivo di ciascun anno di età coll'aiuto delle indicazioni delle nostre liste delle nascite e delle morti e paragonare al dicembre 1890 il risultato del nostro calcolo col risultato del censimento.

Se questo è superiore in una o in un'altra classe, vorrà dire che l'immigrazione supera l'emigrazione; se al contrario è minore la differenza proviene da un eccesso d'emigrazione.

Se si possedesse una abbastanza completa statistica delle nascite e

delle morti (e queste per anno di nascita) durante il periodo 1860-1870 ci sarebbe già possibile stabilire coll'aiuto dei censimenti 1860 e 1870 questo eccedente di emigrazione.

Speriamo che queste spiegazioni avranno per effetto di convincere le nostre autorità federali e cantonali dell'importanza massima che avrebbe dal punto di vista pratico di portare nel nostro prossimo censimento come alla nostra statistica dello stato civile tutte le cure e tutta l'esattezza possibile. Noi non domandiamo nulla di nuovo, invociamo la rigorosa applicazione delle disposizioni attuali. Noi ne avremo migliori frutti di quelli che risulterebbero ostinandoci a sovraccaricare di domande i formulari del censimento, come fin qui si fece, correndo il rischio col cercare l'impossibile di non ottenere neppure il possibile.

TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA

DELLE 20 COMPAGNIE INGLESI

ED

ASSICURAZIONI CONTRO GLI ACCIDENTI.

Nel gennaio 1862 l'Istituto degli Attuari di Londra, riconoscendo opportuno di addivenire alla compilazione di speciali tavole di sopravvivenza per uso delle varie società di assicurazione sulla vita funzionanti nel Regno Unito, risolse di trarre partito dalle osservazioni fatte dalle medesime in un periodo di circa 25 anni.

Coerentemente a ciò ed in considerazione del diverso sistema di tener conto delle operazioni presso le dette Società, queste furono invitate a fornire le necessarie notizie per ogni assicurato, mediante apposita scheda, avente presso a poco la forma seguente:

Scheda usata a Londra.

Polizza N° 1564.		
Nome: <i>Black James.</i>		
Inglese, Irlandese o Straniero: <i>B.</i>		
Sano o malato: <i>S.</i>		
Anno di entrata	1830	
Anno di uscita	1860	30
Età di entrata		32
Età di uscita		62
Ragione dell'uscita		<i>M.</i>
Causa della morte: <i>Apoplessia.</i>		
Osservazioni:		

Scheda proposta per la Scozia.

Polizza N° 1564-1612.			
Nome: <i>Black James.</i>			
Inglese, Scozzese, Irlandese o Straniero: <i>B.</i>			
Sano o malato: <i>S.</i>			
Data di entrata	<i>3/1 1830</i>		
Data di uscita	<i>16/10 1860</i>	$\frac{10}{12}$	
Durata	<i>30</i>	$\frac{10}{12}$	<i>30</i>
Data di nascita	<i>15/3 1798</i>	$\frac{2}{12}$	
Età di entrata	<i>32</i>	$\frac{10}{12}$	<i>32</i>
Età di uscita	<i>62</i>	$\frac{8}{12}$	<i>62</i>
Ragione dell'uscita			<i>M.</i>
Causa della morte: <i>Apoplessia.</i>			
Osservazioni:			

Per la formazione di tali schede venne stabilito:

1° Far uso di carta bianca per i maschi e di carta colorata per le femmine;

2° Per gli assicurati aventi più polizze, portare nella scheda il numero di ogni polizza, assumendo per anno e per età di entrata, quelli risultanti dalla polizza più remota. Quando le polizze presentassero di-scontinuità, considerarle distintamente con ischede separate

3° Scrivere prima il cognome poi il nome;

4° Servirsi di apposite notazioni (lettere iniziali) per esprimere la nazionalità, lo stato di sanità o di malattia, la ragione della uscita, nonchè l'esistenza al 31 dicembre 1863, data di osservazione.

Nel periodo che corre dal gennaio 1865 alla fine del 1867, venti società corrisposero al desiderio dell'Istituto degli Attuari di Londra, presentando un insieme di circa 180,000 schede, che furono ripartite nelle seguenti categorie:

- a) assicurati sani maschi;
- b) assicurati sani femmine;
- c) assicurati malati maschi e femmine;
- d) assicurati esposti a rischi speciali.

Quindi ciascuna categoria venne divisa in gruppi per ordine alfabetico, ed ogni gruppo in sotto-gruppi di morti durante l'assicurazione, di cancellati per cessazione di assicurazione, rescissione di contratto od altro, e di esistenti al 31 dicembre 1863. Finalmente ogni sotto-gruppo fu diviso per età di entrata, ed ognuna di queste suddivisioni per età di uscita. Questo ultimo spoglio dette luogo alla compilazione di uno specchio per ogni età di entrata, indicante il numero totale degli entrati all'età stessa, nonchè il numero degli esistenti, dei cancellati per cessazione di assicurazione e dei morti di anno in anno nelle età successive a partire da quella di entrata.

A dare idea concreta di tali specchi, stimiamo opportuno riprodurre qui in parte quello ottenuto per l'età di entrata di 22 anni:

Età di entrata anni 22. — N° degli entrati 2497.

Età di uscita	Esistenti	Cessati	Morti
Anni	Num.	Num.	Num.
22	166	62	5
23	151	239	14
24	121	157	14
25	92	124	14
26	93	92	8
.
	1391	932	174

Con la scorta di questi specchi si formarono delle tabelle riassuntive per ciascuna delle accennate categorie, comprendenti per ogni età il numero degli entrati, quello dei vissuti, quello dei morti, quello dei

cessati e quello degli esistenti alla data di osservazione. In queste tabelle riassuntive

a) il numero degli entrati a ciascuna età venne desunto dallo specchio corrispondente;

b) il numero dei vissuti, si ottenne aggiungendo per ciascuna età il numero degli entrati al numero dei vissuti nella età precedente, e sottraendo dal totale le cifre dei morti, cessati ed esistenti; dimodochè chiamando

$$\begin{aligned} V_a & \text{ i vissuti all'età } a, \\ V_{a+1} & \text{ i vissuti all'età } a + 1, \\ E_{a+1} & \text{ gli entrati all'età } a + 1, \\ M_{a+1} & \text{ i morti all'età } a + 1, \\ C_{a+1} & \text{ i cessati all'età } a + 1, \\ \bar{E}_{a+1} & \text{ gli esistenti all'età } a + 1, \end{aligned}$$

si ha

$$V_{a+1} = V_a + E_{a+1} - M_{a+1} - C_{a+1} - \bar{E}_{a+1};$$

c) il numero dei morti, dei cessati e degli esistenti ad ogni età, fu determinato addizionando tutte le cifre dei morti, cessati ed esistenti che figuravano nello specchio preso in esame ed in quelli delle età anteriori, in corrispondenza sempre dell'età considerata. Di tal che, per dire dei soli morti, chiamando

M_a i morti all'età a della tabella riassuntiva, ed

$$m_a^a, m_a^{a-1}, m_a^{a-2}, m_a^{a-3} \dots m_a^1$$

i morti all'età stessa degli specchi da 1 ad a anni, si ha

$$M_a = m_a^a + m_a^{a-1} + m_a^{a-2} + m_a^{a-3} + \dots + m_a^1,$$

ovvero

$$M_a = m_a^1 + m_a^2 + m_a^3 + m_a^4 + \dots + m_a^a.$$

Notisi che nelle tabelle riassuntive, come nelle altre che da quelle furono dedotte, la mortalità dell'anno corrente a , si riferisce agli esposti a morire nell'anno $a - 1$ di età.

Alla lor volta le ridette tabelle riassuntive furono impiegate a redigere altre tabelle, indicanti per ciascuna categoria *il numero degli esposti a morire e dei morti in ciascun anno di assicurazione per ogni età di entrata.*

Il numero degli esposti a morire fu ottenuto nel primo anno di assicurazione, col prendere metà degli entrati nell'anno di età, meno la metà dei cessati nell'anno stesso; nel secondo anno di assicurazione fu determinato deducendo dagli entrati nel secondo anno la metà dei cessati nell'anno stesso, e così di seguito.

Diamo per esempio i primi computi con cui si compilò la tabella degli esposti a morire (maschi sani) entrati all'età di 21 anni.

Esposti a morire.

Entrati a 22 anni	2,497	di cui la metà	1248,5			
Cessati id.	62	id.	31	1217,5	all'età di 21 anni (1° anno)	
<hr/>						
Entrati nel 1° anno	2,497					
Esistenti. 166	}					
Cessati . 62						} 233
Morti . . . 5						
Entrati nel 2° anno	2,264	} meno la metà dei cessati nel 2° anno		119,5	2144,5 all'età di 22 anni (2° anno)	
Esistenti. 151	}					
Cessati . . 239						} 394
Morti . . . 14						
	1,870	} meno la metà dei cessati nel 3° anno		78,5	1781,5 all'età di 23 anni (3° anno)	
.						

Ottenute così le tabelle degli esposti a morire e morti in ogni età di assicurazione, per ogni età di entrata, vennero esse pure riassunte, sempre per categoria, in ulteriori tabelle rappresentanti il *numero dei morti e degli esposti a morire in ogni età*. Queste vennero compilate prendendo per esposti a morire all'età *a* la somma degli esposti a morire che in quelle figurano nell'anno *a* di assicurazione all'età 0 di entrata, nell'anno *a* — 1 di assicurazione all'età 1 di entrata, nell'anno *a* — 2 di assicurazione all'età 2 di entrata, e così di seguito.

Si fu in base a queste ultime tabelle che si formarono le decime mortuarie, e finalmente le relative tavole di sopravvivenza, arricchite dei migliori accessori numerici a facilitazione dei calcoli relativi.

I risultati di questo stupendo lavoro vennero pubblicati nel maggio 1869 dall'Istituto degli Attuari di Londra, in un bel volume intitolato « *Mortality experience of life assurance companies* »; ed è con i preziosi elementi ivi raccolti che l'Istituto stesso, a seguito di ulteriori e certo non meno importanti studi, dette alla luce le « *Tables deduced from the mortality experience of life assurance companies*, stampate a

Londra nel 1872; ed in cui sono svolti in mirabile ordine i modi di applicazione delle citate tavole di sopravvivenza ai calcoli tutti che si riferiscono alle molteplici combinazioni di assicurazione sulla vita dell'uomo.

Le dette tavole di sopravvivenza, note sotto il nome di *tavole delle 20 compagnie inglesi*, vengono ordinariamente designate con i simboli H^M , H^F , H^{MF} , le quali rispettivamente riguardano i maschi, le femmine, e maschi e femmine insieme.

Merita particolare menzione il metodo seguito da W. S. B. Woolhouse per l'aggiustamento delle tavole di sopravvivenza originali, che figurano in fine del primo dei detti volumi; metodo che può riassumersi così:

Sia V il numero dei viventi all'età x della tavola che vuoi aggiustare, e V' quello corrispondente della tavola corretta. La serie dei valori dai quali V è dedotto sono V'_{x-5} , V'_x , V'_{x+5} . Interpolando col valore intermedio sino alla seconda differenza, si avrà:

$$V = V'_x - \left(\frac{x}{5}\right) a + \left(\frac{x}{5}\right)^2 \frac{b}{2},$$

$$V = V'_x - \left(\frac{x}{5}\right) \frac{V'_{x-5} - V'_{x+5}}{2} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 \frac{V'_{x-5} - 2V'_x + V'_{x+5}}{2},$$

$$V = \frac{x(5+x)}{50} V'_{x-5} + \frac{25-x^2}{25} V'_x - \frac{x(5-x)}{50} V'_{x+5};$$

in cui facendo x eguale a -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , si otterranno i seguenti valori di V :

$$V = -0,12 V'_{-7} + 0,84 V'_{-2} + 0,28 V'_{+3},$$

$$V = -0,08 V'_{-6} + 0,96 V'_{-1} + 0,12 V'_{+4},$$

$$V = 0 + V' + 0,$$

$$V = +0,12 V'_{-4} + 0,96 V'_{+1} - 0,08 V'_{+6},$$

$$V = +0,28 V'_{-3} + 0,84 V'_{+2} - 0,12 V'_{+7};$$

Facendo quindi

$$V'_{x-1} + V'_{x+1} = s_1,$$

$$V'_{x-2} + V'_{x+2} = s_2,$$

$$V'_{x-3} + V'_{x+3} = s_3,$$

$$V'_{x-4} + V'_{x+4} = s_4,$$

$$V'_{x-6} + V'_{x+6} = s_6,$$

$$V'_{x-7} + V'_{x+7} = s_7,$$

ed

$$f = s_1 - s_3,$$

$$g = s_2 - s_3,$$

$$h = s_6 - s_3,$$

$$k = s_7 - s_4,$$

sommando i detti valori si ha

$$5V = V' + 0,96s_1 + 0,84s_2 + 0,28s_3 + 0,12s_4 - 0,08s_6 - 0,12s_7,$$

$$5V = V' + s_1 + s_2 - 0,04 \left\{ (s_1 - s_3) + 4(s_2 - s_3) + 2(s_6 - s_3) + 3(s_7 - s_4) \right\},$$

$$V = \frac{V' + s_1 + s_2 - 0,04(f + 4g + 2h + 3k)}{5};$$

la quale ultima espressione per ogni valore V' della tavola da correggere, dà il corrispondente valore V della tavola corretta.

Vogliasi per esempio determinare il numero dei viventi all'età di 30 anni che nella tavola originale è di 8987.

La tavola originale dà come viventi

all'età 30 — 1, cioè a 29 anni	9054
» 30 — 2, » 28	» 9125
» 30 — 3, » 27	» 9185
» 30 — 4, » 26	» 9249
» 30 — 6, » 24	» 9361
» 30 — 7, » 23	» 9434

all'età	30 + 1,	cioè a	31	»	8913
	» 30 + 2,		» 32	»	8848
	» 30 + 3,		» 33	»	8774
	» 30 + 4,		» 34	»	8701
	» 30 + 6,		» 36	»	8554
	» 30 + 7,		» 37	»	8479

Si avrà quindi:

$$\begin{array}{r}
 V'_{29} = 9054 \quad V'_{28} = 9125 \quad V'_{27} = 9185 \quad V'_{26} = 9249 \quad V'_{24} = 9361 \quad V'_{23} = 9434 \\
 V'_{31} = 8913 \quad V'_{32} = 8848 \quad V'_{33} = 8774 \quad V'_{34} = 8701 \quad V'_{36} = 8554 \quad V'_{37} = 8479 \\
 \hline
 s_1 = 17967 \quad s_2 = 17973 \quad s_3 = 17959 \quad s_4 = 17950 \quad s_6 = 17915 \quad s_7 = 17913 \\
 s_8 = 17959 \quad s_9 = 17959 \quad \dots \quad \dots \quad s_9 = 17959 \quad s_1 = 17950 \\
 \hline
 f = +8 \quad g = +14 \quad \dots \quad \dots \quad h = -44 \quad k = -37
 \end{array}$$

$$f + 4g + 2h + 3k = 8 + 56 - 88 - 111 = -135,$$

$$135 \times 0,04 = 5,30;$$

$$V'_{30} = 8987$$

$$s_1 = 17967$$

$$s_2 = 17973$$

$$44927 + 5,30 = 44932,30, \text{ che diviso per } 5 \text{ dà}$$

8986,5 per il numero cercato.

Come a complemento dei due citati lavori, il signor Ralph Price Hardy, attuario nella *London and provincial Law assurance Society* e segretario onorario dell'Istituto degli Attuari, nel 1873 pubblicò un bel volume di tavole per la pratica valutazione delle polizze di ogni durata, delle annualità temporanee, nonchè dei premi unici ed annui per le assicurazioni temporanee e progressive, in base a quella (H^m) di sopravvivenza, ed ai saggi del 3, 3 1/2 4 e 4 1/2 per cento, corredandole di molti dati accessori e di grande utilità in tutti i calcoli relativi.

Le tre citate pubblicazioni contengono indubbiamente quanto vi ha di meglio su questo importante oggetto, sia per la ricchezza dei materiali, sia per il modo logico e prettamente scientifico con cui vennero apprestati.

Se la nazione inglese nella pratica attuazione delle discipline economiche è giunta ad avere il primato in Europa, conviene pur dire che i principali progressi vi sono dovuti all'iniziativa privata, che in quel paese ha raggiunto il massimo grado di potenza. E fra tanti esempi ne fa fede la rara ed efficace operosità dell'Istituto degli Attuari di Londra, il quale, forte di eminenti individualità, ha validamente cooperato a gettare le basi scientifiche delle assicurazioni sulla vita, le quali, al pari di altre istituzioni, trovano straordinario impulso nelle peculiari tendenze della razza anglo-sassone. Presso ai popoli di razza latina invece lo spirito di previdenza tende ad estrinsecarsi di preferenza sotto la forma del risparmio. Questa circostanza che in Italia è resa evidente dal prosperare continuo delle casse di risparmio locali e delle postali, a fronte delle limitatissime operazioni che fanno le società di assicurazione sulla vita, merita di essere tenuto a calcolo; massime oggi che per lo sviluppo della istruzione e del benessere materiale, che fa meglio penetrare in tutte le classi il sentimento della previdenza, sarebbe più facile far comprendere a migliaia di persone i vantaggi derivanti da un beninteso sistema di *assicurazioni contro gli accidenti*.

La nostra esistenza ha un valore pecuniario proporzionale alla nostra situazione personale. Se è buon atto di previdenza garantire la casa, le mercanzie, i materiali industriali ed agricoli, il bestiame, ecc., non lo è meno quello di garantire la vita contro i mille pericoli ai quali è esposta in ogni istante del giorno in città come in campagna, in casa come fuori. Disgraziatamente l'assicurazione della vita in caso di decesso non è accessibile a tutte le borse a cagione dei premi elevati, sebbene proporzionati al rischio che vuolsi garantire. Presto o tardi bisogna morire; il rischio è permanente, fatale; il sinistro avverrà indubbiamente. In previsione di questo sinistro l'assicurazione in caso di morte richiede a coloro che vogliono contrarla un pagamento annuo, calcolato in modo da poter far fronte integralmente e materialmente all'ammontare della garanzia in qualunque momento si verifichi il decesso dell'assicurato. Ma ciò non riguarda che il caso di morte: quello ben più frequente di ferite gravi, d'incapacità al lavoro sia temporanea che per tutta la vita, è ben altra cosa.

Malgrado l'ottimismo della natura italiana, parrebbe che un tal ramo di assicurazione dovesse più facilmente attecchire nel nostro paese. Si comprende come ciò non possa avvenire ad un tratto; le relative statistiche avranno d'uopo di essere fatte più metodicamente, dovranno farsi opportuni studi per la compilazione delle tariffe, ma dovrebbe pur giungersi a realizzare le assicurazioni contro gli accidenti a prezzi moderati, per modo da essere alla portata dei meno favoriti

dalla fortuna, e destinati a scongiurare i terribili effetti di eventualità che piombano ogni giorno migliaia di famiglie nella miseria, con grave danno della società.

A similitudine di quanto si pratica in Francia dalla *Compagnie générale d'assurances contre les accidents*, fondata nel 1876, l'assicurazione dovrebbe comprendere:

1° Gli accidenti corporali di ogni genere, risultanti da cause esterne, violenti ed involontarie;

2° La responsabilità civile di qualunque genere;

3° I danni derivanti dalla esplosione di apparecchi a vapore;

4° Gli accidenti ferroviari;

5° Gli accidenti materiali o deteriorazioni di oggetti trasportati, ecc.

A. PAOLINI.

DEI CRITERI MATEMATICI

PER FORMARE

TAVOLE DI COEFFICIENTI DI PENSIONE A FONDO PERDUTO E RICUPERABILE
PER LE CASSE-PENSIONI OPERAIE.

Studio di A. NOVELLIS

Ingegnere cartografo presso la Direzione di Statistica.

Gli statuti di una gran parte delle società di mutuo soccorso portano fra gli altri scopi, che esse si prefiggono, quello di assicurare pensioni vitalizie d'invalidità e di vecchiaia. Quest'assicurazione è molto apprezzata dall'operaio previdente, ma è pure uno dei compiti che presenti la più grande difficoltà nell'esecuzione. Diffatti molte società, che non destinano a tale scopo un fondo distinto ed amministrato separatamente, nè stabiliscono per questo speciali contribuzioni per i soci e determinate secondo i criteri della scienza ed i dati dell'esperienza si trovano, quando giunge il momento di mantenerle le loro promesse, in tristi condizioni economiche finanziarie, e per non andare a rovina sono costrette a rinunciare al mantenimento di esse, ovvero ad assottigliarle con grave danno al loro prestigio.

Alcune si obbligano a passare una pensione di vecchiezza nel solo caso che i fondi sociali lo comportino ed in misura proporzionata a questi fondi disponibili. Ma questa misura offende il principio d'uguaglianza tra i soci, poichè a seconda della loro età e dello stato finanziario della società potranno essi percepire o no una pensione di vecchiaia e questa anche variabile a seconda del buono stato economico della società. Essa diviene poi ancora più ingiusta quando le società, che vi debbono ricorrere, non ne hanno fatto cenno nei loro statuti. Inutile il dire come l'altra precauzione presa da alcune società, di dare la pensione nel solo caso in cui l'operaio, oltre l'aver raggiunta l'età voluta, dimostri pure di essere inabile al lavoro, sia una misura

del pari odiosa ed insufficiente; essa fu per poco adottata dagli inglesi che la chiamarono di *superannuation*, ma lascia sempre l'operaio nell'incertezza, ed esposto all'arbitrio di un consiglio di amministrazione.

In Francia, in Inghilterra, nel Belgio ed in altri Stati, ove maggiormente fioriscono le società di mutuo soccorso, si istituirono Casse-pensioni operaie le quali, o dipendenti totalmente dal Governo, come in Francia, od almeno sotto una tutela governativa tale da dar loro la massima garanzia, evitarono tutti gli inconvenienti esposti, assicurando all'operaio, che tocca una età prestabilita, un'equa pensione da corrispondersi in base dei versamenti da lui fatti alle diverse età precedenti. Queste istituzioni assumono il loro carattere di mutualità da ciò che quelli i quali muoiono prima di toccare l'età di pensione lasciano i loro versamenti e frutti di essi a favore dei superstiti ascritti al sodalizio. Di più, potendo esse contare un gran numero di ascritti, restano di molto diminuite quelle oscillazioni o scostamenti dalla media provenienti da cause accidentali, e permettono nel modo più plausibile l'applicazione della legge dei grandi numeri.

In Italia nulla ancora potè essere istituita per iniziativa del Governo. Si riunirono bensì diverse società a consorzio onde stabilire Casse-pensioni operaie le quali, avendo un'amministrazione autonoma, potessero, evitando gli inconvenienti accennati, corrispondere equamente allo scopo proposto.

Una delle maggiori difficoltà che si presentano per la salda costituzione di questi sodalizi si è lo stabilire i coefficienti di pensione fondandoli su tavole di sopravvivenza scelte convenientemente e calcolati giusta le norme che si hanno pel calcolo degli interessi composti e per quello delle probabilità riuniti.

L'esame di parecchie fra le tavole di coefficienti proposte, ci fece persuasi, che non sempre nel calcolo di esse si seguono i rigorosi principii della scienza.

Noi pertanto credemmo fare cosa utile pubblicando in questo studio diverse tavole di coefficienti per pensione ottenibile a 60 anni basate sulle tavole di sopravvivenza più conosciute facendo a ciascuna precedere la teoria matematica che serve a dimostrare il modo di ottenerli. Le conseguenze che ricaviamo sono di natura puramente matematica e quali emergono dalle cifre ottenute. Divideremo per maggior chiarezza il nostro lavoro in tre capitoli come segue:

- A) Coefficienti a fondo perduto;
- B) Coefficienti di riduzione da apportarsi ai primi, quando la pensione si liquida prima dei 60 anni;
- C) Coefficienti a fondo recuperabile.

Dell'uso dei coefficienti e del modo di servirsene crediamo superfluo il dire; poichè a tutti coloro che si occupano di tali affari è noto come ciascuna somma versata ad una data età si possa considerare isolatamente e concorrente da sola a formare una parte della pensione, parte che si stabilisce appunto coll'applicazione del coefficiente corrispondente a quell'età. E la pensione definitiva risulta dalla somma di tutte queste pensioni, diremo così, parziali, che l'individuo si è procurato coi versamenti alle diverse età.

A.

Coefficienti a fondo perduto.

Se supponiamo fatto il versamento di 1 lira ad un'età e qualunque e stabilita un'età limite da cui decorra, troviamo il valore della pensione cui dà diritto questo deposito, noi nel valore trovato avremo il coefficiente corrispondente a quell'età, il quale è a fondo perduto o recuperabile a seconda delle condizioni che ci siamo imposte nel nostro calcolo.

Poniamo la condizione, che i versamenti sieno godibili soltanto dall'individuo che li fa quando entri o superi l'età, limite oltre il quale si percepisce la pensione, i coefficienti, che otterremo, saranno a fondo perduto.

Sia r la ragione dell'interesse, e l'età in cui si fa il versamento, y_e il numero dei viventi all'età e secondo una data tavola di sopravvivenza.

Il valore che acquista 1 lira all'età di 60 anni e versata ad un'età qualunque di e anni, compresa tra 0 e 60 anni, sarà per le note formule d'interesse composto $(1+r)^{60-e}$; ma stando alla tavola di sopravvivenza il numero di quelli che fanno il versamento è di y_e , quindi a 60 anni si avrebbe (ponendo che sieno y_e gli individui che fanno il versamento) disponibile il capitale $(1+r)^{60-e} y_e$; all'età di 60 anni degli y_e , che eseguirono il versamento non restano più che y_{60} , quindi ciascuno dei superstiti a 60 anni per la lira versata all'età e potrà godere di un capitale dato da

$$(1+r)^{60-e} \frac{y_e}{y_{60}}.$$

Ma questo capitale deve servire per un'annua pensione dall'età di 60 anni fino alla morte e d'altra parte si conosce il valore at-

tuale a_{60} (1) di una lira annua di pensione a 60 anni, quindi la pensione cui si ha dritto dai 60 anni in su per una lira versata all'età e sarà

$$(1+r)^{60-e} \times \frac{y_e}{y_{60}} \times \frac{i}{a_{60}}$$

in cui a_{60} è costante, come y_{60} per un tasso d'interesse determinato e per una tavola di mortalità stabilita.

Ed è con tale formola che abbiamo calcolato i coefficienti dati nella tabella *A* secondo le diverse tavole di sopravvivenza Deparcieux, Hst delle 20 compagnie inglesi, del Dr. W. Farr pel popolo inglese, (Masci), dei pensionati dello Stato, Rameri popolazione italiana, (2) Morgan (3) che presentiamo, unite in apposita tabella (vedi tabella *B*), tali quali le desumemmo dalle opere originali e ridotte a 1000 sopravvivenenti a 10 anni di età onde renderne più agevole il confronto.

(1) Il valore di a_{60} è dato dalla formola

$$a_{60} = i \sum_1^{40} \frac{l}{(1+r)^i} \frac{y_{60+i}}{y_{60}};$$

e si trova del resto già calcolato in tutti i trattati d'assicurazione sulla vita. (Vedi ad es. M. MAAS *Théorie élémentaire des annuités viagères et des assurances sur la vie*. Paris. In questa formola si seguono le annotazioni già date; gli y_e sono presi dalle diverse tavole di sopravvivenza).

(2) Queste tavole di sopravvivenza sono generalmente conosciute ed usate.

(3) Per l'ultima crediamo utile dare qualche particolare notizia. ARTURO MORGAN attuario inglese e direttore della compagnia d'Assicurazione l'*Equitable*, costruì la sua tavola di sopravvivenza col materiale fornitogli dalle osservazioni della compagnia durante 66 anni ed un terzo (1762-1829). Gli assicurati in questo periodo furono 21,398 e 5,144 i morti. Quella tavola fu pubblicata a Londra nel 1834 ed è chiamata ordinariamente l'*Equitable Experience Table*.

Coefficienti della pensione ottenibile a 60 anni a fondo perduto, calcolati all'interesse del 4 per cento.

Tabel'a A.

ETÀ	DEPARCIEUX (1)	H ^M (2)	FARR (3)	MORGAN (4)	PENSIONATI (5)	RAMERI (6)
1	2	3	4	5	6	7
1	2.386	2.374	2.773
2	2.192	2.196	2.342
3	2.020	1.981	2.120
4	1.885	1.859	1.960
5	1.771	1.756	1.826
6	1.671	1.665	1.715
7	1.560	1.584	1.621
8	1.497	1.509	1.532
9	1.421	1.440	1.468
10	1.352	1.207	1.375	1.555	1.405
11	1.287	1.155	1.315	1.483	1.343
12	1.229	1.105	1.258	1.415	1.283
13	1.174	1.060	1.204	1.350	1.226
14	1.121	1.016	1.152	1.288	1.172
15	1.070	0.974	1.102	1.229	1.119
16	1.021	0.934	1.051	1.172	1.069
17	0.974	0.895	1.008	1.118	1.021
18	0.928	0.857	0.963	1.066	0.975
19	0.885	0.820	0.920	1.015	0.932
20	0.844	0.784	0.878	0.967	0.914	0.889
21	0.804	0.749	0.837	0.919	0.858	0.846
22	0.764	0.716	0.798	0.874	0.819	0.805
23	0.728	0.683	0.762	0.830	0.774	0.766
24	0.693	0.653	0.725	0.788	0.736	0.728
25	0.660	0.623	0.691	0.747	0.698	0.692

(1) I coefficienti DEPARCIEUX vennero calcolati coll'aiuto delle tavole numeriche dell'opera del M. MAAS, *Théorie Élémentaires des Annuités Viagères*.

(2) Per quelli H^M ricorremmo all'opera dell'Istituto degli Attuarii Inglesi, *Tables deduced from the mortality experience of life assurance companies*. London, 1872.

(3) L'opera magistrale del dottor W. FARR, *English life table*. London, 1864, ci fornì abbondanti elementi pel calcolo dei coefficienti FARR.

(4) (5) I coefficienti MORGAN e Pensionati li dovemmo calcolare noi interamente a tale scopo formandoci le tabelle ausiliarie.

(6) Pei coefficienti RAMERI ci tornò molto utile il nuovo lavoro del professore A. PAOLINI, *Saggio di Aritmetica sociale*, pubblicato negli *Annali di Statistica*, serie 2^a, vol. 14.

**Coefficienti della pensione ottenibile a 60 anni a fondo perduto,
calcolati all'interesse del 4 per cento.**

Segue *Tabella A.*

ETÀ	Deparcieux	H ^M	Farr	Morgan	Pensionati	Rameri
1	2	3	4	5	6	7
26	0.628	0.595	0.658	0.709	0.661	0.659
27	0.597	0.569	0.627	0.672	0.629	0.627
28	0.568	0.543	0.597	0.638	0.598	0.598
29	0.540	0.518	0.568	0.604	0.571	0.569
30	0.515	0.495	0.541	0.573	0.546	0.541
31	0.489	0.472	0.515	0.543	0.519	0.515
32	0.465	0.450	0.490	0.515	0.495	0.491
33	0.442	0.429	0.466	0.488	0.472	0.467
34	0.421	0.409	0.444	0.463	0.449	0.444
35	0.400	0.390	0.422	0.439	0.428	0.423
36	0.380	0.372	0.401	0.415	0.408	0.402
37	0.361	0.354	0.381	0.394	0.388	0.382
38	0.343	0.337	0.362	0.373	0.369	0.363
39	0.326	0.321	0.344	0.354	0.351	0.345
40	0.311	0.305	0.325	0.335	0.333	0.328
41	0.295	0.291	0.310	0.317	0.316	0.311
42	0.281	0.277	0.294	0.300	0.302	0.295
43	0.268	0.263	0.279	0.284	0.283	0.279
44	0.254	0.250	0.264	0.269	0.269	0.265
45	0.242	0.238	0.250	0.254	0.254	0.251
46	0.230	0.226	0.237	0.241	0.241	0.238
47	0.218	0.214	0.222	0.228	0.227	0.225
48	0.207	0.203	0.212	0.215	0.215	0.212
49	0.195	0.193	0.200	0.203	0.203	0.200
50	0.185	0.183	0.189	0.192	0.192	0.188
51	0.175	0.173	0.178	0.181	0.181	0.178
52	0.165	0.164	0.168	0.171	0.170	0.168
53	0.156	0.154	0.158	0.161	0.159	0.158
54	0.147	0.145	0.149	0.151	0.150	0.148
55	0.138	0.137	0.140	0.142	0.141	0.139
56	0.130	0.129	0.131	0.133	0.132	0.130
57	0.122	0.121	0.123	0.124	0.124	0.122
58	0.114	0.114	0.114	0.115	0.115	0.111
59	0.106	0.107	0.107	0.107	0.107	0.107
60	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Numero dei viventi per età secondo le diverse tavole di mortalità.

Tabella B.

ETÀ	Deparcieux		W. Farr		H ^M		Morgan		Pensionati		Rameri	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1,666	511,745	1,000,000
1	1,241	428,026	765,770
2	1,181	400,505	673,560
3	1,000	1,136	386,290	633,467
4	970	1,103	377,077	609,185
5	948	1,078	370,358	590,275
6	930	365,325	576,391
7	915	361,372	566,429
8	902	358,062	559,521
9	890	355,328	554,938
10	880	1000	353,031	1000	10 0,000	5,000	1000	552,306
11	872	351,048	99,510	4,962	548,977
12	866	349,272	99,113	4,924	545,634
13	860	347,606	98,784	4,886	542,276
14	854	345,969	98,496	4,848	538,901
15	848	344,290	98,224	4,810	535,501
16	842	342,509	97,942	4,771	531,976
17	835	340,581	97,624	4,731	528,420
18	828	338,469	97,245	4,691	524,836
19	821	336,149	96,779	4,649	521,226
20	814	927	333,608	945	96,223	4,604	922	100,000	927	517,580	935
21	806	330,844	95,614	4,554	97,654	512,212
22	798	328,043	94,971	4,500	96,874	506,774
23	790	325,207	94,321	4,444	95,927	501,273
24	782	322,339	93,683	4,386	94,179	495,707
25	774	319,442	93,061	4,328	92,896	490,071
26	766	316,516	92,444	4,270	91,559	485,435
27	758	313,562	91,826	4,212	90,508	480,751
28	750	310,581	91,192	4,154	89,617	476,018
29	742	307,572	90,538	4,096	88,923	471,234

Avvertenza. - Le cifre di questa tabella furono la più parte tolte, dalle opere originali, così la tavola del W. FARR dalla sua opera classica, *English life Table*. Quella detta H^M delle 20 Compagnie Inglesi dall'opera *Tables deduced from the Mortality Experience of Life Assurance Companies*, sopra citate. (Si sono qui ommesse le cifre della riduzione a 1000 bastando per questa dividere per 100 le cifre originali). Pei pensionati, dall'opera dell'ing. GARBARINO, *Statistica dei pensionati dello Stato*, Roma, per cura del Ministero delle finanze. Quella della popolazione maschile del Regno d'Italia del RAMERI, dagli *Annali di Statistica*, serie 2^a, vol. 10, Roma, 1879. Finalmente per la DEPARCIEUX e per la MORGAN abbiamo ricorso all'opera del professore W. KARUP, *Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung*, Leipzig, 1874.

Numero dei viventi per età secondo le diverse tavole di mortalità.

Segue Tabella B.

ETÀ	Deparcieux		W. Farr		H ^M		Morgan		Pensionati		Rameri	
	1	2	3	4	5	6	7					
30	734	835	304,534	863	89,865	4,038	808	88,412	820	466,440	843	
31	726	301,466	89,171	3,981	87,551	461,832	
32	718	298,366	88,465	3,925	86,699	457,210	
33	710	295,232	87,748	3,869	85,877	452,574	
34	702	292,061	87,021	3,814	85,042	447,921	
35	694	288,850	86,281	3,761	84,349	443,356	
36	686	285,596	85,524	3,708	83,564	438,231	
37	678	282,296	84,745	3,655	82,806	433,189	
38	671	278,944	83,943	3,602	81,967	428,127	
39	664	275,538	83,122	3,549	80,961	423,041	
40	657	748	272,073	770	82,284	3,496	698	79,817	740	417,933	755	
41	650	268,544	81,436	3,443	78,863	412,360	
42	643	264,948	80,582	3,390	77,807	406,752	
43	636	261,280	79,717	3,337	76,559	401,106	
44	629	257,534	78,830	3,284	75,433	395,420	
45	622	253,708	77,919	3,231	74,176	389,696	
46	615	249,796	76,969	3,178	73,030	383,311	
47	607	245,795	75,973	3,124	71,817	376,876	
48	599	241,700	74,932	3,070	70,523	370,387	
49	590	237,508	73,850	3,016	69,326	363,843	
50	581	660	233,216	660	72,726	2,962	592	68,063	631	357,268	647	
51	571	228,821	71,566	2,906	66,663	349,743	
52	566	224,195	70,373	2,848	65,289	342,176	
53	549	219,437	69,138	2,788	63,839	334,565	
54	538	214,552	67,852	2,726	62,415	326,906	
55	526	209,539	66,513	2,660	60,901	319,198	
56	514	204,395	65,114	2,590	59,276	311,354	
57	502	199,114	63,652	2,517	57,725	303,453	
58	489	193,686	62,125	2,442	56,021	295,509	
59	476	188,102	60,533	2,365	54,502	287,504	
60	463	532	182,350	517	58,866	2,283	457	52,187	483	279,416	505	
61	450	176,421	57,119	2,202	50,668	269,375	
62	437	170,303	55,289	2,117	48,839	259,198	
63	423	163,989	53,374	2,030	46,746	248,870	
64	409	157,474	51,373	1,943	44,805	238,386	
65	395	150,754	49,297	1,856	42,704	227,734	
66	380	143,833	47,156	1,769	40,845	216,566	
67	364	136,718	44,960	1,682	38,874	205,184	
68	347	129,421	42,717	1,593	36,876	193,570	
69	329	121,963	40,443	1,508	31,885	181,701	
70	310	352	114,370	323	38,124	1,421	284	32,754	303	169,735	305	
71	291	106,675	35,753	1,334	30,706	157,285	

Numero dei viventi per età secondo le diverse tavole di mortalità.

Segue Tabella B.

ETÀ	Deparcieux		W. Farr		H ^M		Morgan		Pensionati		Rameri	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
72	271	98,919	33,320	1,217	28,438	111,720
73	251	91,149	30,828	1,160	26,301	132,032
74	231	83,416	28,269	1,073	24,110	119,212
75	211	75,777	25,691	986	21,885	106,255
76	192	68,294	23,164	899	19,798	96,025
77	173	61,026	20,700	812	17,661	86,051
78	154	54,036	18,326	726	15,714	76,321
79	136	47,331	16,068	640	13,918	66,228
80	118	135	41,115	115	13,930	554	110	12,102	111	57,579	102
81	101	35,283	11,915	472	10,437	48,573
82	85	29,922	10,032	396	8,956	40,418
83	71	25,060	8,313	326	7,582	33,220
84	59	20,711	6,768	261	6,272	26,923
85	48	16,877	5,422	205	5,117	21,585
86	38	13,549	4,284	159	4,200	17,242
87	29	10,709	3,343	121	3,353	13,482
88	22	8,325	2,570	91	2,609	10,329
89	16	6,360	1,955	66	2,017	7,795
90	11	13	4,770	10	1,460	46	9	1,539	11	5,904	8
91	7	3,510	1,052	30	1,224	4,676
92	4	2,531	723	20	992	3,623
93	2	1,787	469	13	734	2,731
94	1	1,234	274	8	572	1,995
95	0	833	135	4	457	1,427
96	548	49	2	314	1,030
97	352	9	1	230	692
98	220	0	0	182	404
99	134	133	170
100	0	79	0	0	112	0	85	0

I coefficienti della tabella *A* si sono ottenuti prendendo per base le diverse tavole di sopravvivenza e si è tenuto in tutte costante l'*a* (valore attuale dell'annuità di una lira a 60 anni di età). Il prezzo di quest'annuità si è assunto di 10, valore che in generale di poco supera quelli, che si hanno per le diverse tavole, e che perciò torna a vantaggio della maggior garanzia delle promesse.

Un accurato confronto delle cifre date alla tabella *A* potrebbe indicare quale sia la tavola di mortalità che meglio si presti a favorire gli interessi dei concorrenti senza discapito della solidità dell'istituzione coll'esagerarne le promesse. Noi crediamo più opportuno fare questo esame graficamente poichè, rappresentate le curve che ci danno i coefficienti riferendole a due assi (degli anni di età e dei valori), esse ci faranno tosto vedere come questi coefficienti procedono alle diverse età per ciascuna delle tavole scelte, ed avendole tutte sott'occhio, ci sarà agevole di stabilire quale sia la convenienza particolare di ciascuna.

Nella tavola grafica *A* rappresentiamo le curve dei coefficienti dati nella tabella numerica *A*, portando sull'asse delle ascisse le età ad eguali distanze e sulle ordinate innalzate da questi punti misurando i coefficienti corrispondenti.

Noi osserviamo tosto come i coefficienti, che si tengono costantemente più elevati siano quelli fondati sulla Morgan; al contrario quelli calcolati sulla H^M si tengono costantemente al disotto; possiamo quindi senza timore asserire, che, per ragioni opposte, le due tavole di coefficienti menzionate dovranno essere scartate nei nostri calcoli, la prima perchè troppo favorevole ai soci, a discapito forse della stabilità dell'istituzione, la seconda perchè troppo bassa.

Rimangono le quattro curve comprese tra quelle corrispondenti alle tavole H^M e Morgan, per i coefficienti calcolati colle tavole del Deparcieux. W. Farr, Rameri e Pensionati. Le due ultime essendo tavole paesane sono quelle che *a priori* avremmo voluto indicare per la scelta, ma i coefficienti con esse ottenuti si mantengono costantemente più alti di quelli calcolati sulla W. Farr e Deparcieux e le società adottando queste tavole nazionali corrono pericolo di promettere più di quello, che potrebbero poi mantenere; quindi a maggior garanzia dell'istituzione noi crediamo di consigliare la Deparcieux la quale si mantiene abbastanza superiore alla H^M da favorire i soci pensionati, nè troppo se ne discosta ed in modo da rendere esagerate le promesse della Cassa. Di più la tavola di sopravvivenza del Deparcieux è molto conosciuta, e se essa è fatta su capi scelti, osserviamo che gli operai i quali pensano ad assicurarsi una pensione per la vecchiaia si possono generalmente considerare come tali.

Crediamo pregio del nostro studio dare pure una tavola grafica che ci rappresenti le curve delle diverse tavole di sopravvivenza riportate alla tabella *B* servendoci delle cifre ottenute riducendo tutte le tavole a 1000 individui all'età di 10 anni. In questa, prendendo sempre come ascisse i diversi anni di età, e sulle ordinate corrispondenti portando i numeri dati dalla tavola numerica; fino all'età di 10 anni abbiamo seguito la Deparcieux e quindi da questa età fino all'estrema per mezzo delle cifre riferite a 1000 a 10 anni si ottengono le curve che ci danno i sopravvivenenti alle diverse età secondo le tavole che ci servirono pei nostri calcoli. Può interessare la corrispondenza che si incontra tra la tavola *A* e la tavola *a*; anche in questa come nella *A* le curve della H^M e della Morgan comprendono le altre, ma è invertita la posizione; la Morgan, che era la più alta è passata ad essere la più bassa ed il contrario dicasi per la H^M , è evidente che una maggiore mortalità quale si incontra nella Morgan deve produrre un rialzo nei coefficienti di pensione, le ragioni opposte valgono per la H^M . Nelle altre intermedie non si osserva più questa assoluta corrispondenza e potrebbe ciò fare nascere dubbi sulla esattezza dei nostri coefficienti.

Analizzando però la formola da cui essi si deducono e come vi concorrano le cifre dei sopravvivenenti noi possiamo facilmente darci ragione dell'apparente disaccordo. In fatti riproduciamo la formola

$$p_e = (1+r)^{60-e} \times \frac{y_e}{y_{60}} \times \frac{1}{a}.$$

In essa abbiamo di necessità il fattore $(1+r)^{60-e}$ costante a ciascuna età per tutte le tavole adottate, e per nostra condizione $\frac{1}{a}$ è pure costante; quindi la differenza di due dei p_e calcolati dipende dal fattore $\frac{y_e}{y_{60}}$ in cui variano y_e ed y_{60} per ciascuna tavola.

Si prendano i logaritmi della formola

$$\log. p_e = \log. y_e - \log. y_{60} - \log. a + (60-e) \log. (1+r)$$

facendo le differenze prime, abbiamo

$$\frac{\delta p_e}{p_e} = \frac{\delta y_e}{y_e} - \frac{\delta y_{60}}{y_{60}}.$$

Poichè come già vedemmo gli altri termini sono costanti. Ora il semplice esame dell'equazione differenziale cui siamo arrivati ci fa

vedere che il segno della differenza tra due coefficienti p_e dipende dal segno dell'altro membro dell'equazione composto di due termini

$$\frac{\delta y_e}{y_e} - \frac{\delta y_{60}}{y_{60}}$$

segno che per le curve dei coefficienti si deve mantenere costante finchè non succedono incontri. E ad esempio per le curve Deparcieux e W. Farr, che si intersecano in un punto delle prime età, si potrebbe provare che vi ha un cambiamento di segno tra l'una parte e l'altra del punto di passaggio.

B.

**Riduzione da apportarsi ai coefficienti a fondo perduto
quando la pensione si liquida prima dei 60 anni.**

Si può avverare il caso che alcuno degli operai resti inetto al lavoro prima dei 60 anni ed alcune società gli ammettano il dritto di domandare che la sua pensione gli venga liquidata prima del 60° anno.

Ad una più equa risoluzione di questo problema occorrerebbero tavole di invalidità, che noi non abbiamo (esse sono studiate da qualche tempo soltanto in Germania).

Noi quindi ci limiteremo a stabilire quale sarebbe la diminuzione da apportarsi alla pensione a fondo perduto che si otterrebbe a 60 anni quando si volesse liquidare la pensione prima di questa età.

Sia l l'età alla quale si vuol liquidare la pensione invece che a 60 anni. Sieno p_{el} i coefficienti per la liquidazione all'età l come p_{e60} rappresenta quelli per i 60 di età; per maggior comodità di calcolo ci torna conto di trovare del quanto per cento si debbano diminuire i p_{e60} per avere i p_{el} . Se si dica quindi α questo nuovo coefficiente si potrà scrivere

$$\alpha_l = \frac{p_{e60} - p_{el}}{p_{e60}} \times 100.$$

$$\alpha_l = 100 \left(1 - \frac{p_{el}}{p_{e60}} \right).$$

Ma per la formola stabilita al capitolo A possiamo scrivere

$$p_{el} = \frac{y_e}{(1+r)^e} : \frac{y_l}{(1+r)^l} \times \frac{1}{a_l}$$

$$p_{e60} = \frac{y_e}{(1+r)^e} : \frac{y_{60}}{(1+r)^{60}} \times \frac{1}{a_{60}}$$

Dividiamo membro a membro queste due equazioni, si avrà

$$\frac{p_{el}}{p_{e60}} = \frac{y_{60}}{(1+r)^{60}} : \frac{y_l}{(1+r)^l} \times \frac{a_{60}}{a_l}$$

ma ponendo in p_{e60} , $e = l$ risulta

$$p_{l60} = \frac{y_l}{(1+r)^l} : \frac{y_{60}}{(1+r)^{60}} \times \frac{1}{a_{60}}$$

sostituendo quindi

$$\frac{p_{el}}{p_{e60}} = \frac{1}{p_{l60}} \times \frac{1}{a_l}$$

se ora nel valore di α_l stabilito poniamo il valore di $\frac{p_{el}}{p_{e60}}$ ora trovato si ottiene

$$\alpha_l = 100 \left(1 - \frac{1}{p_{l60}} \times \frac{1}{a_l} \right)$$

formola che si può facilmente calcolare poichè i p_{l60} sono i coefficienti dati da noi al capitolo A ed a_l si trova calcolato in tutti i trattati di assicurazione.

Noi sull'esempio di alcune società porremo che l'età minima a cui si può liquidare la pensione sia 45 anni e diamo qui il valore di α dai 45 anni fino ai 60

Età	Per cento	Età	Per cento
45. . . .	70	53. . . .	46
46. . . .	68	54. . . .	41
47. . . .	66	55. . . .	36
48. . . .	63	56. . . .	30
49. . . .	60	57. . . .	23
50. . . .	57	58. . . .	15
51. . . .	54	59. . . .	6
52. . . .	50	60. . . .	0

riduzione calcolata sulla tavola di mortalità del Deparcieux.

Possono questi coefficienti parere a prima vista esagerati, ma non lo saranno, per chi si faccia a considerare le differenze di mortalità notevoli tra queste età ed i 60 anni ed il meno sensibile aumento di capitale, che ha luogo per la minor durata del tempo per cui viene tenuto a frutto, è noto che un capitale all'interesse composto del 4 per cento può essere raddoppiato in 18 anni. D'altra parte, come già dicemmo, questa tavola di coefficienti dovrebbe fondarsi su altre tavole, poichè è chiaro, che tra invalidi la mortalità sarebbe molto più rapida e quindi i prezzi dell'annualità da noi assunti esagerati.

Noi abbiamo creduto dare questi coefficienti onde non lasciare una lacuna nel nostro lavoro, ma a nostro avviso nel caso di invalidità sarebbe forse miglior consiglio liquidare la pensione e restituire il capitale senz'altro in base ai coefficienti fatti per depositi a fondo recuperabile o su altro criterio da stabilirsi.

C.

Coefficienti a fondo recuperabile.

In questo ultimo capitolo ci si presenta il problema di calcolare quale sia il coefficiente di pensione da stabilire per i depositi fatti alle diverse età quando vogliasi che i fondi depositati possano essere in una giusta parte recuperabili nel caso di morte a favore degli eredi.

Il carattere di mutualità dell'istituzione di pensioni fatte a fondo recuperabile sta nel fare sì, che i superstiti alle diverse età godano di una parte del capitale versato da quelli che muoiono, in altri termini: chi si iscrive per una pensione a fondo recuperabile, riceve bensì una somma in restituzione dei suoi depositi, ma non l'intera somma sulla quale gli sarebbe valutata la pensione nel caso che avesse fatti i suoi versamenti a fondo perduto.

Noi pertanto per concretare i nostri calcoli e seguendo l'esempio di società già esistenti stabiliremo che gli iscritti a fondo recuperabile abbiano diritto ai $\frac{9}{10}$ del capitale che si dovrebbe riportare nel loro credito.

Ricordiamo che per 1 lira versata all'età e si avrà a 60 anni un capitale

$$(1 + r)^{60 - e} \frac{y_e}{y_{60}} = v_e$$

che il valore alla stessa età di un'annuità vitalizia di lire 1 alla stessa età è

$$a_{60} = \sum_{i=1}^{40} \frac{1}{(1+r)^i} \times \frac{y_{60+i}}{y_{60}}$$

Supponiamo una società, che conti alle diverse età il numero di individui dato da una tavola di mortalità e che ciascuno di questi individui versi annualmente 1 lira; non occorre notare, che la differenza tra due dei successivi y_e (tenendo sempre le indicazioni fin qui adottate) dà il numero dei morti tra le due età e ed $e+1$.

Stando a quanto si è previamente stabilito si potrà formare il quadro seguente di cui diamo alcuni termini.

Età	Numero di individui appartenenti alla società	Capitale alle diverse età disponibile per il versamento di una lira annua da ciascuno dei soci dopo eseguita la restituzione dei $\frac{9}{10}$ per le morti sopravvenute.
e	y_e $y_e = z_e$
$e+1$	y_{e+2}	$y_e(1+r) - \frac{9}{10}(y_e - y_{e+1}) = z_e(1+r) - \frac{9}{10}(y_e - y_{e+1}) = z_{e+1}$
$e+2$	y_{e+1} $z_{e+1}(1+r) - \frac{9}{10}(y_{e+1} - y_{e+2}) = z_{e+2}$
.....
.....
60	y_{60} $z_{59}(1+r) - \frac{9}{10}(y_{59} - y_{60}) = z_{60}$

Siccome z_{60} dà il valore del capitale disponibile per gli y_{60} individui che incominciando a versare una lira all'età e arrivarono ai 60 anni, così per quanto si disse al capitolo A si avrà il coefficiente c_{e60}

$$c_{e60} = \frac{z_{60}}{y_{60}} \times a_{60}$$

trattasi ora di trasformare questa formola in modo da renderla più acconcia al calcolo.

Sostituiamo perciò nei valori degli z_e dati all'ultima colonna del

nostro quadro il loro valore trovato all'età che precede immediatamente avremo

$$z_{e+2} = y_e (1+r)^2 - \frac{9}{10} (y_e - y_{e+1}) (1+r) - \frac{9}{10} (y_{e+1} - y_{e+2})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_{e+i} = y_e (1+r)^i - \frac{9}{10} (y_e - y_{e+1}) (1+r)^{i-1} - \dots - \frac{9}{10} (y_{e+i-1} - y_{e+i})$$

.....

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} (y_e - y_{e+1}) (1+r)^{60-e-1} -$$

$$- \frac{9}{10} (y_{e+1} - y_{e+2}) (1+r)^{60-e-2} - \dots \dots - \frac{9}{10} (y_{59} - y_{60}).$$

z_{60} si può scrivere

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left\{ \frac{1}{1+r} [y_e (1+r)^{60-e} + \right.$$

$$+ y_{e+1} (1+r)^{60-e-1} \dots + y_{59} (1+r)] -$$

$$\left. - [y_{e+1} (1+r)^{60-e-1} + y_{e+2} (1+r)^{60-e-2} + \dots + y_{60}] \right\}$$

I due termini tra le parentesi [] si indichino con M ed N , essi sono rispettivamente uguali

$$M = (1+r)^{60} \sum_1^{60} \frac{y_e}{(1+r)^e} \quad N = (1+r)^{60} \sum_0^{60} \frac{y_{e+1}}{(1+r)^{e+1}}$$

così che z_{60} diventa

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left[\frac{1}{1+r} M - N \right]$$

Già si è visto come

$$a_e = \frac{1}{y_e} \sum_1^{100-e} \frac{y_{e+i}}{(1+r)^i} = \frac{(1+r)^e}{y_e} \sum_1^{100-e} \frac{y_{e+i}}{(1+r)^{e+i}}$$

ed

$$a_{60} = \frac{(1+r)^{60}}{y_{60}} \sum_1^{40} \frac{y_{60+i}}{(1+r)^{60+i}}$$

ossia

$$\frac{1}{(1+r)^e} y_e a_e = \sum_{i=1}^{100-e} \frac{y_{e+1}}{(1+r)^{e+1}}$$

e

$$\frac{1}{(1+r)^{60}} y_{60} a_{60} = \sum_{i=1}^{40} \frac{y_{60+i}}{(1+r)^{60+i}}.$$

Quindi il valore dato di N si potrà scrivere

$$N = (1+r)^{60} \left[\frac{1}{(1+r)^e} y_e a_e - \frac{1}{(1+r)^{60}} y_{60} a_{60} \right]$$

Poichè i due Σ contengono il primo i termini da 1 a 100 ed il secondo da 1 a 40 e la loro differenza dà appunto i termini del Σ di N cioè 60.

Analogamente si ha

$$M = (1+r)^{60} \left[\frac{1}{(1+r)^{e-1}} y_{e-1} a_{e-1} - \frac{1}{(1+r)^{59}} y_{59} a_{59} \right]$$

sostituendo questi valori di M e di N in z_{60} si ha

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left\{ \frac{1}{1+r} [y_{e-1} a_{e-1} (1+r)^{60-e+1} - (1+r) y_{59} a_{59}] - [y_e a_e (1+r)^{60-e} - y_{60} a_{60}] \right\}$$

Ma

$$a_{e-1} = (1+a_e) \frac{y_e}{y_{e-1} (1+r)}$$

e

$$y_{e-1} a_{e-1} (1+r) = (1+a_e) y_e$$

ossia

$$y_{59} a_{59} (1+r) = (1+a_{60}) y_{60}$$

Sostituendo questi valori nella prima delle parentesi []

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left\{ \frac{1}{1+r} [(1+a_e) y_e (1+r)^{60-e} - (1+a_{60}) y_{60}] - [y_e a_e (1+r)^{60-e} - a_{60} y_{60}] \right\}$$

Riunendo i due termini in parentesi []

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left\{ y_e (1+r)^{60-e} \left(\frac{1+a_e}{(1+r)} - a_e \right) - y_{60} \left(\frac{1+a_{60}}{1+r} - a_{60} \right) \right\}$$

e riducendo allo stesso denominatore le quantità tra le parentesi ()

$$z_{60} = y_e (1+r)^{60-e} - \frac{9}{10} \left\{ y_e (1+r)^{60-e} \frac{1-a_e r}{1+r} - y_{60} \frac{1-a_{60} r}{1+r} \right\}$$

e finalmente

$$c_{e60} = \frac{z_{60}}{a_{60} y_{60}} = \left[\frac{y_e (1+r)^{60-e}}{a_{60} y_{60}} \right] - \frac{9}{10} \left\{ \frac{y_e (1+r)^{60-e}}{a_{60} y_{60}} \times \frac{1-a_e r}{1+r} - \frac{1}{a_{60}} \frac{1-a_{60} r}{1+r} \right\}$$

ossia ricordando il valore di p_{e60} trovato al capitolo A.

$$c_{e60} = p_{e60} - \frac{9}{10} \left\{ p_{e60} \left(\frac{1-a_e r}{1+r} \right) - \left(\frac{1-a_{60} r}{1+r} \right) \times \frac{1}{a_{60}} \right\}$$

Per evitare tutte le trasformazioni algebriche fin qui esposte si può ricorrere ad un metodo sintetico, il quale portandoci allo stesso risultato ci farà parere più agevole il cammino che ad esso ci guida.

Noi pertanto riguarderemo il nostro problema sotto un altro punto di vista e lo coordineremo ad idee e principii già svolti ampiamente e conosciuti. L'individuo o il socio, il quale ad un'età qualunque (e quello che dicesi per un'età vale per tutte) fa un deposito allo scopo di ricevere dopo toccati i 60 anni una pensione e nel tempo stesso alla condizione che potessero i suoi eredi ritirare una parte del capitale versato quando egli prima del tempo stabilito venisse a morire, si trova nelle condizioni identiche di chi si assoggettasse ad una assicurazione mista (1), la differenza sta in questo soltanto, che il nostro socio arrivato ai 60 anni riceve il capitale che si è assicurato sotto forma di annualità sua vita naturale durante.

(1) Il professor PAOLINI nel pregiato suo lavoro "Aritmetica sociale, " cui avemmo già da ricorrere, tratta pure di quest'argomento con molta chiarezza, vedi pag. 157 e precedenti *Annali di statistica*, Serie 2^a, vol. 14. — Roma, 1880. — Ministero d'agricoltura, industria e commercio. Direzione di Statistica.

Consideriamo per ora, tenendo le denominazioni poste prima, l'intero capitale senza preoccuparci della forma sotto la quale verrà pagato. Questo capitale per quello che si disse a pag. 12 sarà

$$c_{e60} \times a_{60}$$

mentre che per gli assicurati a fondo perduto è

$$p_{e60} \times a_{60}$$

ora per le condizioni fin qui esposte il primo capitale dovrà eguagliare quest'ultimo diminuito però di un tanto il quale valga a porre il sodalizio in grado di soddisfare il nuovo in pegno di pagamento dei $\frac{9}{10}$ della somma versata e se noi diciamo ${}_{60-e}A_e$ questo valore potremo avere

$$c_{e60} = p_{e60} \times a_{60} - \frac{9}{10} \times {}_{60-e}A_e.$$

${}_{60-e}A_e$ è il valore del capitale corrispondente all'assicurazione temporaria di una lira in caso di morte dall'età di e anni a 60 anni riferito allo spirare del 60° anno ed a ciascuno degli y_{60} superstiti di quelli y_e che esistevano all'età e . In altri termini ${}_{60-e}A_e$ è per ciascuno degli y_{60} superstiti il valore individuale della somma che la società avrebbe secondo le tavole di mortalità dovuto pagare per gli $y_e - y_{60}$ singoli casi di morte. Se ${}_{60-e}P_e$ è il valore all'età e dello stesso capitale, ma riferito a ciascuno degli y_e depositanti all'età e , si ha

$${}_{60-e}A_e = (1+r)^{60-e} \times \frac{y_e}{y_{60}} \times {}_{60-e}P_e$$

ma (1)

$$\begin{aligned} {}_{60-e}P_e &= P_e - P_{60} \times {}_{60-e}Q_e = \\ &= \frac{1-a_e r}{1+r} - \frac{1-a_{60} r}{1+r} (1+r)^{-60+e} \frac{y_{60}}{y_e} \end{aligned}$$

e sostituendo

$${}_{60-e}A_e = \frac{1-a_e r}{1+r} (1+r)^{60-e} \times \frac{y_e}{y_{60}} - \frac{1-a_{60} r}{1+r}$$

(1) L'egregio professor PAOLINI dà a pag. 157 dell'opera citata la formola che noi riportiamo pel valore del capitale corrispondente all'assicurazione riferentesi ad un numero limitato di anni.

e ricordando il valore di p_{e60}

$${}_{60-e}A_{60} = p_{e60} \times a_{60} \times \frac{1 - a_e r}{1 + r} - \frac{1 - a_{60} r}{1 + r}$$

sostituiamo questo valore di ${}_{60-e}A_e$ nella prima equazione posta per c_{e60} ed avremo

$$c_{e60} \times a_{60} = p_{e60} \times a_{60} - \frac{9}{10} \left\{ p_{e60} \times a_{60} \times \frac{1 - a_e r}{1 + r} - \frac{1 - a_{60} r}{1 + r} \right\}$$

e finalmente dividendo per a_{60} si ha il coefficiente cercato

$$c_{e60} = p_{e60} - \frac{9}{10} \left\{ p_{e60} \times \frac{1 - a_e r}{1 + r} - \frac{1 - a_{60} r}{1 + r} \times \frac{1}{a_{60}} \right\}$$

Formola che noi già avevamo trovato direttamente e per via analitica.

Per mezzo di essa possiamo facilmente calcolare c_{e60} , poichè i p_{e60} per le diverse tavole di mortalità li troviamo già fatti nella tabella *A* da noi data al capitolo *A.*, gli a_e sono riportati in tutte le pubblicazioni che trattano assicurazioni sulla vita, diverse delle quali noi già abbiamo citate ed r non è che il tasso di interesse, che si assume del 4 per cento.

Presentiamo nella tabella *C* qui unita questi coefficienti calcolati sulla tavola di sopravvivenza delle società inglesi *H^M*.

Il calcolo su questa tavola ci tornò più agevole poichè potemmo per essa trovare già calcolato per tutte le età il termine

$$\frac{1 - a_e r}{1 + r} = P_e \quad (1)$$

e per noi la formola diventò

$$c_{e60} = p_{e60} - \frac{9}{10} \left(p_{e60} \times P_e - P_{60} \frac{1}{10} \right)$$

continuando a tenere il valore dell'annuità di 1 lira a 60 anni eguale a 10, noi trovammo

$$\frac{9}{100} P_{60} = 0,054$$

(1) Vedi la *Théorie Mathématique des Assurances sur la vie* par ÉMILE DORMOY — Paris, 1878. Table X, pag. 240. Del resto il P_a di questa tavola non è che il valore del premio unico da pagarsi per avere alla morte assicurato un capitale di 1,000,000, che noi abbiamo con una semplice divisione ridotto ad 1.

costante per tutte le età, ed ottenemmo così la formola finale, su cui calcolammo la nostra tabella

$$c_{e60} = 0,054 + p_{e60} \left(1 - \frac{9}{10} P_e \right).$$

Coefficienti a fondo recuperabile calcolati sulla tavola di sopravvivenza H^M.

Tabella C.

ETÀ	Coefficienti	ETÀ	Coefficienti	ETÀ	Coefficienti
10	1.054	27	0.447	44	0.210
11	1.008	28	0.455	45	0.200
12	0.962	29	0.435	46	0.190
13	0.919	30	0.415	47	0.181
14	0.879	31	0.395	48	0.173
15	0.839	32	0.375	49	0.164
16	0.801	33	0.357	50	0.157
17	0.766	34	0.341	51	0.150
18	0.731	35	0.325	52	0.143
19	0.697	36	0.309	53	0.136
20	0.665	37	0.294	54	0.130
21	0.634	38	0.280	55	0.124
22	0.605	39	0.267	56	0.118
23	0.577	40	0.254	57	0.113
24	0.550	41	0.242	58	0.108
25	0.525	42	0.231	59	0.104
26	0.500	43	0.220	60	0.100

Nella scelta della tavola di sopravvivenza H^M fummo indotti, come già si accennò, dal trovare eseguiti con questa tavola una buona parte dei calcoli preliminari che noi avremmo dovuto fare per le altre.

Crediamo però, che i coefficienti da noi dati alla tabella C non debbano essere considerati come un esempio soltanto, ma possano pure essere praticamente adottati da quei sodalizi cui occorra farne uso.

Nel capitolo A abbiamo graficamente fatto vedere quale sia l'influenza, che le tavole di sopravvivenza esercitano sui coefficienti a

fondo perduto, vedemmo quali debbono ritenersi troppo vantaggiose ai soci, quali alla società. Nell'indicare la Deparcieux come la più conveniente noi fummo guidati dall'osservare, che essa dopo la H^M , era quella più favorevole alla stabilità del sodalizio. La stessa ragione può ora valere a suggerire la H^M pei coefficienti di pensione a fondo recuperabile, tanto più, che per il carattere di mutualità del sodalizio, gli utili che da questa scelta potrebbero venire alla società tornerebbero sempre a vantaggio dei soci stessi.

Il nostro studio sarebbe così terminato. Importa però che facciamo seguire alcune osservazioni le quali servano a bene stabilire lo scopo che in esso ci siamo prefissi, e nel tempo stesso a norma di quelli che credessero di servirsene.

Il titolo stesso del nostro lavoro annunzia uno studio puramente matematico. Si sono voluti stabilire e dimostrare i principii da cui deve partire chi voglia formare tavole di coefficienti per pensione. I quadri debbono essenzialmente dimostrare quale influenza abbiano sulle pensioni le diverse tavole di sopravvivenza, tenendo costante il saggio a cui si intende impiegato il denaro versato (noi abbiamo inoltre tenuto pure costante il prezzo dell'annualità a partire dall'età limite). Nel corso del nostro studio abbiamo bensì mostrato di preferire piuttosto una tavola che l'altra, ma i nostri apprezzamenti sono da considerare soltanto come le conseguenze matematiche, che emergono dall'osservazione dei risultati ottenuti.

La brevità del tempo non ci permise di estenderci anche alla parte pratica ed economica.

Teniamo quindi a stabilir bene che i nostri risultati non devono servire immediatamente alle società, ma sibbene ai loro calcolatori od *attuari*, (come costoro sogliono essere chiamati all'estero), i quali terranno conto delle diversità di regione in cui opera la società, tanto per la legge di mortalità, quanto per il saggio d'interesse. In generale sarà prudente attenersi ad una tavola di sopravvivenza anche più lenta della Deparcieux, quale sarebbe la H^M delle 20 compagnie inglesi. La tavola del Deparcieux fu costruita alla fine del secolo scorso ed è provato, che la vita media tende ad aumentare soprattutto nelle classi dei pensionati. Così pure è da badare molto alla differenza dei saggi e sarebbe forse buona misura di prudenza ridurre il saggio al 3 o 3 $\frac{1}{2}$ per cento (1) stante il deprezzamento del capitale. Pei pensionati in

(1) A prova della differenza che può portare anche il $\frac{1}{2}$ per cento nel saggio riportiamo qui poche linee del progetto di legge più sotto citato. Sia un impiego di 100 lire fatto a pro di un individuo di 10 anni al 5 per cento e 4 $\frac{1}{2}$

Francia si teneva dapprima il 5 per cento, poi il 4 $\frac{1}{2}$ per cento. Il primo saggio fu pure adottato, con la diminuzione del 10 per cento sulla pensione, in un progetto di legge per l'*istituzione di una Cassa di rendite vitalizie per la vecchiaia*, presentato nella Sessione 1859 del Parlamento subalpino; il quale progetto non ebbe poi effetto, come tutti sanno.

Però anche nei limiti che il tempo e le nostre forze ci imponevano, vogliamo sperare, che il lavoro possa riuscire di qualche utilità a chi deve occuparsi di questi calcoli di tariffe, molto tediosi invero, ma tanto importanti per la pratica.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

CHARLON HIPPOLYTE. — *Théorie mathématique des opérations financières*. — Paris, 1869.

DORMOY EMILE. — *Théorie mathématique des assurances sur la vie*. — Paris, 1878.

FARR WILLIAM. — *Tables of Lifetimes, Annuities, and Premiums with an Introduction*. — London, 1864.

GARBARINO GIUSEPPE. — *Statistica dei Pensionati dello Stato nel decennio 1868-1877 e nell'anno 1878*. — Ministero delle Finanze e del Tesoro. — Roma, 1879.

HARDY RALPH PRICE. — *Valuation Tables based upon the "Institute of Actuaries' Mortality experience (H^M) Table, " At 3, 3 $\frac{1}{2}$, 4 and 4 $\frac{1}{2}$ per Cent.* — London, 1873.

per cento, e poi un altro dell'impiego d'ugual somma a pro di un individuo di 20 anni, ed un terzo di 100 lire impiegate a pro di un individuo di anni 30, per rendite da cominciarsi a godere a 55 anni.

Queste rendite, calcolate sull'interesse del 5 per cento, sarebbero di

L. 119 00 per l'individuo di 10 anni;

„ 64 20 per quello di 20;

„ 33 60 per quello di 30.

Calcolate sull'interesse del 4 $\frac{1}{2}$, sarebbero :

L. 89 09 pel primo;

„ 50 23 pel secondo;

„ 27 48 pel terzo.

Vale a dire che sarebbvi tra le une e le altre rendite la differenza di

L. 29 91 pel primo;

„ 13 95 pel secondo;

„ 6 12 pel terzo.

(Vedi *Camera dei deputati (Documenti)*, Sessione 1859. — 10, A-B-C. Istituzione di una Cassa di rendite vitalizie per la vecchiaia).

INSTITUTE OF ACTUARIES' LIFE TABLES. — *Tables deduced from the Mortality experience of Life Assurance Companies.* — London, 1872.

KARUP W. — *Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung.* — Leipzig, 1874.

MAAS M. — *Théorie élémentaire des annuités viagères et des assurances sur la vie.* — Paris.

PAOLINI ANGELO. — *Saggio di Aritmetica sociale.* — *Annali di Statistica* del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, serie 2^a, volume 14, Roma, 1880.

RAMERI LUIGI. — *Legge statistica dell'influenza del sesso sulla durata della vita umana in Italia.* — *Annali di Statistica* del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, serie 2^a, vol. 10, Roma, 1879.

RIVISTA della *Beneficenza pubblica e degli Istituti di previdenza.* — Milano.

SULLA DETERMINAZIONE DELLA MORTALITÀ

MEDIANTE I DATI DELLA STATISTICA DELLA POPOLAZIONE

DEL DOTTOR

G. F. KNAPP.

Sino dal 1867 il signor D^r Knapp, direttore dell'ufficio di statistica della città di Lipsia, pubblicò un opuscolo col titolo suaccennato dedicandolo al Congresso statistico di Firenze. Sebbene questo opuscolo sia stato tradotto in italiano per intero, nel *Politecnico* del 1868, a cura dell'ingegnere Leonardo Loria, professore dell'Istituto tecnico superiore di Milano, crediamo opportuno, in vista dell'importanza dell'argomento, di darne qui un sunto abbastanza esteso, per il quale abbiamo ricorso alla gentilezza dello stesso egregio traduttore.

LA DIREZIONE.

Compito d'ogni ricerca sulla mortalità umana è di determinare, per mezzo dell'opportuno impiego di convenienti materiali, come diminuisce progressivamente un dato numero di individui nati, siano essi maschi o femmine, al progredire dell'età, per la morte dei singoli membri, trovando, come si usa dire, *la serie delle morti*. I *registri dello stato civile* dove si segnano le morti, con molte circostanze inerenti ed anche le nascite, e i *censimenti* che si effettuano ad epoche prestabilite, forniscono il materiale della statistica della popolazione. Essi però non sono facilmente accessibili. Tanto i registri dello stato civile, quanto gli elenchi dei censimenti sono sparsi nelle parrocchie o negli uffici amministrativi, e mentre i primi sono gelosamente conservati in grossi volumi, come elementi di grande importanza per la vita civile,

le liste dei censimenti durano soltanto dall'uno all'altro, in causa della loro immensa mole. Non essendo quindi possibile di valersi dei manoscritti o di pubblicarli nella loro integrità, si usa ricavarne dei compendi che si pubblicano a mezzo della stampa, a cura degli *uffici di statistica*, e sono questi compendi che servono di base a tutte le ricerche statistiche.

Un compendio come vien sempre pubblicato, sceglie speciali osservazioni, qualità, circostanze, e nella gran massa dei singoli casi riunisce quelli a cui è comune la scelta proprietà. Il compito del compilatore consiste quindi nel separare certe *classi* di individui, dietro l'enumerazione di certe osservazioni e nel determinare mediante i registri ed elenchi il numero degli individui che compongono ciascuna classe. L'uomo si può considerare sotto infiniti punti di vista diversi; è quindi evidente come si possano formare delle classi con infinite varietà, calcolandone poi la grandezza. Per noi però tali circostanze sono indifferenti occupandoci esclusivamente della mortalità e dovendo quindi servire soltanto delle classi di individui viventi o defunti. La grandezza di queste classi si può determinare soltanto quando siano date una o più circostanze di tempo, per esempio: per le classi dei viventi l'essere viventi ad una data epoca; per quelle dei defunti l'essere defunti dopo una data epoca, aggiungendo, se occorre, in entrambi i casi, anche l'epoca della nascita dei viventi o defunti ad un determinato istante.

Il confronto di un'epoca stabilita, colla data delle nascite ci dà l'idea dell'*età*. L'età è una quantità misurabile, è una proprietà che unitamente a molte altre appartiene ad ogni individuo e può sempre servire a stabilire una classe di viventi o defunti.

Il problema che ci proponiamo è di rappresentare le classi di viventi o defunti che sono rese calcolabili per mezzo degli elementi: *epoca delle nascite, durata della vita rispetto alla morte, età*; di rappresentare le relazioni di ogni classe colla serie delle morti e di mostrare poscia come possano servire all'esame della mortalità le classi, la cui grandezza è calcolata mediante la statistica della popolazione. Rintracceremo contemporaneamente come si distinguono le diverse classi fra loro e quali sono le speciali proprietà di ciascuna di esse.

Fra le classi da rappresentarsi in questo modo si troveranno anche tutte quelle che sono ordinariamente calcolate dagli statistici pratici; per esempio la classe di quei viventi che ad una data epoca si trovano in una certa classe di età, ovvero la classe di quelli che durante un certo periodo di tempo sono morti fra certi limiti d'età.

La relazione che lega ogni classe colla serie delle morti potrebbe essere espressa col linguaggio comune. Questo metodo non lascierebbe

alcun dubbio, ma è estremamente ampio, e per applicarlo bisognerebbe attribuire al lettore un'infinita pazienza, per cui conviene abbandonarlo e adottarne un altro che è molto più breve e sicuro.

Se si suppone la serie delle nascite come una funzione del tempo e quella delle morti come una funzione dell'età, tutte le classi dei viventi e dei defunti si possono rappresentare mediante relazioni di diverso genere di queste due funzioni. Si può raggiungere così lo scopo in modo generale con un metodo matematico, risparmiando molta fatica e guadagnando in sicurezza e chiarezza. — Cominceremo a sviluppare questo metodo analitico e generale di rappresentazione delle diverse classi, trattando anche della *determinazione diretta* della mortalità a cui è specialmente dedicato; poscia applicheremo le proposizioni trovate alla *determinazione indiretta* della mortalità, alla verifica degli antichi metodi, alla proposta d'alcuni metodi nuovi. Diciamo *determinazione diretta* della mortalità quella che è indipendente dalla densità delle nascite; *indiretta* invece quella che si fonda su tale densità.

Un'epoca si stabilisce mediante l'indicazione del numero delle unità di tempo che sono trascorse dal suo principio. La scelta della unità di tempo e del punto da cui si computa il percorso di esso è in nostro arbitrio. Nello sviluppo del nostro argomento noi parleremo di anni e questi a contare dalla nascita di Cristo.

Il numero delle unità di tempo trascorse si rappresenta ordinariamente con t ; attenendoci anche noi a quest'uso indicheremo sempre con t_0 l'epoca d'una nascita, riservando il segno t per l'indicazione degli altri avvenimenti. L'età d'un individuo è la differenza di due tempi, l'uno che diremo *tempo corrente* t è variabile, l'altro t_0 epoca della nascita è fisso e deve essere stabilito dapprima. L'età viene rappresentata nella stessa unità di tempo e se si indica con x è data dall'importante equazione $x = t - t_0$.

Se delle tre quantità (età, tempo corrente, epoca della nascita) ne son date due, si può ricavare la terza. È in nostro arbitrio di considerare come variabili una o due delle tre quantità, ma bisogna osservare che sulle due altre o sulla terza non si può più operare liberamente.

Mediante la considerazione che date due quantità, qualunque esse sieno, se ne ricava la terza, si possono stabilire le classi dei viventi o defunti. Sarà indifferente stabilire una classe di viventi o data l'epoca della nascita e una certa età a raggiungerla, ovvero la stessa età e il tempo corrente, ovvero l'epoca della nascita e il tempo corrente.

Se poniamo il numero di tutti gli individui che nacquerò dall'origine fino al tempo t_0 come una funzione del tempo e l'indichiamo con $F'(t_0)$ questa funzione avrà la proprietà di crescere con t_0 , poichè il nu-

mero delle nascite non può evidentemente che aumentare col progresso del tempo.

La quantità delle nascite espressa da $F(t_0)$ non è una funzione continua del tempo nello stretto senso della parola, poichè può anche trascorrere qualche frazione di tempo senza che avvenga alcuna nascita, ma è certo che anche considerando uno Stato nel quale si verificano giornalmente poche nascite, si commetterà un ben lieve errore nel ritenerle distribuite uniformemente, cioè nel ritenere $F(t_0)$ come una funzione continua. Ciò ammesso, l'aumento della quantità delle nascite nell'istante t_0 rappresenterà il numero delle nascite avvenute in quell'istante e il rapporto fra l'aumento delle nascite e l'aumento del tempo t_0 cioè il differenziale $\frac{dF(t_0)}{dt_0}$ che si scrive anche semplicemente $F'(t_0)$ lo chiameremo *densità* delle nascite al tempo t_0 . La densità delle nascite è sempre positiva $F'(t_0) > 0$, poichè è sempre positivo l'aumento delle nascite. Il numero dei nati nell'istante t_0 può essere rappresentato da $F'(t_0) dt_0$ ed è una quantità infinitamente piccola. Il numero dei nati dall'istante t_0' all'istante successivo t_0'' è rappresentato da $F(t_0'') - F(t_0')$ e sarà positivo soltanto quando sia contato fra due epoche t_0' e t_0'' l'una anteriore all'altra. I nati dell'anno 1866 saranno rappresentati da $F(1866) - F(1865)$ poichè al principio di questo intervallo erano scorsi 1865 anni e alla fine 1866 anni dalla nascita di Cristo. Il numero dei nati da t_0' a t_0'' lo chiameremo la *generazione* di questo intervallo di tempo e chiameremo p. e. la generazione del 1866 quella dei nati di quell'anno.

La funzione $F(t_0)$ può essere rappresentata graficamente per mezzo d'una curva, le cui ordinate crescono al crescere delle ascisse p. e. mediante la curva NP (fig. 1) le cui ordinate rappresentano le nascite avvenute sino ad una certa epoca. La differenza fra le diverse ordinate dà il numero delle nascite avvenute fra due epoche e la lunghezza delle ascisse indica le epoche.

Oltre alla serie delle nascite noi abbiamo bisogno anche d'una rappresentazione generale della serie dei decessi. Un dato numero di nati diviene sempre minore man mano che i suoi membri raggiungono un'età maggiore in causa dei continui decessi. In conseguenza il numero dei nati che raggiunge una certa età x può considerarsi come funzione di x . Per ogni unità di nati rappresenteremo con $f(x)$ il numero di quelli che raggiungono l'età x .

La funzione $f(x)$ rappresenta la serie delle morti, poichè è chiaro come da essa si possa ricavare il numero dei morti ed è poi indifferente che prenda il suo nome dai defunti o dai superstiti.

La funzione $f(x)$ ha le seguenti proprietà essenziali:

1° Per definizione si ha $f(0) = 1$ poichè tutti i nati si possono considerare come individui che raggiunsero l'età 0.

2° Vi ha una certa età che diremo ω , senza curarci del suo valore, che non è raggiunto da veruno dei nati e per la quale sarà $f(\omega) = 0$.

3° Aumentando il valore di x si ottiene sempre per $f(x)$ un valore minore. Il maggior valore di $f(x)$ è l'unità, il minore è zero; mentre la x assume tutti i valori da 0 a ω la $f(x)$ passa da 1 a 0.

Come abbiamo fatto per le nascite, possiamo considerare anche la serie delle morti, cioè la $f(x)$ come una funzione continua dell'età. Ciò ammesso si può rappresentare la terza proprietà fondamentale scri-

rendo $\frac{df(x)}{dx}$ ovvero $f'(x) < 0$. Ciò equivale a rappresentare con $f'(x) dx$

l'aumento che fa il numero d'individui d' x anni quando x cresce di dx , aumento che è negativo per la natura stessa della cosa.

L'aumento negativo indica che una parte degli individui di x anni muore al crescere dell'età. Il numero dei morenti apparirà positivamente, quando all'aumento per sè negativo del numero degli individui d' x anni si anteponga il segno negativo. Il numero di quella parte dell'unità di nati che muore all'età x si indicherà quindi con $-f'(x) dx$.

Il numero degli individui che muoiono fra le età x' e x'' cioè da una minore a una maggiore età si otterrà mediante l'integrazione di $-f'(x) dx$ fra il limite inferiore x' e il superiore x'' e sarà espresso da $f(x') - f(x'')$.

Le quantità $f(x)$ ed $f(x') - f(x'')$ d'individui che sull'unità di nati raggiungono l'età x e che muoiono nell'intervallo fra x'' e x' sono le più importanti per la ricerca delle proprietà delle diverse classi di viventi e defunti. Affinchè l'una o l'altra delle classi possa servire utilmente alla determinazione della mortalità conviene far sì che da esse si possa ricavare il valore $f(x)$ ovvero $f(x') - f(x'')$.

La determinazione diretta della mortalità si può fare calcolando le quantità $f(x)$ ed $f(x') - f(x'')$ indipendentemente dalla densità delle nascite $F''(t_0)$. La determinazione indiretta ottiene le stesse quantità, ma con metodi che sono fondati sulla densità delle nascite.

Dietro le proprietà generali suesposte, la funzione $f(x)$ può rappresentarsi graficamente mediante una curva le cui ordinate vanno diminuendo al crescere delle ascisse, che ad $x = \omega$ taglia l'asse delle ascisse e la cui ordinata per $x = 0$ è presa per unità. Nella fig. 1° la retta AB può servire come asse delle ascisse per l'età x e la linea PB come curva dei decessi.

I due elementi serie delle nascite e dei decessi danno risultati perfettamente esatti, quando si tratta di rappresentare le classi di viventi o defunti di uno Stato popolato, nel quale non avvenga veruna varia-

zione del numero degli abitanti, fuorchè per le nascite e pei decessi. Ciò si verifica quando si considera la terra nel suo complesso; ma nelle singole parti di essa e colle divisioni politiche esistenti, v'hanno altre cause di variazione nel numero degli abitanti, oltre le nascite e i decessi, v'hanno cioè le migrazioni. Noi però non ci occuperemo in modo speciale di esse, le considereremo come perturbazioni che alterano l'esattezza delle note statistiche e ci supporremo in uno Stato ove queste perturbazioni sieno senza influenza. Queste perturbazioni sono del resto poco importanti, specialmente negli Stati grandi, in causa delle immigrazioni che equilibrano in tutto o in parte le emigrazioni e si possono trascurare colla certezza di non commettere errori troppo gravi.

Per poter rappresentare le diverse classi di viventi e defunti noi dobbiamo fare inoltre le seguenti supposizioni:

1° Tutti i nati sono soggetti alla stessa serie di morti $f(x)$, sulle proprietà della quale non si può però realmente dir nulla;

2° Anche un numero infinitamente piccolo di nascite soddisfa alla serie delle morti.

Queste due supposizioni che a primo aspetto possono sembrare arbitrarie, non sono del resto che mezzi per poter applicare il procedimento matematico e servono allo scopo di esprimere gli avvenimenti reali, ciò che altrimenti non si potrebbe fare, mediante avvenimenti molto simili.

Il nostro compito come abbiain detto è quello di rappresentare le classi di viventi e defunti che sono distinte mediante l'epoca della nascita, il tempo corrente e l'età. Cominciamo per semplicità da quelle classi di viventi per la cui determinazione sono dati due dei tre elementi (epoca di nascita, tempo corrente ed età). Sia data l'epoca della nascita t_0 e l'età x ; si potrà facilmente rappresentare la classe di quegli individui che nati al tempo t_0 raggiungono l'età x . Nell'istante t_0 nacquero $dt_0 F'(t_0)$ individui; per ogni unità di nati soltanto la parte $f(x)$ raggiunge l'età x per cui, applicandosi la serie delle morti anche ad un numero piccolissimo di nati, la classe ricercata sarà rappresentata da $dt_0 F'(t_0) f(x)$. Questa classe è identica a qualunque altra classe che venga stabilita mediante due dei tre elementi suaccennati, poichè dati due di questi anche il terzo è noto. Le altre classi appaiono soltanto sotto altra forma, che si trova facilmente cambiando nella espressione $dt_0 F'(t_0) f(x)$ la variabile mediante l'equazione $x = t - t_0$. Si ottiene in questo modo:

$$\begin{aligned} dt_0 F'(t_0) f(x) &= dt F'(t - x) f(x) = dt_0 F'(t_0) f(t - t_0) = - \\ &= - dx F'(t - x) f(x). \end{aligned}$$

Queste espressioni rappresentano quattro classi dello stesso genere, simili l'una all'altra e sono le classi che si riscontrano in uno Stato a serie continua di nascite e che sono distinte cogli elementi:

- 1° Epoca di nascita ed età;
- 2° Tempo corrente (supposto variabile) ed età;
- 3° Epoca di nascita e tempo corrente;
- 4° Età (supposta variabile) e tempo corrente.

L'espressione dell'ultima classe deve avere il segno negativo perchè l'età cresce in senso opposto all'epoca delle nascite.

Queste classi non sono quantità finite, ma bensì infinitamente piccole. Le classi finite, che ora svilupperemo, malgrado che si trovino qualche volta scambiate fra loro, non sono più simili l'una all'altra.

Da ognuna delle quattro espressioni infinitamente piccole, si troverà l'espressione di un'altra classe finita integrando fra i convenienti limiti di ciascuna variante, cioè la 1^a e la 3^a fra t_0' e t_0'' dove $t_0' < t_0''$; la 2^a da t' a t'' essendo $t' < t''$, la 4^a da x'' ad x' dove $x'' > x'$. Queste classi saranno rappresentate come alle equazioni seguenti, nelle quali abbiamo adottato anche un'utile rappresentazione simbolica, cambiando in indici i limiti dell'integrazione.

$$f(x) \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) = \{F(t_0'') - F(t_0')\} f(x) = {}_{t_0'}^{t_0''} V(x) \quad [1]$$

$$\begin{aligned} f(x) \int_{t'}^{t''} dt F'(t-x) &= f(x) \int_{t_0=t'-x}^{t_0=t''-x} dt_0 F'(t_0) = \\ &= \{F(t''-x) - F(t'-x)\} f(x) = {}_{t'-x}^{t''-x} V(x) \end{aligned} \quad [2]$$

$$\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) f(t-t_0) = {}_{t_0'}^{t_0''} V(t) \quad [3]$$

$$\int_{x''}^{x'} dx F'(t-x) f(x) = \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} dt_0 F'(t_0) f(t-t_0) = {}_{t-x''}^{t-x'} V(t) \quad [4]$$

Nelle equazioni [2] e [4] abbiamo, come si vede, introdotta la variabile t_0 senza alterare l'eguaglianza. Nelle equazioni [1] e [2] si eseguisce l'integrazione coi mezzi algebrici, nelle [3] e [4] le integrazioni sono soltanto indicate. Con ciò si distingue molto sensibilmente il secondo paio di classi dal primo.

Alla destra d'ogni equazione si trova il simbolo col quale indicheremo ogni classe: V poichè si tratta di classi di viventi, a sinistra del simbolo gli indici presi dai limiti dell'integrazione, a destra fra parentesi le quantità ritenute costanti x o t di cui le classi sono funzioni. Veniamo ora alla spiegazione delle diverse classi:

1° ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ è la classe di quegli individui che nati fra le epoche t_0' e t_0'' pervengono all'età x ; p. e. la parte dei nati nel 1850 che raggiungono l'età di 7 anni.

2° ${}_{t'-x}^{t''-x}V(x)$ è la classe di quelli che entro il periodo da t' a t'' compiono l'età x ; p. e. di quelli che nell'anno 1868 raggiungono l'età di 20 anni.

3° ${}_{t_0'}^{t_0''}V(t)$ la classe di quelli che nati da t_0' a t_0'' erano superstiti all'epoca t ; per esempio di quelli che nati nel 1860 erano ancora viventi al principio del 3 dicembre 1864.

4° ${}_{t-x'}^{t-x''}V(t)$ è il numero di quelli che all'epoca t stanno fra la maggiore età x'' e la minore x' . Esempio di questa classe sarebbe il numero di quelli che al principio del 3 dicembre 1867 stavano fra i 20 e i 19 anni.

Le classi [1] e [2] e le classi [3] e [4] non sono rispettivamente diverse fra loro quando si considerano come invariabili la x e la t . Le prime due espressioni si confondono quando si pone $t_0' = t' - x$ e $t_0'' = t'' - x$ e le ultime due se si pone $t_0' = t - x''$; $t_0'' = t - x'$.

Non si possono invece mai confondere le equazioni dell'uno con quelle dell'altro paio. Pel primo paio ad esempio è implicitamente lo stesso il parlare di quegli individui che nati negli anni 1841, 42 e 43 pervengono all'età di 5 anni ($t_0' = 1840$ $t_0'' = 1843$) ovvero di quelli che pervengono alla stessa età di 5 anni negli anni 1846, 47 e 48 ($t' = 1840 + 6$; $t'' = 1843 + 5$). Pel secondo paio di classi il dire quelli che al principio del 3 dicembre 1864 erano superstiti dei nati negli anni 1863, 64 è identico al dire quelli che allo stesso istante (3 dicembre 1864) stavano fra le età $365 + 337$ giorni e zero giorni. All'opposto i superstiti a qualsiasi epoca e corrispondenti ad un dato periodo di nascite o ad una data classe d'età, non si potranno mai confondere con quelli che raggiungono una certa età, provengano essi da un dato periodo di nascite, ovvero raggiungano la data età in un certo periodo di tempo e ciò in causa della distribuzione continua delle nascite,

Le classi [1] e [2] contengono individui di pari età; quelli che nati fra uno ed un altro tempo compiono in un altro intervallo la loro età x ; questi individui non sono nè possono essere contemporanei.

Le classi [3] e [4] invece sono formate di individui che si trovano viventi contemporaneamente, ciascuno dei quali è nato in un diverso istante cosicchè non possono essere di pari età. È una inesattezza di molti scrittori di chiamare individui della stessa età quelli che stanno fra certi limiti d'età.

Pel calcolo della grandezza delle diverse classi servono mezzi com-

pletamente diversi. Le classi [1] e [2] possono soltanto essere calcolate (direttamente) mediante le note continue delle nascite cioè per mezzo dei registri; al contrario le classi [3] e [4] sono calcolabili soltanto mediante le temporanee annotazioni dei viventi ad una certa epoca, cioè mediante i censimenti che si separano o per periodi di nascite o per classi d'età.

I membri della prima classe compiono la loro età x durante un intervallo di tempo che dura da $t = t_0' + x$ a $t = t_0'' + x$ e che ha quindi la stessa lunghezza del periodo di nascite al quale essi appartengono. Gli appartenenti alla seconda classe che compiono la loro età x dall'epoca t' alla t'' nacquero fra le epoche $t_0 = t' - x$ e $t_0 = t'' - x$ la cui distanza è eguale a quella che passa fra i tempi correnti.

Gli individui della terza classe stanno fra le età $x = t - t_0'$ come la maggiore e $x = t - t_0''$ come la minore.

Finalmente ciascuno di quelli che appartengono alla quarta classe è nato fra $t_0 = t - x''$ e $t_0 = t - x'$.

Le due prime classi dipendono soltanto dalla quantità delle nascite [combinata colla funzione $f(x)$] che si verifica durante il periodo di tempo stabilito e sono indipendenti dalla densità delle nascite, poichè eseguendo l'integrazione sparisce il quoziente differenziale $F'(t_0)$.

Al contrario le classi [3] e [4] dipendono dalla densità delle nascite in ogni istante dell'intervallo fissato, come pure dal valore assunto dalla serie delle morti pei valori di x da $t - t_0'$ a $t - t_0''$ cioè da $x = x''$ e $x = x'$. Questa è la differenza principale fra le due coppie di classi.

La prima classe ${}_{t_0}^{t_0''}V(x)$ è compresa fra i limiti ${}_{t_0}^{t_0''}V(0) = F(t_0'') - F(t_0')$ e ${}_{t_0}^{t_0''}V(\omega) = 0$. La prima di queste formole dimostra che la quantità delle nascite che avvengono in un certo intervallo, può prendersi contemporaneamente come caso particolare della 1^a e della 2^a classe, poichè il numero dei nati in un intervallo è uguale a quello degli individui che nello stesso intervallo raggiungono l'età 0.

Per ${}_{t_0}^{t_0''}V(x)$ si ottengono dei limiti più importanti moltiplicando il valore di $dt_0 F'(t_0)$ non per $f(x)$ ma pei valori estremi di questa funzione ai limiti dell'integrazione; si otterrà con ciò:

$${}_{t_0}^{t_0''}V(x) > \int_{t_0}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) f(t_0'' + x - t_0)$$

e

$${}_{t_0}^{t_0''}(x)V < \int_{t_0}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) f(t_0' + x - t_0)$$

e si può anche scrivere:

$${}_{t_0}^{t_0''}V(x) = {}_{t_0}^{t_0''}V(t = t_0 + x + \mathfrak{S}'[t_0'' - t_0'])$$

ritenuto che il coefficiente \mathcal{S} rappresenta un numero non ancora noto, compreso fra 0 e 1. Questa formola fa conoscere quanto segue:

Il numero di quelli che, nati fra le epoche t_0' e t_0'' pervengono all'età x è maggiore del numero di quelli che nati nello stesso intervallo giungono all'istante $t_0'' + x$ cioè all'estremità dell'intervallo in cui si compie l'età x e minore del numero di quelli che nati pure nello stesso intervallo pervengono all'istante $t' + x$ cioè al primo punto in cui si compie l'età x . Fra gli estremi limiti del periodo si troverà un certo istante al quale perverranno tanti individui quanti sono quelli che pervengono all'età x . Questo punto può essere determinato *a priori* quando si conosca la densità delle nascite e la formola dei decessi.

Anche per la seconda classe possono similmente trovarsi dei limiti analoghi; per amore di brevità tralasciamo di ricercarli.

La terza classe, quando invece dei molti valori di $f(t - t_0)$ si introducano soltanto il minore e il maggiore è compresa fra i limiti

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(t) > \{ F(t_0'') - F(t_0') \} f(t - t_0')$$

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(t) < \{ F(t_0'') - F(t_0') \} f(t - t_0'')$$

e analogamente a quanto abbiamo fatto superiormente:

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(t) = \frac{t_0''}{t_0'} V(x = t - t_0'' + \mathcal{S}'' [t_0'' - t_0'])$$

dove \mathcal{S}'' è ancora compreso fra 0 e 1. Questa formola dice che dei nati nell'intervallo fra t_0' e t_0'' ne perviene all'istante t un numero maggiore di quello che perviene all'età il cui compimento comincia con t ed un numero minore di quello che perviene all'età il cui compimento termina con t . Fra le due età così stabilite ve ne sarà dunque una terza, alla quale perverranno tanti individui quanti sono quelli che pervengono all'istante t .

Anche per la quarta classe si possono trovare ed esprimere dei limiti analoghi. Le classi del primo paio hanno per valori limiti dei casi particolari del secondo paio e viceversa. Ogni classe limite d'un paio è anche pari in grandezza alla classe particolare del secondo paio.

Le proposizioni ora trovate si possono rappresentare chiaramente anche col disegno come risulta dalla figura 1. In essa come abbiám già detto le ordinate della curva NP rappresentano le quantità dei nati sino al tempo t_0 e le ordinate della PB misurate da AB sono quantità calcolate di decessi. Per ogni aumento di nascite si sono rappresentate anche le curve dei decessi, come si fece per AP ; tanto minori sono

questi aumenti e tanto più si accorda la rappresentazione grafica colla analitica.

La classe ${}_{t_0}^{t_0''} V(x)$ è la somma di tutte quelle ordinate che rappresentano quella parte d'ogni singolo aumento di nascite che perviene all'età x . Per aumenti di nascite infinitamente piccoli sono desse punti d'una curva QR che si ottiene ricostruendo la curva NP a partire da un punto dell'asse delle ascisse distante di x dall'origine. Nel nostro disegno sono soltanto riunite mediante la curva QR le estremità delle ordinate che devono essere sommate. La seconda classe non ha bisogno di veruna costruzione particolare.

La terza classe ${}_{t_0}^{t_0''} V(t)$ è la somma delle ordinate rappresentanti per ogni aumento di nascite la parte d'individui che sussiste all'età $t - t_0$. Prendendo l'ascissa $OM = t$ queste ordinate sono tutte parti della linea MP , parallela all'asse delle ordinate. Dicasi lo stesso della quarta classe.

Le proprietà caratteristiche di queste classi sono che le ordinate delle diverse curve di decessi, che sommate rappresentano una classe del primo paio, si trovano tutte in una curva che si ottiene trasportando la curva dei nati sull'asse del tempo di x unità e che quelle che sommate rappresentano una delle classi del secondo paio, si trovano su una linea retta che si ottiene conducendo una parallela all'asse dei nati alla distanza t dall'origine.

I limiti fra i quali si trovano le diverse classi possono essere facilmente rappresentati con una semplicissima costruzione, sulla quale ci sembra inutile intrattenerci.

Passando ora ad esaminare le classi dei defunti cercheremo dapprima l'espressione della classe d'individui che nati al tempo t_0 muoiono all'età x . I nati all'istante t_0 sono $dt_0 F'(t_0)$; per ogni unità di nati muoiono all'età x : $-f'(x) dx$. Anche un piccolissimo numero di nati soggiace alle serie dei decessi, dietro la nostra seconda supposizione, cosicchè si ha come espressione della classe richiesta: $-dt_0 F'(t_0) f'(x) dx$. Se in questa espressione mediante l'equazione $x = t - t_0$ si fanno le necessarie trasformazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} - dt_0 F'(t_0) f'(x) dx &= - dt_0 F'(t_0) f'(t - t_0) dt = - \\ &= - dt F'(t - x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Questa equazione dimostra che è lo stesso stabilire una classe di defunti o mediante l'epoca di nascita e l'età; ovvero mediante la stessa epoca di nascita e l'istante in cui si compie l'età; ovvero mediante la stessa età e lo stesso punto del tempo corrente.

Però in causa della continuità delle nascite e dei decessi le classi così rappresentate sono quantità infinitamente piccole di secondo ordine. Mediante tali espressioni si otterrebbero delle classi finite, soltanto qualora si trovasse una quantità finita di nascite ad ogni singola epoca (ciò che non è il caso in uno Stato popolato) e qualora del pari le morti d'ogni classe di nati fossero tutte riunite in certe classi d'età, mentre esse avvengono ad ogni età. Volendosi astenere da una supposizione così arbitraria e stare alla realtà della cosa, non bastano le espressioni sin qui ottenute a fornire le classi finite che vogliamo ottenere.

Cominciamo dallo stabilire le classi infinitamente piccole di primo ordine. Ne otterremo due per ognuna delle tre espressioni superiori, integrando ciascuna espressione fra determinati limiti delle corrispondenti variabili, in modo assolutamente analogo a quello usato per le classi dei viventi. Però sul modo d'eseguire l'integrazione è ancora a considerarsi quanto segue:

Precisamente come avvenne pei nati e pei viventi, conteremo anche i morti secondo il tempo crescente. Ma sono contemporaneamente a considerarsi due tempi diversi; l'epoca della nascita alla quale appartengono i morti e il tempo in cui avviene la morte, cosicchè si deve integrare non solo pei tempi crescenti di nascite, ma anche per tempi crescenti di decessi. Qualora la variabile sia l'età si hanno le seguenti regole.

Se l'epoca della nascita è fissa si deve contare secondo età crescenti, cioè da x' ad x'' vale a dire dai più presto morti ai più tardi morti.

Se è fissa l'epoca della morte si conta per età scendenti, vale a dire da x'' ad x' ciò che corrisponde a contare dai più presto nati ai più tardi nati.

Coll'applicazione di queste regole si ottengono per le richieste classi di decessi, che sono espressioni infinitamente piccole di primo ordine, le seguenti formole:

$$I. \quad \text{Da } - dt_0 F''(t_0) f'(x) dx:$$

Integrando rispetto a t_0

$$- dx f'(x) \int_{t_0'}^{t_0''} F''(t_0) dt_0. \quad [\alpha]$$

e integrando rispetto ad x :

$$- dt_0 F''(t_0) \int_{x'}^{x''} f_1'(x) dx. \quad [\beta]$$

$$II. \quad \text{Da } - dt_0 F''(t_0) f'(t - t_0) dt$$

Integrando rispetto a t :

$$- dt_0 F'(t_0) \int_{t_0}^{t''} f'(t - t_0) dt \quad [\beta]$$

e integrando rispetto a t_0 :

$$- dt \int_{t_0}^{t_0''} F'(t_0) f'(t - t_0) dt_0. \quad [\gamma]$$

III.

$$\text{Da } - dt F'(t - x) f'(x) dx$$

Integrando rispetto ad x

$$+ dt \int_{x'}^{x''} F'(t - x) f'(x) dx \quad [\gamma]$$

e integrando rispetto a t :

$$- dx f'(x) \int_{t'}^{t''} F'(t - x) dt. \quad [\alpha]$$

Abbiamo così le seguenti 6 diverse classi:

I. $[\alpha]$ La classe di quelli che muoiono nell'età x nati fra le epoche t_0' e t_0'' . L'integrazione si può eseguire.

I. $[\beta]$ I nati all'epoca t_0 che muoiono fra le età x' e x'' . L'integrazione si può eseguire.

II. $[\beta]$ I nati all'epoca t_0 che muoiono fra gli istanti t' e t'' . L'integrazione si può eseguire.

II. $[\gamma]$ I morti all'epoca t nati fra le epoche t' e t'' . L'integrazione non si può eseguire. Quanto al segno si rifletta che

$$+ f'(t - t_0) dt_0 = - f'(x) dx$$

rappresenta già il numero positivo dei decessi dell'età $t - t_0$; integrando anche da t_0' a t_0'' cioè per progredienti epoche di nascita verranno contati i morti secondo età che vanno diminuendo. Il segno negativo deve perciò precedere l'integrale affinchè sia conservata la regola sul modo di computare.

III. $[\gamma]$ I morti all'epoca t che si trovano fra i limiti x'' ed x' d'età.

L'integrazione non si può eseguire. Il segno s'interpreta coll'osservazione che il computo deve procedere dai più presto nati ai più tardi nati, ma del pari anche dai più tardi morti ai più presto morti. In causa del calcolo si ottiene una sola quantità in senso positivo. L'altra non ottenuta deve interpretarsi col cambiamento di segno.

III. $[\alpha]$ Quelli dell'età x morti fra le epoche t' e t'' . L'integrazione si può eseguire.

Sono sei diverse classi, ma quelle indicate colle stesse lettere greche divengono identiche, mediante una conveniente indicazione dei limiti dell'integrazione vale a dire:

$$\begin{aligned} &\text{quelle segnate } \alpha \text{ ponendo } t'_0 = t' - x; t''_0 = t'' - x \\ &\text{id. } \beta \quad \text{id. } x' = t' - t_0; x'' = t'' - t_0 \\ &\text{id. } \gamma \quad \text{id. } t'_0 = t - x'; t''_0 = t - x'. \end{aligned}$$

All'opposto quelle classi che non si trovano nello stesso paio sono e rimangono sensibilmente diverse.

Per ottenere delle classi finite di decessi eseguiamo un'altra integrazione delle suesposte quantità infinitamente piccole di primo ordine fra convenienti limiti delle varianti. Otteniamo così soltanto tre classi finite e non sei, una per ciascuna delle espressioni segnate I, II e III poichè è indifferente, quando si integra rispetto ad entrambe le varianti, il farlo prima rispetto all'una o all'altra. Per avere anche qui una conveniente espressione simbolica, diamo alle classi provenienti dalla I e dalla III la forma ch'esse assumono quando si cambiano le varianti t_0 ed x in t ed avremo:

dalla I:

$$\begin{aligned} & - \int_{t'_0}^{t''_0} dt_0 F'(t_0) \int_{x'}^{x''} f'(x) dx = \\ & = - \int_{t'_0}^{t''_0} dt_0 F'(t_0) \int_{t=t_0+x'}^{t=t_0+x''} f'(t-t_0) dt = {}_{t'_0}^{t''_0} M_{t_0+x'}^{t_0+x''} \end{aligned} \quad [5]$$

dalla II:

$$- \int_{t'_0}^{t''_0} dt_0 F'(t_0) \int_{t'}^{t''} f'(t-t_0) dt = {}_{t'_0}^{t''_0} M_{t'}^{t''} \quad [6]$$

dalla III:

$$\begin{aligned} & + \int_{t'}^{t''} dt \int_{x'}^{x''} F'(t-x) f'(x) dx = \\ & = - \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0 = \\ & = - \int_{x'}^{x''} dx f'(x) \int_{t-x''}^{t-x'} F'(t-x) dt = {}_{t-x''}^{t-x'} M_{t'}^{t''}. \end{aligned} \quad [7]$$

Il simbolo alla destra delle equazioni si interpreta come segue:

M indica che si tratta di classi di defunti (*morior*); gli indici alla sua sinistra indicano l'epoca della nascita dei defunti, quelli alla destra danno i limiti del periodo dei decessi.

Le tre classi finite di defunti così ottenute sono sensibilmente diverse l'una dall'altra, non si possono ridurre uguali mediante veruna

disposizione dei limiti dell'integrazione. Il significato di esse è il seguente: Dalla I. si ottiene la classe di quelli che nati in un dato intervallo di tempo muoiono fra dati limiti d'età. Per esempio i morti fra i 20 e i 21 anni che nacquero nel 1840. Questa classe è come vedremo la più importante di tutte per investigare la mortalità. Dalla II. si ha la classe di quelli che nati in un dato intervallo di tempo, muoiono fra due dati istanti p. es. quanti dei morti del 1865 appartenevano all'anno di nascita 1800. In Prussia s'è cominciato nell'anno 1864 a calcolare questa classe che è però la meno adatta per lo studio della mortalità.

La classe che si ricava dalla III. è formata di quegli individui che entro dati limiti di tempo, muoiono fra dati limiti d'età p. es. quelli che morti nel 1850 erano fra le età di 5 e 4 anni. Il calcolo di questa classe è molto più usato p. es. in Sassonia, Baviera, ecc., e si vedrà che dessa può essere utile al nostro scopo, meno però della prima classe.

Tutte tre le classi sono calcolabili mediante i registri.

La prima classe è la più importante per la ricerca della mortalità, poichè essendo eseguibile l'integrazione si ottiene una relazione molto semplice delle funzioni che è:

$${}_{t_0'}^{t_0''} M_{t_0'+x'}^{t_0'+x''} = \{F(t_0'') - F(t_0')\} \{f(x') - f(x'')\}$$

cioè il prodotto della quantità dei nati da t_0' a t_0'' pel numero dei morti fra le età x' e x'' . Se si avesse il valore di questa classe basterebbe dividerlo pel numero dei nati fra le epoche t_0' e t_0'' per trovare il valore $f(x') - f(x'')$. Soltanto questa classe offre il mezzo d'ottenere direttamente l'espressione della mortalità senza che occorra di fare veruna supposizione sulla densità delle nascite e sul modo di procedere delle morti; essa potrebbe essere rappresentata mediante una linea retta. Le altre due classi [6] [7] non possono servire che indirettamente alla ricerca della mortalità, mediante particolari supposizioni sulla densità delle nascite.

La prima classe contiene i decessi dalle età x' ed x'' , provenienti dalla generazione da t_0' a t_0'' ; per calcolarla bisogna sapere in che tempo avvengono i decessi per poter consultare i registri. Indicando il primo istante in cui possono trovarsi questi decessi con τ' e l'ultimo con τ'' si avranno queste due quantità cercando coll'equazione 5 il minore e il maggior valore che assume t mentre t_0 passa da t_0' a t_0'' ed x da x' ad x'' . Si avrà:

$$\tau' = t_0' + x' \text{ e } \tau'' = t_0'' + x''$$

donde

$$\tau'' - \tau' = t_0'' - t_0' + (x'' - x')$$

cioè che i morti di questa classe sono a cercarsi nell'intervallo di tempo che comincia quando il più presto nato della generazione compie l'età x' e termina quando il più tardi nato compie l'età x'' ; quest'intervallo ha una durata uguale a quella del periodo delle nascite aumentata della differenza delle età.

Per esempio i morti dagli 8 ai 9 anni appartenenti alla generazione del 1830 sono a cercarsi fra i morti degli anni 1833 e 1839.

In pratica non si calcola questa classe che pure è tanto importante pel fatto che i decessi d'ogni periodo d'un anno d'età e per ogni periodo pure annuo di nascite sono compresi fra i decessi di due anni, mentre è uso generale di chiudere annualmente i compendi dei registri delle morti.

Dalla seconda classe (equazione 6) che è data mediante il periodo delle nascite e quello delle morti si possono avere l'età minima (ξ') e massima (ξ'') a cui possono pervenire i suoi membri. Nello stesso modo con cui si son trovati τ' e τ'' si ha:

$$\xi' = t' - t_0'' \text{ e } \xi'' = t'' - t_0'$$

donde

$$\xi'' - \xi' = t'' - t' + (t_0'' - t_0')$$

ciò che vuol dire che la minima età a cui può arrivare un membro di questa classe è quella del più tardi nato cioè a t_0'' al principio del periodo dei decessi cioè a t' e la massima età corrisponde alla differenza fra l'origine della generazione e la fine del periodo dei decessi. L'intervallo fra le età equivale alla durata del periodo delle nascite sommata colla durata di quello dei decessi. Per esempio i morti nel 1864 nati nel 1860 avevano l'età fra i 3 e i 5 anni, possono quindi avere una differenza d'età di due anni. Fra i molti morti del 1864 fra i 3 e i 5 anni si trovano tutti quelli della generazione del 1860, assieme ad altri che provenivano da generazioni diverse. In Prussia ove si è cominciato a calcolare questa classe non vennero stabiliti a dovere i limiti dell'età.

Per venire finalmente alla terza classe (equazione 7) il limite inferiore τ_0' e il superiore τ_0'' del periodo di nascite a cui appartengono gli individui che nell'età fra x'' ed x' muoiono fra gli istanti t' e t'' sono dati da:

$$\tau_0' = t' - x' \text{ e } \tau_0'' = t'' - x''$$

cioè

$$\tau_0'' - \tau_0' = (t'' - t') + (x'' - x')$$

vale a dire: il periodo delle nascite comincia coll'individuo che al prin-

cipio del periodo dei decessi compie l'età maggiore e termina con quello che alla fine del periodo delle morti compie l'età minore. Esso ha la durata del periodo delle morti aumentato della differenza fra le età. Per esempio i morti negli anni 1817-18 dell'età fra 5 e 2 anni sono nati negli anni 1812-13-14-15-16; e i morti nel 1867 da 1 a 0 anni provengono dalle generazioni 1866-67.

Nelle figure 2, 3 e 4 è data la rappresentazione grafica delle 3 classi. Nello stesso modo che le classi dei viventi possono rappresentarsi colla somma delle singole ordinate delle curve dei decessi, costrutte per ognuno degli aumenti delle nascite, si possono rappresentare le classi dei defunti mediante la somma delle differenze fra le ordinate. Tali differenze sono costrutte nelle suaccennate figure per ogni aumento d'età Δx . Nella figura 2 devono pensarsi sommate tutte quelle differenze che si hanno fra $x = x'$ e $x = x''$ in ogni curva di decessi per gli aumenti delle nascite da $t_0 = t_0'$ a $t_0 = t_0''$; le ulteriori differenze non sono costrutte. Si ottiene così la rappresentazione grafica della classe ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}$.

Nella fig. 3 sono costrutte soltanto quelle differenze che da $t = t'$ a $t = t''$ si hanno agli stessi aumenti di nascita per ogni singola curva di decessi. Nella somma di esse si ha la classe ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t'}$.

Nella figura 4 sono rappresentate quelle quantità infinitamente piccole di primo ordine la cui somma produce la classe ${}_{t-x'}^{t-x''}M_{t'}$.

Determinate così le classi principali di viventi e defunti vediamo quali relazioni sussistano fra di loro. Delle 4 classi di viventi le prime due sono dipendenti dall'età x e le ultime due dal tempo t e x e t vengano considerate come quantità costanti. Se anche la x e la t si suppongono variabili tutte le 4 classi si mantengono sensibilmente diverse fra loro. Differenziando l'equazione [1] rispetto ad x si trova:

$${}_{t_0'}^{t_0''}V'(x) dx = dx f'(x) \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) dt_0$$

la quale indica che l'aumento che acquista ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ quando x cresce di dx è uguale al numero d'individui della stessa generazione che muoiono all'età x però col segno cangiato [vedi I (2)]. L'aumento di ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ quando x passa da x' ad x'' è:

$$\begin{aligned} {}_{t_0'}^{t_0''}V(x'') - {}_{t_0'}^{t_0''}V(x') &= \int_{x'}^{x''} f'(x) dx \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) dt_0 = \\ &= - {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'} \end{aligned} \quad [8]$$

e quindi uguale al numero degli individui che nati fra t_0' e t_0'' muoiono fra le età x' ed x'' (vedi equazione 5) ma col segno cangiato.

Differenziando la equazione (2) $\frac{t''-x}{t-x} V(x)$ rispetto ad x avendo riguardo ai limiti di x si ottiene:

$$\frac{t''-x}{t-x} V'(x) dx = dx f'(x) \int_{t'}^{t''} F''(t-x) dt + F''(t-x) f(x) dx - F'(t''-x) f(x) dx$$

cioè: al crescere di x la classe diminuisce di quelli che muoiono all'età x fra t' e t'' (vedi III (a) col segno cangiato), aumenta di quelli che al tempo t' compiono l'età x e diminuisce di quelli che raggiungono la stessa età all'istante t'' , poichè i primi hanno l'età $x + dx$ dopo il tempo t' cioè nell'intervallo da t' a t'' , mentre gli ultimi raggiungono l'età $x + dx$ dopo t'' cioè fuori dell'intervallo.

L'aumento della classe al passaggio di x da x' ad x'' avendo riguardo anche alle equazioni 7 e 4 è dato dall'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{t''-x''}{t-x''} V(x'') - \frac{t''-x'}{t-x'} V(x') - \int_{x'}^{x''} dx f'(x) \int_{t'}^{t''} F''(t-x) dt + \\ + \int_{x'}^{x''} F''(t'-x) f(x) dx - \int_{x'}^{x''} F''(t''-x) f(x) dx = \\ = - \frac{t-x'}{t-x''} M_{t'}^{t''} - \left\{ \frac{t''-x'}{t''-x''} V(t'') - \frac{t''-x'}{t''-x''} V(t') \right\} \quad [9] \end{aligned}$$

cioè: affine d'avere dal numero d'individui che fra le epoche t' e t'' raggiungono l'età x' il numero di quelli che nello stesso intervallo di tempo pervengono all'età x'' , bisogna diminuirlo del numero di quelli che morirono da t' a t'' nell'età fra x'' ed x' e di quello degli individui che al tempo t'' si trovano nella classe d'età fra x'' ed x' e aumentarlo del numero di quelli che all'istante t' si trovano avere l'età da x'' ad x' .

La classe $\frac{t_0''}{t_0'} V(t)$ acquista al crescere di t l'aumento:

$$\frac{t_0''}{t_0'} V'(t) dt = dt \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0$$

che è uguale alla II $[\gamma]$ cioè al numero di quelli che muoiono all'istante t della stessa generazione, ma col segno cangiato. L'aumento della classe da t' a t'' è dato dall'equazione:

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(t'') - \frac{t_0''}{t_0'} V(t') = \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0 = - \frac{t_0''}{t_0'} M_{t'}^{t''} \quad [10]$$

è uguale cioè al numero dei morti nello stesso tempo ma preso negativamente.

La classe di quelli che al tempo t sono fra le età x' e x'' cresce al crescere di t come segue:

$$\begin{aligned} \int_{t-x''}^{t-x'} V'(t) dt &= - dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x) f'(x) dx - \\ &- F'(t-x'') f(x'') dt + F'(t-x') f(x') dt \end{aligned}$$

cioè sortono da essa tutti gli individui che al tempo t muoiono fra le età x'' ed x' (vedi III [γ]) e quelli che al tempo t sono in procinto di sorpassare l'età x'' e vi si aggiungono quelli che al tempo t acquistano l'età minore x' . L'aumento che la classe degli individui da x'' ad x' anni acquista mentre t passa da t' a t'' è dato dall'equazione:

$$\begin{aligned} \int_{t'-x''}^{t''-x'} V(t'') - \int_{t'-x''}^{t'-x'} V(t') &= - \int_{t'}^{t''} dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x) f'(x) dx - \\ &- \int_{t'}^{t''} F'(t-x'') f(x'') dt + \int_{t'}^{t''} F'(t-x') f(x') dt = \\ &= \int_{t'-x''}^{t'-x'} M_{t'}^{t''} - \left\{ \int_{t'-x''}^{t''-x''} V(x'') - \int_{t'-x'}^{t''-x'} V(x') \right\} \quad [11] \end{aligned}$$

Da questa equazione simile alla 9 risulta che l'aumento che la classe degli individui da x'' ad x' anni al tempo t acquista quanto t passa da t' a t'' consiste dell'aumento di tutti quelli che da t' a t'' compiono l'età x' , della sottrazione di quelli che da t' a t'' compiono l'età x'' e della sottrazione di quelli che da t' a t'' muoiono fra le età x'' ed x' .

Dalle relazioni trovate risulta che le due prime classi di defunti si possono confrontare con una classe di viventi per ciascuna, la terza invece non può rappresentarsi che mediante due specie di classi di viventi. L'aumento che acquista la prima classe di viventi al crescere di x e la terza al crescere di t è per sè stesso negativo essendo $f'(x) < 0$ e queste classi divengono sempre minori al crescere di x o di t .

La seconda e la quarta classe si comportano diversamente e il loro aumento al crescere di x o di t è maggiore, minore od uguale a zero secondo la natura della serie delle nascite. Per quanto riguarda la 2^a classe l'aumento di essa sarà uguale a zero (come risulta dall'equazione 2) quando sia soddisfatta la condizione:

$$\begin{aligned} &\left\{ F(t''-x') - F(t'-x') \right\} f(x') \\ &- \left\{ F(t''-x'') - F(t'-x'') \right\} f(x'') = 0. \quad [12] \end{aligned}$$

Essendo $f(x'') < f(x')$ questa condizione non è adempiuta se la quantità delle nascite avvenute fra $t_0 = t' - x'$ e $t_0 = t'' - x'$ è uguale o maggiore alla quantità delle nascite avvenute nel precedente inter-

vallo da $t_0 = t' - x''$ e $t_0 = t'' - x'$; ond'è necessario che la prima delle menzionate quantità sia minore della seconda in un certo rapporto dipendente dalla serie delle morti.

Dall'equazione 4 risulta che, perchè l'aumento della classe di individui che si trovano fra le età x'' ed x' sia uguale a zero, bisogna che sia soddisfatta la condizione:

$$\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \int f(t' - t_0) dt_0 = 0 \quad [13]$$

e ciò non si verifica se la differenza $F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0)$ per ogni valore che assume t_0 da $t_0 = t' - x''$ a $t_0 = t' - x'$ è sempre positivo o sempre negativo, cioè non è adempiuta se a cominciare da $t_0 = t' - x''$ si ha per $t'' - t'$ unità di tempo successive una densità maggiore o minore di nascite. Bisogna che si abbiano per questa differenza dei valori positivi e dei valori negativi in un certo modo che dipende dalla serie dei decessi.

Naturalmente queste condizioni non sussistono se non nella supposizione che si verifichi una sola serie di decessi. È poi assolutamente impossibile che si verifichino contemporaneamente entrambe le condizioni prestabilite, cioè che attribuendo a t' t'' x'' x' gli stessi valori, siano contemporaneamente nulli gli aumenti di tutte due le classi.

Infatti dalle equazioni 9 e 11 risulta che l'aumento d'una classe preso negativamente, più l'aumento dell'altra preso pure negativamente è uguale al numero di quelli che muoiono fra le età x'' e x' fra le epoche t' e t'' , cioè è uguale ad una quantità che non può mai essere nulla, essendo continue le serie delle nascite e dei decessi. Le stesse equazioni dimostrano che la somma dei due aumenti presi negativamente, ha un valore positivo, per ogni distribuzione di nascite e per ogni formola di decessi.

Le classi 8 e 10 e 9 o 11 possono essere adoperate per rappresentare graficamente la sensibile differenza che passa fra le diverse classi. Mentre nella figura 1 abbiamo mostrato come le ordinate, che debbono ritenersi come infinitamente piccole, della cui somma sono costituite le classi dei viventi, possono essere rappresentate in grandezza e posizione, rinunzieremo per ora alla rappresentazione della grandezza e ci limiteremo a rappresentare soltanto la posizione, colla quale si spiega abbastanza generalmente la differenza fra le classi dei viventi.

È già stato osservato che le ordinate infinitamente piccole della cui somma si compone una classe di viventi di pari età, si trovano tutte su una linea curva, che si ottiene colla costruzione della curva dei nati, a partire da un punto dell'asse delle ascisse distante di x dall'origine e che all'opposto le ordinate di cui si compone una classe d'individui

contemporaneamente viventi, si trovano tutte su una linea retta, che si innalza perpendicolarmente all'asse delle ascisse (il tempo) alla distanza t dall'origine. In questo modo si sono rappresentate colle linee AB, CD nelle figure 5 e 6 le posizioni delle due classi di viventi, alle quali si può ricondurre coll'equazione 8 la classe dei morti fra x' e x'' della generazione fra t_0' e t_0'' ; nelle figure 7 e 8 la posizione di quelle due classi di viventi (colle linee AB, CD), alle quali, dietro l'equazione 10, può ricondursi la classe dei morti da t' a t'' della generazione da t_0' a t_0'' e nelle figure 9 e 10 colle linee AB, CD, AC e BD la posizione di quelle quattro classi di viventi, alle quali nelle equazioni 9 o 11 è ricondotta la classe dei morti da t' a t'' fra le età x'' ed x' . Confrontando ora l'un coll'altro i tre gruppi di figure si vede, la sensibile differenza delle tre classi di decessi, poichè ciascuna di esse è riconducibile alle classi dei viventi in modo affatto diverso. In alcuni casi colla sola rappresentazione della posizione delle classi dei viventi si può svolgere anche la proposizione dell'aumento di queste classi al crescere di x o di t senza far uso dell'analisi. Si riconosce anche quanto s'è detto precedentemente per τ' e τ'' ; ξ' e ξ'' ; τ_0' e τ_0'' .

Le relazioni fra le classi di viventi e defunti che sono rappresentate nelle equazioni 8, 10, 9 e 11 sono molto importanti pel calcolo delle classi degli individui della stessa età (equazioni 1 e 2). Essendovi dovunque delle generali annotazioni di decessi, che rendono calcolabili tutte le classi di defunti, si possono utilizzare queste classi, per rappresentare quelle dei viventi e ciò senza fare alcuna supposizione sul modo di distribuzione delle nascite e dei decessi. Sono precisamente le equazioni 8 e 9 o 11 che possono servire a questo scopo, poichè la 10 non contiene veruna classe di individui di pari età. L'equazione 8 offre due diverse vie per raggiungere lo scopo. Se si rammenta che $\frac{t_0''}{t_0'} V(\omega) = 0$ ponendo nell'equazione [8] $x'' = \omega$ e $x' = x$ essa diverrà:

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(x) = \frac{t_0''}{t_0'} M_{t_0'+x}^{t_0+\omega} \quad [8a]$$

cioè: la classe di quelli che provenienti da una certa generazione raggiungono l'età x è uguale alla classe di quelli che muoiono fra le età x e ω ciò che è del resto evidente. Col secondo metodo avendosi

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(0) = F(t_0'') - F(t_0')$$

se si pone nell'equazione 8: $x'' = x$, $x' = 0$ si avrà:

$$\frac{t_0''}{t_0'} V(x) = \{ F(t_0'') - F(t_0') \} - \frac{t_0''}{t_0'} M_{t_0'+0}^{t_0+x} \quad [8b]$$

ciò che vuol dire che il numero di quelli d'una data generazione, che

raggiungono l'età x si ottiene sottraendo dal numero complessivo delle nascite fra t_0' e t_0'' il numero dei morti fra le età 0 ed x appartenenti alla stessa generazione. Bisogna quindi percorrere i registri delle nascite, da t_0' a t_0'' e i registri dei decessi per l'intervallo da $t = t_0'$ a $t = t_0'' + x$ la cui durata $t_0'' - t_0' + x$ è tanto minore quanto minore è x . In questo caso non v'ha alcuna indeterminazione, mentre nel metodo precedente v'ha l'indeterminazione della quantità ω . Entrambi questi metodi sono generali e spesso raccomandati, ciononostante anche l'equazione [8b] è di rado applicabile, non essendo in verun luogo calcolata a dovere la classe necessaria dei defunti.

L'equazione 9 o 11 offre del pari due diversi metodi di rendere calcolabile una classe d'individui d' x anni. Per $x'' = \omega$ ed $x' = x$ si ha:

$$\frac{t''-x}{t'-x} V(x) = \frac{t-x}{t-\omega} M_t^{t''} + \frac{t''-x}{t''-\omega} V(t'') - \frac{t'-x}{t'-\omega} V(t') \quad [9a]$$

cioè: si ottiene la classe di quelli che fra t' e t'' compiono l'età x se si aggiunge al numero di quelli che fra t' e t'' muoiono fra le età x e ω , la classe di quelli che a t'' stanno fra le età x e ω e si leva la classe di quelli che all'istante t' si trovano fra le stesse età.

Se invece nell'equazione 9 o 11 si pone $x'' = x$; $x' = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{t''-x}{t'-x} V(x) = & \{ F(t'') - F(t') \} - \\ & - \frac{t-0}{t-x} M_t^{t''} - \frac{t'-0}{t'-x} V(t'') + \frac{t'-0}{t'-x} V(t') \end{aligned} \quad [9b]$$

cioè: la parte dei nati fra $t_0 = t' - x$ e $t_0 = t'' - x$ che compiono l'età x , si trova sottraendo dai nati fra le epoche $t_0 = t'$ e $t_0 = t''$ quelli che fra t' e t'' muoiono fra le età x e 0 e il numero di quelli che a t'' stanno fra le età x e 0 e aggiungendo invece il numero di quelli che a t' stanno fra x e 0.

Le equazioni 9a e 9b sembrano molto utili al nostro scopo; abbisognano soltanto dell'esame dei registri delle nascite e dei decessi, durante un periodo di tempo lungo come quello delle nascite, da cui proviene la generazione che si vuol studiare all'età x e oltre a ciò dei censimenti divisi a seconda delle classi d'età. Ma anche questi metodi delle equazioni 9a e 9b sono poco praticabili, perchè i risultati dei censimenti sono troppo soggetti all'influenza delle migrazioni e perchè la distribuzione per classi d'età offre qua e là dei risultati incerti, in causa che parte degli individui non conoscono la loro età e parte non la dicono esatta ma soltanto approssimata.

Riassumiamo il modo col quale le classi finora trattate possono servire allo studio della mortalità.

Il numero di quelli che per ogni unità di nati muoiono fra le età x' e x'' cioè la quantità $f(x') - f(x'')$ può essere trovata, senza veruna supposizione sulla natura particolare della densità delle nascite e della serie dei decessi, quando si conosca la classe di quelli che nati in un dato intervallo, muoiono fra le età x' e x'' ed il numero dei nati nello stesso intervallo. La necessaria classe di decessi (vedi equazione 5) non venne però per quant'io sappia, calcolata finora. Sino a che si evita ogni supposizione sulla densità delle nascite e sulla natura della formula dei decessi, sono del tutto inservibili le altre due classi di defunti, cioè quella degli individui che nati fra due epoche stabilite, muoiono fra altre due epoche pure stabilite (calcolata in Prussia vedi equazione 6) e quella degli individui morti fra due epoche fisse, fra i limiti d'età da x'' ad x' (calcolata in Sassonia, Baviera; vedi equazione 7) alla determinazione diretta della quantità $f(x') - f(x'')$.

Il numero di quelli che per ogni unità di nati arrivano all'età x indicata con $f(x)$ è calcolabile senza ulteriori supposizioni, mediante una delle due classi d'individui di pari età (equazioni 1 e 2 che per questo scopo non hanno alcuna differenza) quando si conosca il numero dei nati dai quali proviene la classe d'individui di pari età. Ma queste classi possono essere calcolate soltanto indirettamente, non avendosi veruna annotazione sui viventi a certa età. Ciò si può fare o con una classe di defunti (equazioni 8a e 8b) che si potrebbe calcolare, ma non si calcola, o con un'altra classe di defunti (equazioni 9a e 9b) che ha bisogno anche degli elenchi dei censimenti. Le classi dei viventi allo stesso istante (equazioni 3 e 4) sono del tutto inservibili alla determinazione della quantità $f(x)$ sino a che si evitano le particolari supposizioni. Come unico metodo per calcolare direttamente $f(x') - f(x'')$ rimane dunque quello di calcolare realmente, come non s'è mai fatto finora, il numero dei defunti fra le età x' e x'' nati fra le epoche t_0' e t_0'' .

Oltre alle quantità già considerate ve ne sono alcune altre dipendenti dalla serie dei decessi e che debbono essere esaminate. Esse sono le seguenti: La somma delle età di quelli che per ogni unità di nati raggiungono l'età x ; ognuno di essi ha l'età x , il loro numero è $f(x)$, la somma delle loro età è quindi $xf(x)$. La somma delle età di quelli che per ogni unità di nati muoiono nell'età x ; essa è espressa da una quantità infinitamente piccola $-xf'(x)dx$. La somma delle età di quelli che muoiono fra le età x' e x'' ; è questa una quantità finita che si ottiene integrando fra questi limiti l'espressione data precedentemente come alla seguente equazione:

$$\int_{t_0''}^{t_0''} xf'(x)dx = x'f(x') - x''f(x'') + \int_{t_0''}^{t_0''} f(x)dx.$$

Essa esprime che la somma delle età di quelli che muoiono fra x' e x'' anni per ogni unità di nati è uguale alla somma delle età di quelli che arrivano ad x' anni, meno la somma delle età di quelli che arrivano ad x'' anni più una quantità che finora non ci si è presentata $\int_{x'}^{x''} f(x) dx$. La nuova quantità è la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando il numero degli individui di x anni per dx , che dà l'idea dell'aumento dell'età per tutti i valori di x da x' a x'' . Noi chiameremo questa quantità il *tempo trascorso* per gli individui di x anni provenienti dall'unità di nati fra x' e x'' .

Esaminiamo ora le classi dei viventi e defunti che appartengono ad uno stato a serie continua di nascite. La *somma delle età degli elementi d'una classe* si ottiene moltiplicando la quantità infinitamente piccola di primo ordine (o di secondo ordine se trattasi di decessi) dalla quale si ottiene la classe stessa per x o $t - t_0$ e poscia integrando fra gli stessi limiti che servono per la rappresentazione della classe. Ciò corrisponde a fare per ogni classe la somma dei prodotti d'ogni sopravveniente età, pel numero di quelli che vi pervengono; è questa somma che chiameremo abbreviatamente la *somma delle età della classe*.

Siccome i limiti dell'integrazione sono gli stessi che per la rappresentazione delle classi, ci si presenta facilmente un simbolo per rappresentare le somme d'età, analogamente a quanto s'è fatto per le classi. Mentre V ed M rappresentano le classi di viventi o defunti prenderemo EV ed EM come simboli delle somme d'età delle classi di viventi e defunti e le indicheremo cogli stessi indici delle classi.

Cominciando dalle classi di viventi si ottengono 4 equazioni analoghe a le 1, 2, 3 e 4, cioè:

$$xf(x) \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) = \{ F'(t_0'') - F'(t_0') \} xf(x) = {}_{t_0'}^{t_0''} EV(x) \quad [15]$$

è la somma delle età degli individui d'una data generazione che pervengono all'età x . È uguale al prodotto di $xf(x)$ nel numero dei nati da t_0' a t_0'' la cui distribuzione nell'intervallo è indifferente.

Questa equazione offre un mezzo facile d'ottenere il valore di $xf(x)$.

In seguito:

$$\begin{aligned} & xf(x) \int_{t_0=t'-x}^{t_0=t''-x} F'(t_0) dt_0 = \\ & = \{ F'(t'' - x) - F'(t' - x) \} xf(x) = {}_{t'-x}^{t''-x} EV(x) \quad [16] \end{aligned}$$

è la somma delle età di quelli che da t' a t'' compiono l'età x .

Soltanto al variare di x le equazioni [15] e [16] sono sensibilmente diverse fra loro.

Procedendo:

$$\int_{t_0''}^{t_0''-t} dt_0 F''(t_0) (t-t_0) f(t-t_0) = {}_{t_0''}^{t_0''} E V(t) \quad [17]$$

è la somma delle età di quelli che nati da t_0' a t_0'' pervengono all'istante t ; essa dipende dalla densità delle nascite, l'integrazione non è eseguibile.

Finalmente:

$$\int_{t_0=t-x'}^{t_0''-x'} dt_0 F''(t_0) (t-t_0) f(t-t_0) = {}_{t_0''-x'}^{t_0''-x'} E V(t) \quad [18]$$

è una somma d'età non sensibilmente diversa dalla precedente fino a che la t rimane costante.

Nello stesso modo si hanno tre equazioni per la somma d'età delle tre classi di defunti (equazioni 5, 6 e 7) cioè:

La somma delle età dei defunti da x' a x'' nati fra le epoche t_0' e t_0'' :

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F''(t_0) \int_{x'}^{x''} x f'(x) dx = \\ & = - \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F''(t_0) \int_{t=t_0+x'}^{t=t_0+x''} (t-t_0) f'(t-t_0) dt = {}_{t_0'+x'}^{t_0''} E M_{t_0'+x'}^{t_0''} \quad [19] \end{aligned}$$

La somma dell'età dei morti da t' a t'' nati fra le epoche t_0' e t_0'' :

$$- \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F''(t_0) \int_{t'}^{t''} (t-t_0) f'(t-t_0) dt = {}_{t_0'}^{t_0''} E M_{t'}^{t''} \quad [20]$$

Finalmente la somma delle età di quelli che sono morti nelle età da x'' a x' fra le epoche t' e t'' :

$$\begin{aligned} & + \int_{t'}^{t''} dt \int_{x''}^{x'} F''(t-x) x f'(x) dx = \\ & = - \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F''(t_0) (t-t_0) f'(t-t_0) dt_0 = {}_{t_0''-x''}^{t_0''-x'} E M_{t'}^{t''} \quad [21] \end{aligned}$$

Nella stessa guisa che si trovarono le relazioni fra le classi dei viventi e defunti (equazioni 8, 9 o 11 e 10) si possono trovare anche fra le somme delle età e si avrà:

$$\begin{aligned} {}_{t_0'}^{t_0''} E M_{t_0'+x'}^{t_0''+x''} & = \{ F(t_0'') - F(t_0') \} \{ x' f(x') - x'' f(x'') \} + \\ & + \int_{x''}^{x'} f'(x) dx \} = \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F''(t_0) \int_{x''}^{x'} f'(x) dx - \\ & - \{ {}_{t_0'}^{t_0''} E V(x'') - {}_{t_0'}^{t_0''} E V(x') \} \quad [22] \end{aligned}$$

Questa equazione si può esprimere dicendo che la somma delle età di quelli che nati fra t_0' e t_0'' muoiono fra x' e x'' , è uguale al tempo trascorso per questi nati fra le età x' ed x'' , meno l'aumento che acquista la somma delle età degli individui della stessa generazione che pervengono all'età x , quando x passa da x' a x'' .

Per la somma delle età degli individui morti da t' a t'' appartenenti alla generazione da t_0' a t_0'' si ha:

$$\begin{aligned} {}_{t_0'}^{t_0''}EM'_{t'} &= \int_{t_0'}^{t_0''} F''(t_0) \{ (t' - t_0) f(t' - t_0) - \\ &- f(t'' - t_0) (t'' - t_0) + \int_{t'}^{t''} f(t - t_0) dt \} dt_0 = \\ &= \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F''(t_0) \int_{t'}^{t''} f(t - t_0) dt - \{ {}_{t_0'}^{t_0'}EV(t'') - {}_{t_0'}^{t_0'}EV(t') \} \quad [23] \end{aligned}$$

cioè: Questa somma d'età è uguale al tempo trascorso fra t' e t'' per quelli che nascono fra t_0' e t_0'' , meno l'aumento che acquista la somma delle età di quelli che nati fra t_0' e t_0'' pervengono all'istante t , quando t passa da t' a t'' .

Finalmente per la somma delle età degli individui morti fra t' e t'' nelle età fra x' ed x'' :

$$\begin{aligned} {}_{t'-x'}^{t''-x''}EM'_{t'} &= \{ F''(t'' - x') - F''(t' - x') \} x' f(x') - \\ &- F''(t'' - x'') - F''(t' - x'') x'' f(x'') + \\ &+ \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t-x'} F''(t_0) (t' - t_0) f(t' - t_0) dt_0 - \\ &- \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t'-x''} F''(t_0) f(t - t_0) dt_0 = \\ &= \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F''(t_0) f(t - t_0) dt_0 - \\ &- \{ {}_{t'-x''}^{t''-x''}EV(x'') - {}_{t'-x''}^{t''-x''}EV(x') \} - \{ {}_{t'-x''}^{t'-x''}EV(t'') - \\ &- {}_{t'-x''}^{t'-x''}EV(t') \} \quad [24] \end{aligned}$$

Quella somma è cioè uguale al tempo trascorso fra t' e t'' per quegli individui che si trovavano fra le età x'' ed x' , meno l'aumento calcolato da x' a x'' della somma d'età di quelli che da t' a t'' compiono l'età x , meno l'aumento calcolato da t' a t'' della somma d'età di quelli che al tempo t' si trovavano nella classe d'età da x'' ad x' .

Il contenuto delle equazioni 22, 23 e 24 si esprime molto più semplicemente se si introduce in ciascuna di esse una conveniente trasformazione colla quale esse acquistano maggior simmetria.

Se dall'equazione 22 si sottrae l'identità

$$0 = \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F(t_0) \int_{x_0'}^{x_0''} f(x) dx$$

essa si può esprimere dicendo: la somma dell'età di quelli che nati fra t_0' e t_0'' son morti fra le età x' e x'' è uguale all'aumento della somma d'età e del tempo trascorso sino al compimento dell'età x'' , per quegli individui che nati fra le epoche t_0' e t_0'' raggiungono l'età x , calcolato l'aumento da x' a x'' e preso negativamente (vedi equazione 8).

In seguito sottraendo l'equazione

$$0 = \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) \int_{t_0'}^{t_0''} f(t - t_0) dt$$

dall'equazione 23 si potrà dire che la somma d'età di quelli che nati fra le epoche t_0' e t_0'' muoiono fra gli istanti t' e t'' , è uguale all'aumento della somma d'età e del tempo trascorso, sino al raggiungimento dell'istante t'' , per quegli individui che nati fra t_0' e t_0'' raggiungono il tempo t' , calcolato l'aumento da t' a t'' e preso negativamente (vedi equazione 10).

La trasformazione dell'equazione 24 non è così semplice. Invece del tempo trascorso fra t' e t'' per gli individui che si trovano fra x'' ed x' bisogna trovare un'altra espressione mediante le stesse proposizioni analitiche di cui ci siamo serviti fin qui.

Dessa è la seguente:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0'}^{t_0''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0) f(t - t_0) dt_0 = \\ & = \{ F(t'' - x') - F(t' - x') \} \int_{x'}^{x''} f(x) dx - \\ & - \{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') \} \int_{x''}^{x'} f(x) dx + \\ & + \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0) \int_{x=t-t_0}^{x=x''} f(x) dx dt_0 - \\ & - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F'(t_0) \int_{x=t-t_0}^{x=x''} f(x) dx dt_0 \quad [25] \end{aligned}$$

cioè: il tempo trascorso fra t' e t'' per quegli individui che si trovano fra x'' ed x' , è uguale al tempo trascorso fra le età x' e x'' per quelli che da t' a t'' compiono l'età x'' , meno il tempo trascorso fra le età x'' ed x' per quelli che fra t' e t'' compiono l'età x' (quantità nulla che si scrive soltanto per simmetria), più il tempo trascorso per quelli che all'istante t' sono fra le età x'' e x' , dall'età ch'essi hanno a t' sino al compimento dell'età x'' , meno il tempo trascorso per quelli che al

tempo t'' stanno fra x'' ed x' dall'età ch'essi hanno a t' sino al compimento dell'età x'' .

Se si introduce il valore dato dall'equazione 25 nella 24 si otterrà la seguente espressione più facile ad interpretarsi:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t''} EM_t^{t''} = \\
 & = \{ F(t'' - x') - F(t' - x') \} \{ x' f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x) dx \} - \\
 & - \{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') \} \{ x'' f(x'') + \int_{x''}^{x''} f(x) dx \} + \\
 & + \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t'-x''} F''(t_0) \{ (t' - t_0) f(t' - t_0) + \int_{x=t'-t_0}^{x''} f(x) dx \} dt_0 - \\
 & - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F''(t_0) \{ (t'' - t_0) f(t'' - t_0) + \\
 & + \int_{x=t''-t_0}^{x''} f(x) dx \} dt_0 \quad [26]
 \end{aligned}$$

che si può tradurre come segue: La somma delle età dei defunti da t' a t'' nell'età da x' a x'' , è uguale all'aumento che acquistano la somma d'età ed il tempo trascorso sino al compimento dell'età x'' , per quegli individui che da t' a t'' compiono l'età x , l'aumento calcolato da x' a x'' preso negativamente; più l'aumento che acquista la somma dell'età e il tempo trascorso sino al compimento dell'età x'' , di quegli individui che a t' stanno fra le età x'' ed x' calcolato l'aumento da t' a t'' e preso negativamente (vedi equazioni 9 o 11).

Da ciò si rileva che le stesse relazioni che sussistono fra le classi dei defunti e quelle dei viventi, si ripetono fra le somme delle età dei defunti da una parte e la somma di quelle dei viventi aumentata del tempo a percorrerli dall'altra e oltre a ciò sussistono a causa del tempo a percorrerli tutte le altre relazioni che sono indicate nelle formole.

La somma delle età dei viventi della stessa età (equazioni 15 e 16) non può essere calcolata coi dati sui viventi, poichè, come s'è già osservato per le equazioni 1 e 2, non esistono note sui viventi della stessa età.

La somma delle età dei viventi allo stesso tempo è facile invece a trovarsi mediante gli elenchi dei censimenti, nei quali però dovrebbero esporsi le età e non soltanto le classi d'età. Invece di sommare come generalmente si usa soltanto gli interi anni d'età, bisogna calcolare l'età esatta d'ogni individuo dal giorno della nascita sino all'istante del censimento, indi procedere all'addizione.

La somma delle età dei defunti è facile a calcolarsi in tutti tre i

casi (equazioni 19, 20 e 21). Dopo che si sono limitati nei registri delle morti i casi che appartengono ad una delle tre classi, vengono sommate le età per tutti gli indicati decessi e così si ottiene la somma d'età d'una classe di defunti.

La somma dell'età di quelli che per ogni unità di nati raggiungono l'età x cioè la quantità $xf(x)$ si trova quando è dato $f(x)$. All'opposto la somma d'età di quelli che per ogni unità di nati muoiono fra x' e x'' si trova dividendo la somma d'età dei morti fra x' e x'' , nati fra t_0' e t_0'' pel numero dei nati fra queste stesse epoche.

Il tempo trascorso per gli individui che per ogni unità di nati arrivano ad x anni fra x' e x'' , si trova se alla somma d'età dei defunti cioè a $x'f(x') - x''f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x) dx$ si aggiunge la differenza $x''f(x'') - x'f(x')$ poichè rimane così il solo integrale che noi chiamiamo tempo trascorso. La somma d'età dei defunti è uguale al tempo trascorso soltanto allorchè $x''f(x'') - x'f(x') = 0$ cioè quando è nullo l'aumento della somma d'età degli individui che arrivano agli x anni (per ogni unità di nati) quando x passa da x' a x'' . Questa condizione è verificata qualunque sia la formola dei decessi quando si pone $x' = 0$; $x'' = \omega$. La somma d'età dei defunti fra 0 e ω anni per ogni unità di nati è quindi sempre uguale al tempo trascorso da questi nati fra le età 0 e ω . Ciò avviene anche per certi altri valori di x' e x'' che però non possono essere dati indipendentemente dalla serie dei morti.

Il tempo trascorso per ogni unità di nati fra le età x' e x'' si può trovare dalle equazioni 22 e 26, ma il procedimento è molto lungo.

Anche le proposizioni relative alla somma delle età possono rappresentarsi graficamente come alle osservazioni seguenti:

La somma delle età degli individui della stessa età è rappresentata dalla somma delle aree dei rettangoli formati dalle ascisse x e dalle ordinate che per ogni aumento di nascite rappresentano la parte che perviene agli x anni.

Similmente per la somma delle età degli individui viventi contemporaneamente, i rettangoli da sommarsi sono formati dalle ordinate che rappresentano ad ogni aumento di nascite quel numero d'individui che pervengono a $t - t_0$ anni e delle corrispondenti ascisse $t - t_0$.

Se nella fig. 20 l'ordinata OT rappresenta l'aumento di nascite $F'(t_0) dt_0$ i di cui successivi decessi sono rappresentati colla curva TU e se si pone l'ascissa $OM = x$, l'area del rettangolo $OMQR$ rappresenta la somma d'età di quelli che arrivano agli x anni provenienti da quell'aumento di nascite.

La somma delle età dei defunti fra x' e x'' per lo stesso aumento

di nascite si rappresenta coll'area $SPQR$ se $OM = x'$; $ON = x''$ e l'area $MQPN$ misura il tempo trascorso per gli individui che da quell'aumento di nascite pervengono agli x anni, quando x passa da x' a x'' .

Se si pone $OT = 1$ si può trovare facilmente la relazione fra la somma d'età dei defunti fra x' e x'' per ogni unità di nati da una parte e la somma d'età degli individui di x' anni, di quelli di x'' anni e del tempo trascorso dall'altra per mezzo della fig. 20. Si ha cioè: $SPQR = OMQR - ONPS + MNQP$.

La somma d'età d'una classe di defunti si ottiene se si ripete la stessa costruzione per tutti quegli aumenti di nascite che costituiscono la classe che si considera.

Finora noi ci siamo occupati delle classi dei viventi distinte per mezzo degli elementi xt_0' e t_0'' (equazione 1); x' e t' (equazione 2); tt_0' t_0'' (equazione 3) tx' x'' (equazione 4) e quelle dei defunti distinte per mezzo degli elementi $x'x''t_0'$ t_0'' (equazione 5); t_0' $t_0''t'$ t'' (equazione 6); $t't'x'$ x'' (equazione 7).

Noi chiameremo queste classi le *classi principali*; esse servono a distinguere i viventi quand'è dato:

- un punto dell'età e un intervallo delle nascite,
- un punto dell'età e un intervallo del tempo corrente,
- un punto del tempo corrente e un intervallo delle nascite,
- un punto del tempo corrente e un intervallo delle età;

e i defunti quand'è dato:

- un intervallo d'età ed uno di nascite,
- un periodo di nascite ed uno di decessi,
- un periodo di decessi ed uno d'età.

Oltre queste classi ne sono evidentemente possibili anche altre che chiameremo *secondarie* e che sono assegnate:

pei viventi mediante un'età, un punto limite del tempo delle nascite e un punto limite del tempo corrente (xt_0t); ovvero mediante un punto del tempo corrente, un punto limite dell'epoca delle nascite e un punto limite dell'età (tt_0x),

e pei defunti mediante un intervallo di nascite, un punto limite d'età e un punto limite d'epoca di decessi ($t_0't_0''xt$); ovvero un intervallo di decessi, un punto limite dell'epoca delle nascite e un punto limite dell'epoca dei decessi ($x'x''t_0t$).

Queste classi secondarie possono essere rappresentate come abbiamo fatto per le principali.

Cominciamo dai viventi. I viventi all'età x quando è dato per l'epoca delle nascite un limite t_0 , pel tempo corrente un limite t , si possono definire come i viventi che provengono da un periodo di na-

scite compreso fra t_0 e $t - x$ ovvero come i viventi dell'età x pei quali si compie questa età fra i limiti t e $t_0 + x$. Questa classe secondaria si potrà quindi rappresentare servendosi dell'espressione $dt_0 F'(t_0) f(x)$ ovvero dell'espressione $dt F'(t - x) f(x)$ che si devono integrare fra convenienti limiti di cui uno è dipendente da x . Si deve però osservare che se t_0 deve essere il limite superiore dell'epoca delle nascite, bisogna che t sia dato in modo che $t - x < t_0$ e se t_0 deve essere il limite inferiore dell'epoca delle nascite è soltanto valido un tal valore di t_0 che dia $t_0 < t - x$.

Si hanno così due classi secondarie di viventi della stessa età cioè: se $t - x < t_0$:

$$f(x) \int_{t-x}^{t_0} F'(t_0) dt_0 = f(x) \int_t^{t_0+x} F'(t-x) dt = {}_{t-x}^{t_0} V(x) \quad [27]$$

se $t - x > t_0$:

$$f(x) \int_{t_0+x}^t F'(t-x) dt = f(x) \int_{t_0}^{t-x} F'(t_0) dt_0 = {}_{t_0}^{t-x} V(x) \quad [28]$$

Il simbolo è come il precedente e l'integrazione si può eseguire, ma le due classi secondarie così ottenute non sono sensibilmente diverse da quelle delle equazioni 1 e 2 quando si consideri la x come invariabile.

Il valore delle classi al variare della x si trova facilmente come si fece per la classe dell'equazione 2.

La classe secondaria dei viventi contemporaneamente quand'è dato il tempo t , un limite d'età x e un limite t_0 per l'epoca delle nascite, si può definire come costituita dei viventi al tempo t nati fra le epoche $t - x$ e t_0 ; ovvero appartenenti alla classe d'età limitata fra $t - t_0$ ed x ; cosicchè per calcolarla si può adoperare tanto la formola $dt_0 F'(t_0) f(t - t_0)$ ovvero $- dx F'(t - x) f(x)$. Anche qui si hanno due classi diverse secondo che $t - x < 0 > t_0$ cioè:

se $t - x < t_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{t-x}^t dt_0 F'(t_0) f(t - t_0) = \\ & = - \int_{t-x}^{t_0} dx F'(t - x) f(x) = {}_{t-x}^{t_0} V(t) \end{aligned} \quad [29]$$

se $t - x > t_0$:

$$\int_x^{t-t_0} dx F'(t - x) f(x) = \int_{t_0}^{t-x} dt_0 F'(t_0) f(t - t_0) = {}_{t_0}^{t-x} V(t) \quad [30]$$

Il simbolo è come il precedente, l'integrazione non è eseguibile. Sino a che t rimane invariabile queste due classi non sono sensibilmente diverse dalle principali delle equazioni 3 e 4; se t è variabile

si possono cercare le variazioni come si fece per le classi dell'equazione 4.

Sono più interessanti le classi secondarie di defunti. I defunti della generazione fra t_0' e t_0'' pei quali sia dato un limite x d'età e un limite t d'epoca di decessi, debbono trovarsi in un periodo d'età compreso fra $t - t_0$ ed x e devono morire in un intervallo compreso fra t e $t_0 + x$. Per sviluppare questa classe di defunti, si può utilizzare tanto l'espressione $- dt_0 F'(t_0) f'(x) dx$ quanto l'espressione $- dt_0 F'(t_0) f'(t - t_0) dt$. Ci serviremo dell'ultima espressione e avendo riguardo che t può rappresentare il limite inferiore od anche il superiore del periodo dei decessi, troveremo per la richiesta classe la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \mp \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) \int_{t=t_0}^{t=t_0+x} f'(t-t_0) dt = \pm \frac{t_0''}{t_0'} M_t^{t_0'+x} = \\ & = \pm \left\{ \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) f(t-t_0) dt_0 - \{ F(t_0'') - F(t_0') \} f(x) \right\} \quad [31] \end{aligned}$$

Il segno superiore si impiega quando x rappresenta la maggiore età e t il limite inferiore del periodo dei decessi; il segno inferiore invece quando x indica l'età minore e t il limite superiore del periodo dei decessi, coi due segni diversi si intende anche rappresentato lo scambio necessario dei limiti degli interni integrali.

Esempio pel segno inferiore: Quelli che nati da $t_0' = 1808$ sino a $t_0'' = 1815$ muoiono dall'istante $t = 1820$ dopo aver raggiunto l'età di 30 anni, si ottengono se si sottrae il numero di quelli che provenienti dall'accennata generazione pervengono ai 30 anni dal numero di quelli della stessa generazione che erano superstiti alla fine del 1820 (principio del 1821). Nella fig. 11 è rappresentata la posizione di queste classi di viventi.

Esempio pel segno superiore: $t = 1850$, cioè la classe di quelli che provenienti dallo stesso periodo di nascite sono morti avanti la fine dell'anno 1850 sopra i 30 anni d'età. La posizione delle classi di viventi alle quali può esser ricondotta questa classe di defunti è rappresentata dalla fig. 12.

La classe dei defunti per la quale è dato l'intervallo dei decessi t' e t'' , un limite t_0 dell'epoca delle nascite e un limite d'età x è rappresentata dall'equazione:

$$\begin{aligned} & \mp \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x}^{t_0=t_0} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0 = \pm \frac{t_0}{t-x} M_t^{t''} = \\ & = \pm \left\{ \int_{t'-x}^{t_0} F'(t_0) f(t'-t_0) dt_0 - \right. \\ & \left. - \int_{t'-x}^{t_0} F'(t_0) f(t''-t_0) dt_0 - \{ F(t''-x) - F(t'-x) \} f(x) \right\} \quad [32] \end{aligned}$$

Il segno superiore serve quando x rappresenta la maggiore età e t_0 il limite superiore del periodo delle nascite, il segno inferiore quando x rappresenta la minore età e t_0 il principio del periodo delle nascite. In questo caso il secondo membro dell'equazione è costituito di 3 classi di viventi, per cui questa classe secondaria è meno semplice della precedente.

Esempio pel segno superiore. I morti da $t' = 1860$ a $t'' = 1870$ d'età inferiore ai 20 anni, nati prima del 1855, si ottengono sottraendo da quelli che nati fra il 1840 e 1855 sono superstiti al 1860, quelli che dal 1866 al 1870 compiono i 20 anni e quelli che al 1870 sono superstiti della generazione 1860-1855 (vedi fig. 13).

Pel segno inferiore: Quando si richiedono i morti da $t' = 1860$ a $t'' = 1870$ che hanno l'età superiore ai 20 anni e che nacquerò dopo il 1830 bisogna procedere nel seguente modo: ai viventi nel 1860 della generazione 1830-1840 si aggiungono quelli che fra il 1860 e il 1870 compiono i 20 anni e si sottraggono i viventi al 1870 della generazione 1830-1850 (vedi fig. 14).

Finalmente si cerchino i defunti pei quali è dato l'intervallo d'età x' x'' , un limite del periodo delle nascite e un limite di quello dei decessi. Questa classe secondaria si può rappresentare coll'equazione:

$$\begin{aligned} & \pm \int_{x'}^{x''} dx \int_{t-x}^{t_0} F'(t_0) f'(x) dt_0 = \\ = & \pm \int_{t-x''}^{t-x'} M_t^{t+x} = \mp \int_{t-x}^{t_0} M_{t_0+x''}^{t_0+x'} = \pm \{ [F'(t_0) - F'(t-x')] f(x') - \\ & - [F'(t_0) - F'(t-x'')] f(x'') \} + \\ & + \int_{t_0-t-x''}^{t_0-t-x'} F''(t_0) f(t-t_0) dt_0 \} \end{aligned} \quad [33]$$

Il segno superiore si adopera quando t_0 è il limite superiore del periodo delle nascite, t il limite inferiore del periodo dei decessi, il segno inferiore nel caso contrario.

Esempio pel segno superiore. Gli individui dai 10 ai 13 anni morti dopo il 1840 che erano nati prima del 1835, si trovano mediante le seguenti classi di viventi. Ai viventi nel 1840 fra i 13 e i 10 anni si aggiungono quelli che compiono i 10 anni provenendo dalla generazione 1830-1835 e poscia si sottraggono quelli che compiono gli anni 13 e provengono dalla generazione 1827-1835 (vedi fig. 15).

Esempio pel segno inferiore. Gli individui dai 10 ai 13 anni morti prima del 1850 e che erano nati dopo il 1830. Essi sono a trovarsi mediante le seguenti classi. Dagli individui che arrivano ai 10 anni nascendo fra il 1830 e il 1840 si sottraggono quelli che nati fra

il 1830 e il 1837 pervengono ai 13 anni e quelli che al 1850 si trovano fra i 13 e i 10 anni (vedi fig. 16).

Si hanno in questo modo 6 classi di defunti sensibilmente diverse fra loro, la cui diversità può facilmente rilevarsi, confrontando nelle linee punteggiate delle fig. 11 a 16 inclusive le classi di viventi alle quali sono ricondotte queste classi di defunti.

Vi sono però dei casi particolari pei quali non si hanno sei, ma solo due diverse classi secondarie dalle equazioni 31, 32 e 33 e che sono d'una speciale importanza.

Se in ciascuna delle tre equazioni si assume il segno superiore e poscia si scelgono le quantità colle quali si sono assegnate le classi per modo che sia: nell'equazione 31: $t = t_0' + x$; nella 32: $t_0 = t'' - x$ e nella 33: $t_0 = t - x'$ queste equazioni divengono:

la 31:

$${}_{t_0}^{t_0''} M_{t_0+x}^{t_0'+x} = \int_{t_0}^{t_0'} F'(t_0) \{ f(t_0' + x' - t_0) - f(x) \} dt_0 \quad [34]$$

la 32:

$${}_{t-x}^{t''} M_{t'+x'}^{t'} = \int_{t_0=t-x'}^{t_0=t_0} F'(t_0) \{ f(t' - t_0) - f(x) \} dt_0 \quad [35]$$

la 33:

$${}_{t-x''}^{t-x'} M_{t_0+x'}^{t+x} = \int_{t_0=t-x'}^{t_0=t_0} F'(t_0) \{ f(t - t_0) - f(x') \} dt_0 \quad [36]$$

Queste equazioni non sono sensibilmente diverse fra loro, poichè ciascuna di esse rappresenta i morti provenienti da un certo periodo di nascite, prima d'una certa età o più brevemente i morti d'una generazione, dall'istante in cui comincia a compiersi una età fino al compimento della medesima. Le tre espressioni diventano identiche se si prendono uguali i limiti dell'intervallo delle nascite e si prende la stessa età, ovvero lo stesso istante in cui incomincia a compiersi l'età.

Se all'opposto nelle equazioni 31, 32, 33 si adotta il segno inferiore e poscia si scelgono le quantità, colle quali sono assegnate le classi nel modo seguente:

Nell'equazione 31: $t = t_0'' + x$; nella 32: $t_0 = t' - x$ e nella 33: $t_0 = t - x''$ queste equazioni divengono:

la 31:

$${}_{t_0}^{t_0''} M_{t_0+x}^{t_0''+x} = \int_{t_0}^{t_0'} F'(t_0) \{ f(x) - f(t_0'' + x - t_0) \} dt_0 \quad [37]$$

la 32:

$${}_{t-x}^{t''} M_{t'}^{t'} = \int_{t_0=t_0}^{t_0=t'-x} F'(t_0) \{ f(x) - f(t' - t_0) \} dt_0 \quad [38]$$

la 33:

$${}_{t-x'}^{t-x''} M_{t+x'}^{t_0+x''} = \int_{t_0=t_0}^{t_0=t-x'} I''(t_0) \{f(x') - f(t-t_0)\} dt_0 \quad [39]$$

che non sono più sensibilmente diverse. Ognuna delle tre equazioni rappresenta i defunti d'una certa generazione, da una certa età, fino all'istante in cui l'ultimo nato compie questa età o più brevemente: i defunti d'una certa generazione, da una certa età fino alla fine del periodo in cui si compie l'età. Le tre espressioni divengono identiche se in ciascuna di esse si introducono gli stessi limiti del periodo delle nascite e la stessa estremità del periodo dei decessi.

Si hanno così due classi secondarie di defunti di due specie *particolari*.

I morti d'una generazione stabilita dall'istante in cui comincia a compiersi una certa età sino a questa età; essi possono ricondursi a due classi di viventi la cui posizione può rappresentarsi colle linee *AB*, *AC* fig. 11 (e similmente nelle figure 13 e 15). È questa la classe secondaria particolare della prima specie, equazioni 34, 35 e 36.

E i morti d'una certa generazione da una certa età, sino alla fine del periodo in cui si compie quell'età; sono del pari riconducibili a due classi di viventi la cui posizione è rappresentata colle linee *AB*, *AC* nella fig. 12 (e similmente nella 14 e 16), costituiscono la classe secondaria particolare della seconda specie, equazioni 37, 38 e 39.

In entrambi i casi le classi di viventi sono rappresentate da linee di cui una è retta parallela all'asse delle nascite, l'altra è curva parallela alla curva delle nascite. Nel primo caso la curva parte dal piede *A* della retta, nel secondo parte dalla sommità *B*. Le estremità della retta vengono determinate mediante due parallele all'asse delle ascisse alle distanze $F(t_0')$ e $F(t_0'')$.

Le classi secondarie particolari sono molto importanti, poichè col loro aiuto si può scomporre molto facilmente ciascuna delle sei classi provenienti dalle equazioni 31, 32 e 33. Ciascuna classe secondaria si può rappresentare come la somma d'una classe principale e d'una classe secondaria particolare e ciò in due modi diversi.

Supponendo nelle equazioni 31, 32 e 33 il segno superiore o inferiore, la classe secondaria dell'equazione 31 per la quale son dati t_0' e t_0'' è scomponibile in una delle due classi principali per le quali è dato t_0' e t_0'' ed in una classe particolare della prima o seconda specie; la classe secondaria della 32 per la quale son dati t' e t'' è scomponibile in una delle due classi principali per le quali son dati t' e t'' ed in una classe secondaria particolare della prima o seconda specie; la classe secondaria dell'equazione 33, per la quale son dati x' e x'' è

scomponibile in una delle due classi principali determinate da x' e x'' ed in una classe secondaria particolare della prima o seconda specie.

Analiticamente si può ottenere questa scomposizione, quando si scompongano regolarmente gli integrali, coi quali son rappresentati i viventi a cui si può ricondurre ogni classe secondaria, ma non v'ha bisogno di scrivere le 12 lunghe equazioni. La scomposizione si può verificare anche colla rappresentazione grafica, se p. es. nella fig. 11 (equazione 31 col segno superiore) ammettiamo che AB rappresenti la somma delle ordinate infinitamente piccole, la cui posizione è rappresentata colla linea stessa e se ammettiamo che anche per le altre linee avvenga lo stesso si vedrà che

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{t_0''} M_t^{t_0+x} &= DE - AC = \{ (DE - DF) + DF - AC \} = \\ &= \{ (DE - AB) + (AB - AC) \} \end{aligned}$$

Questa formola contiene entrambe le scomposizioni, poichè $DF - AC$ rappresenta secondo la figura la classe principale per la quale è dato t_0' e t_0'' e $DE - DF$ rappresenta una classe secondaria particolare della prima specie; mentre $DE - AB$ rappresenta l'altra classe principale che viene distinta con t_0' e t_0'' e $AB - AC$ è una classe secondaria particolare della prima specie (lo stesso dicasi delle altre classi).

Ogni classe principale di defunti si può scomporre nella stessa guisa delle classi secondarie, ma però in un sol modo ed in tre parti a vece che in due. Ogni classe principale è cioè uguale ad una classe secondaria della prima specie, una delle altre due classi principali e una classe secondaria della seconda specie.

I. Si abbia da scomporre la classe dei defunti fra x' e x'' anni che provengono dalla generazione da t_0' a t_0'' . Tanto in questa che nelle altre classi principali sono a distinguersi due casi diversi;

Se $x'' - x' > t_0'' - t_0'$ e quindi $t_0' + x'' > t_0'' + x'$, la classe di cui si tratta è uguale al numero dei defunti della stessa generazione dall'età x' sino all'istante $t_0'' + x'$, cioè sino alla fine del periodo in cui si compie l'età x' (classe secondaria particolare della seconda specie) più i defunti della stessa generazione nel periodo di decessi da $t_0'' + x'$ a $t_0' + x''$ cioè dall'istante in cui termina di compiersi l'età x' sino a quello in cui comincia a compiersi l'età x'' (classe principale) più i defunti della stessa generazione dall'istante $t_0' + x''$ cioè dall'istante in cui comincia a compiersi l'età x'' sino a questa età x'' (classe secondaria particolare della prima specie). Vedi fig. 5.

Se si ha all'opposto $t_0'' - t_0' > x'' - x'$ e quindi $t_0'' + x' > t_0' + x''$ la classe considerata è uguale al numero dei defunti dall'età x' sino al-

l'istante $t_0' + x''$ cioè sino alla fine del periodo in cui si compie l'età x'' pei membri della generazione compresa fra t_0' e $t_0' + x'' - x'$ (classe particolare della seconda specie); più i morti fra le età x'' ed x' fra gli istanti $t_0' + x''$ e $t_0'' + x'$ (classe principale); più i defunti nati da $t_0'' + x' - x''$ sino a t_0'' dall'istante $t_0' + x'$ in cui comincia a compiersi l'età x'' per questa generazione sino all'età x'' (classe particolare della prima specie). Vedi fig. 6.

II. Scomponiamo la classe dei defunti fra t' e t'' della generazione fra t_0' e t_0'' . Se $t'' - t' > t_0'' - t_0'$ e quindi $t'' - t_0'' > t' - t_0'$ questa classe è uguale ai defunti della stessa generazione dall'istante t' , cioè dall'istante in cui comincia a compiersi l'età $t' - t_0'$ sino a questa età (classe particolare della prima specie); più i defunti della stessa generazione dall'età $t' - t_0'$ sino all'età $t'' - t_0''$ (classe principale); più i defunti della stessa generazione dall'età $t'' - t_0''$ sino all'istante t'' , cioè sino al termine del periodo in cui si compie questa età (classe particolare della seconda specie). Vedi fig. 7.

Se all'opposto $t_0'' - t_0' > t'' - t'$ e quindi $t' - t_0' > t'' - t_0''$ la stessa classe è uguale ai defunti della generazione da t_0' sino a $t'' - (t' - t_0')$ dall'età $t' - t_0'$ sino all'istante t'' in cui termina di compiersi l'età $t' - t_0'$ per questa generazione (classe particolare della seconda specie); più i morti fra le età $t' - t_0'$ e $t'' - t_0''$ fra gli istanti t' e t'' (classe principale); più i morti della generazione da $t' - (t' - t_0'')$ a t_0'' dall'istante t' in cui comincia a compiersi l'età $t'' - t_0''$ sino a questa età $t'' - t_0''$ (classe particolare della prima specie). Vedi figura 8.

III. Si abbia a scomporre la classe dei defunti da x'' ad x'' fra t' e t'' .

Se $t'' - t' > x'' - x'$ ovvero $t'' - x'' > t' - x'$, questa classe è uguale ai defunti della generazione da $t'' - x''$ a $t' - x'$, dall'istante t' in cui comincia il compimento dell'età x'' per questa generazione, sino all'età x'' (classe particolare della prima specie); più i defunti nell'età fra x'' ed x' della generazione da $t' - x'$ a $t'' - x''$ (classe principale); più i defunti della generazione da $t'' - x''$ a $t'' - x'$ dall'età x' sino all'istante t'' , cioè sino alla fine dell'intervallo in cui si compie l'età x' per questa generazione (classe particolare della seconda specie). Vedi fig. 9.

Se invece $x'' - x' > t'' - t'$ e quindi $t' - x' > t'' - x''$ questa classe è uguale ai defunti provenienti dal periodo di nascite da $t' - x''$ a $t'' - x''$ dall'istante t' in cui comincia a compiersi l'età x'' per questa generazione sino all'età x'' (classe particolare della prima specie); più i defunti della generazione da $t'' - x''$ a $t' - x'$ fra gli istanti t' e t'' (classe principale); più i defunti della generazione da $t' - x'$ a $t'' - x'$ dall'età x' all'istante t'' cioè sino alla fine del periodo in cui si compie

l'età x' per questa generazione (classe particolare della seconda specie). Vedi figura 10.

La prova geometrica di queste scomposizioni si può ottenere da ciascuna delle citate figure come si fece precedentemente.

Analiticamente invece si dimostrano nel modo seguente: Per ciascuna delle tre classi la cui somma deve essere uguale alle classi a scomporsi, si scrivano le equazioni contenenti le classi dei viventi, alle quali sono riducibili le classi di defunti. Si sommino poscia le tre equazioni e si troveranno le classi dei viventi per mezzo delle quali sono rappresentabili le classi di defunti da scomporsi.

La scomposizione di quelle classi principali per le quali i due intervalli che servono a distinguerle hanno uguale lunghezza è molto più semplice. In questo caso le classi principali possono essere rappresentate colla somma d'una classe particolare della prima specie e d'una classe particolare della seconda, poichè la classe principale che appariva nella precedente scomposizione si annulla, essendo nulla la durata d'uno degli intervalli che servivano a distinguerla.

Le tre classi principali si possono così scomporre in modo che gli elementi di ciascuna di esse possano essere messi a confronto con quelli delle altre. Seguendo queste regole per la scomposizione delle classi, si può formare un formulario che, mentre serve al calcolo delle classi secondarie della prima e della seconda specie, permette anche il calcolo delle tre classi principali. Per la grande importanza di questo risultato merita d'esser sviluppata alquanto più estesamente la scomposizione delle classi principali distinte mediante intervalli della stessa durata.

Ricominciando dai defunti fra x' e x'' della generazione da t_0' a t_0'' quando $x'' - x' = t_0'' - t_0'$ e quindi $t_0' + x'' = t_0'' + x'$ si avrà:

$$\begin{aligned} \int_{t_0'}^{t_0''} M_{t_0'+x''}^{t_0'+x''} &= \int_{t_0'}^{t_0''} F''(t_0) \{ f(t_0' + x'' - t_0) - f(x'') \} dt_0 + \\ &+ \int_{t_0'}^{t_0'} F'(t_0) \{ f(x') - f(t_0'' + x' - t_0) \} dt_0 = \\ &= \int_{t_0'}^{t_0''} I_{t_0'+x''}^{t_0'+x''} + \int_{t_0'}^{t_0''} II_{t_0'+x''}^{t_0'+x''} \end{aligned} \quad [40]$$

Abbiamo rappresentato con I la classe secondaria particolare della prima specie e con II quella della seconda specie e le abbiamo distinte cogli stessi indici delle classi principali alla cui scomposizione servono. Se si osserva che secondo quanto è stato detto precedentemente

$$t_0' + x'' = t_0'' + x' = \frac{1}{2} \{ t_0' + x' + t_0'' + x'' \} = \frac{1}{2} (\tau' + \tau'')$$

si vedrà che $t_0' + x''$ è il punto di mezzo dell'intervallo di tempo in cui

avvengono i decessi della classe principale e che la classe *I* (cogli indici come sopra) contiene quei defunti della classe principale che si trovano nella seconda metà dell'intervallo dei decessi; mentre *II* rappresenta i defunti della prima metà dello stesso intervallo.

Passiamo ora ai defunti fra t' e t'' della generazione da t_0' a t_0'' . Se $t_0'' - t_0' = t'' - t'$ e quindi $t'' - t_0'' = t' - t_0'$ si ha la seguente scomposizione:

$$\begin{aligned} {}_{t_0'}^{t_0''} M_{t'}^{t_0''} &= \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) \{ f(t' - t_0) - f(t'' - t_0'') \} dt_0 + \\ &+ \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) \{ f(t' - t_0') - f(t'' - t_0'') \} dt_0 = {}_{t_0'}^{t_0''} I_{t'}^{t_0''} + {}_{t_0'}^{t_0''} II_{t'}^{t_0''} \quad [41] \end{aligned}$$

Avendosi in questo caso

$$t'' - t_0'' = t' - t_0' = \frac{1}{2} \{ t' - t_0'' + t'' - t_0' \} = \frac{1}{2} (\xi' + \xi'')$$

si vede che *I* contiene i defunti della classe principale che non hanno raggiunto la metà dell'intervallo fra le età e *II* invece quelle che hanno oltrepassato questo limite.

Finalmente pei defunti fra le età x'' e x' fra le epoche t' e t'' quando sia $t'' - t' = x'' - x'$ è possibile la seguente scomposizione:

$$\begin{aligned} {}_{t-x''}^{t-x'} M_{t'}^{t''} &= \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0) \{ f(t' - t_0) - f(x'') \} dt_0 + \\ &+ \int_{t_0=t-x'}^{t_0=t-x''} F'(t_0) \{ f(x') - f(t'' - t_0) \} dt_0 = \\ &= {}_{t-x'}^{t-x'} I_{t'}^{t''} + {}_{t-x''}^{t-x'} II_{t'}^{t''} \quad [42] \end{aligned}$$

Essendo

$$t'' - x'' = t' - x' = \frac{1}{2} \{ t' - x'' + t'' - x' \} = \frac{1}{2} (\tau_0' + \tau_0'')$$

si vede che *I* contiene quei defunti della classe principale che appartengono alla prima metà del periodo delle nascite e *II* quelli invece che appartengono alla seconda metà del medesimo intervallo.

Se si confrontano le equazioni 40, 41 e 42 fra loro si trova

$${}_{t_0'}^{t_0''} I_{t_0+x''}^{t_0+x''} = {}_{t_0'}^{t_0''} I_{t'}^{t''} = {}_{t-x''}^{t-x'} I_{t'}^{t''}$$

se si pone $t' = t_0' + x''$; $t'' = t_0'' + x''$ e

$${}_{t_0'}^{t_0''} II_{t_0+x''}^{t_0+x''} = {}_{t_0'}^{t_0''} II_{t'}^{t''} = {}_{t-x''}^{t-x'} II_{t'}^{t''}$$

se si pone $t' = t_0' + x'$; $t'' = t_0'' + x'$.

Ciò vuol dire che il numero dei morti della classe principale ${}_{t_0}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$ che si trovano nella seconda metà del periodo dei decessi è uguale al numero dei morti della stessa generazione nell'intervallo da $t' = t_0' + x'$ a $t'' = t_0'' + x''$ che non hanno ancora raggiunto la metà fra i limiti possibili d'età; ed è anche uguale al numero dei defunti fra le età x'' ed x' fra le epoche $t' = t_0' + x'$ e $t'' = t_0'' + x''$ che appartengono alla prima metà del periodo delle nascite.

All'opposto il numero dei defunti della classe principale che si trovano nella prima metà del periodo dei decessi, è uguale al numero dei defunti della stessa generazione dall'epoca $t' = t_0' + x'$ a $t'' = t_0'' + x'' = t_0' + x'$ che hanno già oltrepassato la metà dell'intervallo fra le possibili età ed è anche uguale al numero dei defunti fra le età x'' ed x' nel periodo da $t' = t_0' + x'$ sino a $t'' = t_0'' + x''$ che si trovano nella seconda metà del periodo delle nascite (Vedi nelle figure 17, 18 e 19 la rappresentazione grafica di queste tre identiche classi secondarie con $AB - BC$).

Applicazioni pratiche di queste proposizioni possono essere le seguenti:

Se, come in Prussia, si calcola la classe dei defunti da t' a t'' che provengono da un periodo di nascite d'ugual lunghezza da t_0' a t_0'' e si eseguisce questa operazione anche per successivi ed uguali periodi di nascite e decessi, si può scomporre questa classe secondo che i defunti hanno o no raggiunta la metà fra i possibili limiti d'età. Eseguita questa scomposizione si potrà avere colle parti ottenute e coll'applicazione di quanto sopra, la classe dei defunti fra x'' ed x' e fra t' e t'' e la classe dei defunti fra x'' ed x' provenienti dalla stessa generazione.

Se invece si calcola come in Sassonia la classe dei defunti da x'' ad x' anni fra t'' e t' (la cui durata è uguale a quella dell'intervallo fra le età) e se ciò si eseguisce anche per uguali e successivi intervalli di decessi e di età, si può dividere la classe così ottenuta secondo che i defunti appartengono alla prima o alla seconda metà del periodo delle nascite. Dalle parti così ricavate si può dedurre la classe dei defunti da x' ad x'' anni fra le epoche di nascita da t_0' a t_0'' e la classe dei defunti da t' a t'' fra le epoche t_0' e t_0'' coll'applicazione di quanto sopra.

Abbiamo precedentemente veduto che alla determinazione diretta della mortalità si perviene calcolando i defunti d'una assegnata generazione che si trovano fra assegnati limiti d'età, cioè calcolando la classe ${}_{t_0}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$ e che ciò non avviene in pratica poichè si usa sempre chiudere i registri secondo periodi di decessi d'un sol anno, mentre

i defunti d'ogni generazione d'un anno e d'ogni classe d'età pure d'un anno, si trovano in un periodo di decessi di due anni e non d'un solo. La dimostrazione precedente ci offre il modo di dividere regolarmente le classi dei defunti calcolate in pratica pei periodi annui di decessi. Onde mostrare poi la chiarezza del procedimento facciamo seguire i moduli delle tabelle opportune pel calcolo delle classi principali necessarie al nostro scopo.

Tabella pel calcolo dell'anno 1864.

Fra i defunti del 1864 si trovavano:

Appartenenti alle classi d'età	0—1		1—2		2—3		3—4		4—5		5—6	
	1864	1863	1863	1862	1862	1861	1861	1860	1860	1859	1859	1858
(Nome del luogo) .	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	

Tabella pel calcolo dell'anno 1865.

Fra i defunti del 1865 si trovavano:

Appartenenti alle classi d'età	0—1		1—2		2—3		3—4		4—5		5—6	
	1865	1864	1864	1863	1863	1862	1862	1861	1861	1860	1860	1859
(Nome del luogo) .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I

Queste tabelle si possono applicare al calcolo dei defunti usato in Sassonia (classi d'età d'un anno, intervallo d'un anno pei decessi) quando per ogni classe (per esempio defunti nel 1864 fra 0 ed 1 anno) si distinguono i defunti, secondo che appartengono alla seconda o alla prima metà del periodo delle nascite (1864 o 1863) e si possono applicare ai calcoli usati in Prussia (generazione d'un anno, periodo di decessi pure d'un anno) quando per ogni classe (per esempio pei morti nel 1864

della generazione del 1863) si ricavano i limiti d'età fra i quali si trovano i suoi membri (cioè fra i limiti 0 e 2) e poscia si distinguono secondo che hanno o non hanno passato la metà del periodo delle nascite cioè l'età d'un anno.

Con *I, II* si indica in ogni finca di che specie è la classe secondaria in essa contenuta e che serve alla scomposizione.

È chiaro come da queste tabelle, quando fossero riempite le finche, si potrebbero trovare i morti per ogni classe d'età d'un anno e per ogni generazione pure d'un anno. Per esempio i defunti fra gli anni 1-2 della generazione del 1863 si hanno colla somma della finca 3 della tabella per l'anno 1864 colla finca 4 della tabella 1865, poichè i defunti di questa classe non possono trovarsi che fra i decessi di questi due anni.

La finca 3 del casellario per l'anno 1864 contiene i morti fra gli anni 1 — 2 della generazione del 1863, che si trovano nella prima metà del periodo dei decessi; ovvero i defunti della stessa generazione fra gli istanti $t' = 1862 + 1$ e $t'' = 1863 + 1$ cioè nell'anno 1864, che hanno oltrepassato la metà dei limiti d'età $1864 - 1862 = 2$ e $1863 - 1863 = 0$, vale a dire l'età d'un anno, ovvero anche i defunti fra gli anni 1 — 2 fra gli istanti $t' = 1862 + 1$ e $t'' = 1863 + 1$ cioè nell'anno 1864 che sono nati nella seconda metà del periodo delle nascite cioè nel 1863, poichè l'intervallo delle nascite abbraccia gli anni 1862 e 1863. Queste tre diverse interpretazioni del contenuto della finca 3 sono perfettamente identiche per quanto s'è dimostrato più sopra. Lo stesso dicasi della finca 4 del formulario per l'anno 1865.

Se si avessero dei calcoli generali sui defunti questi casellari servirebbero meglio d'ogni altro materiale alle ricerche dirette sulla mortalità e permetterebbero di calcolare contemporaneamente: 1° la diminuzione d'ogni generazione d'un anno, durante un periodo di decessi pure d'un anno; a questo quesito sono specialmente dedicati gli studi prussiani; 2° come si distinguono i defunti d'ogni periodo annuo di decessi dietro classi annue d'età; l'interesse di questa domanda è così grande che ad essa sono quasi esclusivamente dedicate le ricerche di tutti i paesi; 3° quanti d'ogni generazione cioè dei nati di ciascun anno muoiono fra due limiti d'età; questa domanda è per noi la più importante, perchè permette di conoscere direttamente la mortalità a seconda della età.

Noi abbiamo finora sviluppate le proposizioni generali sulle classi di viventi e defunti ed abbiamo anche cercato da quali classi si poteva ricavare direttamente la mortalità a seconda dell'età, senza far alcuna supposizione sulla natura della densità delle nascite e della formola dei decessi. Queste classi erano quelle dei viventi della stessa età

(equazioni 1 e 2) e quella dei defunti fra certi limiti d'età, provenienti da un dato periodo di nascite (equazione 5). Facendo qualche supposizione sulla densità delle nascite e sulla natura della serie dei decessi, tutte le altre classi principali divengono più o meno appropriate alle ricerche approssimate sulla mortalità a seconda dell'età.

Le due classi d'individui contemporaneamente viventi (equazioni 3 e 4) non sono sensibilmente diverse pel nostro scopo.

Non è quindi necessario di trattarle separatamente. Gli individui viventi all'istante t fra gli anni x'' ed x' sono espressi dall'equazione (vedi equazione 4):

$$\int_{t-x''}^{t-x'} V(t) = \{ F'(t-x') - F'(t-x'') \} f[x' + \frac{1}{2}(x'' - x')].$$

Se il numero di questi viventi si divide pel numero dei nati fra $t_0 = t - x''$ e $t_0 = t - x'$ si avrà nel quoziente il numero di quelli che per ogni unità di nati raggiungono una età che è compresa fra x' e x'' e questa età può essere determinata soltanto mediante delle supposizioni sulla densità delle nascite e sulla serie delle morti.

Supponendo che la densità delle nascite da $t_0 = t - x''$ a $t_0 = t - x'$ sia costante cioè:

$$F'(t_0) = \frac{F'(t-x') - F'(t-x'')}{x'' - x'}$$

e che la serie delle morti sia espressa dalla formola:

$$f(x) - f(x') = \frac{f(x') - f(x'')}{x'' - x'} (x - x')$$

cioè che le ordinate della curva $f(x)$ siano uguali a quelle della corda che unisce le estremità delle ordinate $f(x')$ e $f(x'')$ si avrà:

$$\int_{t-x''}^{t-x'} V(t) = \{ F'(t-x') - F'(t-x'') f(x' + \frac{1}{2}(x'' - x')) \}$$

e dividendo il numero dei viventi fra x'' ed x' al tempo t pel numero dei nati fra $t - x''$ e $t - x'$ si avrà il numero di quelli che per ogni unità di nati raggiungono l'età che si trova a metà dell'intervallo fra x' e x'' . Per esempio: il numero degli individui dai 20 ai 21 anni viventi al principio del 3 dicembre 1864 diviso pel numero dei nati dal principio del 3 dicembre 1843 al principio del 3 dicembre 1844 dà mediante le supposizioni precedenti il valore $f(20,5)$. Se nello stesso modo si vuole ricercare quanti per ogni unità di nati raggiungono l'età dei 20 anni, si deve dividere il numero dei viventi al 3 dicembre 1864 fra i 21 e 19 anni pel numero dei nati dal 3 dicembre 1843 al 3 dicembre 1845.

Se si scompone il censimento, come in Prussia, secondo gli anni di nascita e non secondo le classi d'età si avrà per esempio che i superstiti al 3 dicembre 1864 della generazione del 1860 sono nelle età fra gli anni 4,92 e 3,92; il loro numero diviso pel numero dei nati nell'anno 1860, dà colle suesposte supposizioni, il numero di quelli che per ogni unità di nati raggiungono l'età di

$$\frac{4,92 + 3,92}{2} = 4,42 \text{ anni.}$$

I valori della serie delle morti così trovati sono da ritenersi come valori di quella serie dalla quale, quando ogni aumento di nascite vi fosse stato soggetto, si potrebbero ottenere le grandezze delle classi d'età.

Le supposizioni sono tanto più accettabili, quanto minore è la differenza $x'' - x'$. Per classi annue d'età non vi sarebbe molto da obbiettare ad esse, poichè per un così breve intervallo di tempo, si può ritenere costante la densità delle nascite e per un così breve spazio d'età si può supporre retta la curva dei decessi, quando si accontenti d'un calcolo approssimato.

Pei censimenti distinti per classi d'età come quelli dello Zollverein, questo metodo ha l'incomodo che i registri delle nascite non dovrebbero chiudersi alla fine dell'anno, ma al 3 dicembre, ciò che non avviene. Se invece si distingue come in Prussia il censimento secondo gli anni di nascite, esso dovrebbe essere eseguito alla fine dell'anno, onde poter avere dei gradi d'età espressi con numeri interi di anni. A parte anche queste piccole difficoltà, la più forte obbiezione che si può fare a questo metodo si è che la maggior parte degli individui nei censimenti danno la loro età in via semplicemente approssimata cosicchè appaiono specialmente numerose le classi 10 — 11, 20 — 21, 30 — 31 anni. Questa difficoltà è così seria che basta a far respingere senz'altro l'intero metodo.

Passiamo ora alle classi dei defunti. La prima classe principale si offre alla determinazione diretta della serie dei decessi e non è qui il caso di parlarne; si devono soltanto esaminare le altre due classi principali.

Pei defunti dal tempo t' a t'' nati fra le epoche t'_0 e t''_0 si ha (vedi equazione 10) la seguente equazione:

$${}_{t'_0}^{t''_0} M_{t'} = \{ F(t''_0) - F(t'_0) \} \{ f[t' - t''_0 + \mathfrak{S}'(t''_0 - t'_0)] - f[t'' - t''_0 + \mathfrak{S}''(t''_0 - t'_0)] \}$$

Risulta da questa equazione che il numero dei defunti da t' a t'' che provengono dal periodo di nascite fra t'_0 e t''_0 diviso per $F(t''_0) -$

— $F(t_0')$ cioè pel numero di nati fra t_0' e t_0'' dà un quoziente che si può ritenere come il numero di quelli che per ogni unità di nati muoiono fra le età $t' - t_0'' + \mathfrak{S}(t_0'' - t_0')$ e $t' - t_0' + \mathfrak{S}'(t_0'' - t_0')$. I valori di \mathfrak{S} e \mathfrak{S}' dei quali si sa solo che debbono essere compresi fra 0 e 1 possono stabilirsi mediante supposizioni analoghe alle precedenti. Se è costante la densità delle nascite fra t_0' e t_0'' e le ordinate della curva $f(x)$ per x compreso fra $t' - t_0''$ e $t'' - t_0'$ sono uguali a quelle della corda che unisce le estremità $f(t' - t_0'')$ e $f(t'' - t_0')$ e quelle fra $x = t'' - t_0''$ e $x = t' - t_0'$ sono uguali a quelle della corda che unisce le estremità $f(t'' - t_0'')$ e $f(t' - t_0')$ l'equazione superiore darà:

$${}_{t_0'}^{t_0''} M_{t'}^{t''} = \left\{ F(t_0'') - F(t_0') \right\} \left\{ f[t' - t_0'' + \frac{1}{2}(t_0'' - t_0') - f(t'' - t_0'') + \frac{1}{2}(t_0'' - t_0')] \right\}$$

Dividendo il numero di questi defunti pel numero dei nati cioè per $F(t_0'') - F(t_0')$ si ottiene un quoziente che colle fatte supposizioni si può ritenere come il numero di quelli che per ogni unità di nati muoiono fra le età

$$t' - t_0'' + \frac{1}{2}(t_0'' - t_0') \text{ e } t'' - t_0'' + \frac{1}{2}(t_0'' - t_0')$$

Per esempio il numero dei defunti nell'anno 1864 dell'anno di nascita 1860 ($t' = 1863$, $t'' = 1864$, $t_0' = 1859$, $t_0'' = 1860$) diviso pel numero dei nati nel 1860 dà il numero di quelli che per ogni unità di nati muoiono fra le età 3,5 e 4,5 quando si ammettano le accennate supposizioni sulla densità delle nascite e sulla serie delle morti.

Molto più importante per le ricerche indirette sulla mortalità è la classe dei defunti fra x'' ed x' e fra t' e t'' che vien calcolata in molti paesi.

Due sono i metodi che si fondano su queste classi; il metodo di Halley e quello di Hermann. Il metodo di Halley è abbandonato ma ciononostante ne diremo qualche parola. Questo metodo ammette che si possa trovare il numero dei defunti per ogni unità di nati fra le età x' e x'' cioè la differenza $f(x') - f(x'')$ dividendo il numero dei defunti fra questi limiti d'età, in un certo intervallo di tempo, pel numero dei defunti nello stesso intervallo fra le età 0 e ∞ . Il dividendo del metodo di Halley è espresso (vedi equazione 7) da:

$$\begin{aligned} {}_{t_0'}^{t_0''} M_{t'}^{t''} &= \left\{ F(t'' - x') - F(t' - x') \right\} f(x') - \\ &\quad - \left\{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') \right\} f(x'') - \\ &= \int_{t_0' = t' - \infty}^{t_0'' = t'' - \infty} F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \left\{ f(t' - t_0) dt_0 \right. \end{aligned}$$

e il divisore è espresso (vedi la stessa equazione) dalla formola:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'} M_{t'}^{t''} = \left\{ F(t'') - F(t') \right\} \\ & - \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'-t'} F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) f(t' - t_0) dt_0 \end{aligned}$$

Dobbiamo ora trovare la condizione necessaria affinché il quoziente di Halley divenga uguale a $f(x') - f(x'')$ e far anche in modo che possa essere verificata cogli elementi di fatto.

Si ottiene questo valore se nell'equazione di condizione si introducono le relazioni fra le classi di viventi e defunti od anche le sole relazioni fra le classi di viventi. Nel primo caso l'equazione è la seguente:

$$\begin{aligned} & \left\{ F(t'' - x') - F(t' - x') - \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'} M_{t'}^{t''} \right\} f(x') - \\ & - \left\{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') - \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'} M_{t'}^{t''} \right\} f(x'') - \\ & - \int_{t_0=t'-x'}^{t_0=t'-x''} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} f(t' - t_0) dt_0 = 0 \end{aligned}$$

Questo caso particolare si verificherà quando i diversi termini del primo membro sono separatamente nulli cioè quando:

1° muojono fra t' e t'' tanti individui quanti ne nacquero fra $t' - x'$ e $t'' - x'$ e fra $t' - x''$ e $t'' - x''$;

2° la classe d'età fra x'' ed x' all'istante t'' è uguale alla stessa classe all'istante t' .

Si può tradurre la stessa condizione con una relazione fra le sole classi di viventi osservando che si ha sempre

$$\begin{aligned} & \left\{ F(t'' - x) - F(t' - x) \right\} - \left\{ F(t'') - F(t') \right\} = \\ & = - \int_{t_0=t'-x}^{t_0=t''-x} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} dt_0 \end{aligned}$$

per cui si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \left\{ f(x') - f(x'') \right\} \left\{ \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'} M_{t'}^{t''} - \int_{t_0=t'-x}^{t_0=t''-x} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} dt_0 \right\} \\ & - f(x') \int_{t_0=t'-x'}^{t_0=t'-x''} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} dt_0 - \\ & - \int_{t_0=t'}^{t_0=t'-x'} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} f(t' - t_0) dt_0 + \\ & + f(x'') \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \right\} dt_0 = 0 \end{aligned}$$

Sarà soddisfatto il caso particolare quando tutte quattro le espressioni alla sinistra siano nulle cioè quando:

1° il numero degli individui fra ω e 0 cioè il censimento all'istante t' sia uguale al censimento all'istante t'' ;

2° sia nato un numero uguale d'individui fra $t' - x''$ e $t'' - x''$ fra $t' - x'$ e $t'' - x'$ e fra t' e t'' .

La classe degli individui d'età fra x'' ed x' all'istante t'' sia uguale alla stessa classe all'istante t' .

Dall'ultima equazione si riconoscono quali relazioni vengono ad essere supposte fra i valori della densità delle nascite $F''(t_0)$ e i valori della serie dei decessi $f(x)$. La condizione può essere verificata per certi valori di x' e x'' e per altri no. Essa si verifica anche quando per tutti i valori di t_0 da $t' - \omega$ a t'' si abbia $F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) = 0$ e in tal caso si verifica per tutti i valori di x' e x'' .

Il metodo di Halley suppone che i valori della densità delle nascite fra $t' - \omega$ e t'' si ripetano a distanza di $t'' - t'$ unità di tempo, cioè che la densità delle nascite sia una funzione periodica del tempo, il cui periodo abbia la durata di $t'' - t'$ unità di tempo, ciò che è assai inesatto perchè la densità delle nascite è dovunque in aumento.

Il metodo di Hermann adoperato in Baviera assume come il metodo di Halley i defunti d'un intervallo, ordinati secondo le classi d'età come dividendo; però come divisore non assume il numero dei defunti nello stesso intervallo, ma bensì un numero di nati. Si ricorderà che i defunti fra le età x'' ed x' e fra gli istanti t' e t'' sono nati da $t_0 = t' - x''$ a $t_0 = t'' - x'$ durante un intervallo di durata uguale a $t'' - t' + x'' - x'$. I nati che si prendono come divisore nel metodo di Hermann appartengono ad una parte dell'intervallo da $t' - x''$ a $t'' - x'$ e sono quindi a distinguersi due casi interamente analoghi.

Indichiamo il numero dei nati che deve servire come divisore con m senza esprimere per ora a qual periodo di nascite appartengono. Affinchè il quoziente di Hermann sia uguale a $f(x') - f(x'')$ deve essere soddisfatta la condizione

$$\begin{aligned} & \{ F(t'' - x') - F(t' - x') - m \} f(x') - \\ & - \{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') - m \} f(x'') - \\ & - \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t''-x'} \{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \} f(t' - t_0) dt_0 = 0 \end{aligned}$$

In particolare supponendo $m = F(t'' - x') - F(t' - x')$ cioè dividendo pel numero dei nati fra $t' - x'$ e $t'' - x'$ la condizione si semplifica molto e sarà soddisfatta quando siano separatamente nulli i coefficienti della serie dei decessi cioè quando:

1° fra $t' - x''$ e $t'' - x''$ nascano tanti individui quanti fra $t' - x'$ e $t'' - x'$;

2° la classe d'età fra x'' ed x' sia uguale agli istanti t' e t'' .

La stessa cosa si verifica facendo $m = F'(t'' - x'') - F'(t' - x')$ per cui il metodo di Hermann è applicabile quando si verificano le due condizioni suaccennate.

Assumendo per m il primo dei valori accennati l'equazione di condizione si può scrivere:

$$- \int_{t_0=t'-x'}^{t_0=t''-x''} \{ F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \} \{ f(t' - t_0) - f(x'') \} dt_0 = 0$$

ed essa non sarà soddisfatta se $F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0)$ per tutti i successivi valori di t_0 è sempre positivo o sempre negativo, ma solo nel caso che assuma valori ora positivi, ora negativi, ovvero quando sia $F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) = 0$ cioè si ripetono gli stessi valori della densità delle nascite ad intervalli di $t'' - t'$ unità di tempo.

Col secondo valore di m l'equazione di condizione assume la forma:

$$- \int_{t'-x'}^{t''-x''} \{ F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \} \{ f(t' - t_0) - f(x') \} dt_0 = 0$$

e servono le stesse considerazioni fatte superiormente.

Il metodo di Hermann suppone che da $t'' - x''$ a $t' - x'$ si ripetano gli stessi valori della densità delle nascite nello stesso ordine come fra $t'' - x''$ e $t' - x'$. Quando gli intervalli $t'' - t'$ e $x'' - x'$ sono piccoli, per esempio uguali ad un anno la supposizione non è molto arbitraria e dà certo un errore molto minore del metodo di Halley, nel quale la supposizione relativa alla densità delle nascite abbraccia un intervallo molto più lungo.

Dall'ufficio statistico d'Anhalt vengono pubblicati dei compendi dei registri dei decessi contenenti i defunti distinti secondo l'epoca dei decessi e secondo le classi d'età e dei compendi molto circostanziati dei registri delle nascite, nei quali sono registrate le nascite dei singoli mesi e che danno una idea continua e completa della serie delle nascite. Tenendo conto della serie *reale* delle nascite si può ricavare, dalle classi date, la quantità $f(x') - f(x'')$.

Dietro l'equazione 7 alquanto variata i defunti fra x'' ed x' e fra t' e t'' si possono rappresentare colla equazione:

$$\begin{aligned} \frac{t-x''}{t-x'} M_{t'}^{t''} &= \{ F'(t'' - x') - F'(t' - x') \} f(x') - \\ &- \{ F'(t'' - x'') - F'(t' - x'') \} f(x'') - \\ &- \int_{t_0=t'-x'}^{t_0=t''-x''} \{ F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \} f(t' - t_0) dt_0. \end{aligned}$$

Supponiamo che $F'(t_0)$ non sia variabile con t_0 ma costante per un intervallo finito abbastanza piccolo di tempo Δt_0 . La variabile t_0

assume tutti i valori compresi fra $t' - x''$ e $t'' - x'$ e un valore qualunque di essa può rappresentarsi con $t_0 = t' - x'' + \tau$. Si può quindi scrivere

$$F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) = \frac{\Delta F(t'' - x'' + \tau)}{\Delta \tau} - \frac{\Delta F(t' - x'' + \tau)}{\Delta \tau}$$

e questa differenza è costante per tutti i valori della variabile compresi fra

$$t' - x'' + \tau \text{ e } t'' - x'' + \tau + \Delta \tau.$$

Avremo anche:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=t'-x''+\tau}^{t_0=t''-x''+\tau+\Delta\tau} \{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \} f(t' - t_0) dt_0 = \\ &= \frac{\Delta F(t'' - x'' + \tau) - \Delta F(t' - x'' + \tau)}{\Delta \tau} \int_{t_0=t'-x''+\tau}^{t_0=t''-x''+\tau+\Delta\tau} f(t' - t_0) dt_0 = \\ &= \frac{\Delta F(t'' - x'' + \tau) - \Delta F(t' - x'' + \tau)}{\Delta \tau} \int_{x=x''-(\tau+\Delta\tau)}^{x=x''-\tau} f(x) dx \end{aligned}$$

Volendo trovare il valore di $f(x'') - f(x')$ non possiamo evitare una ulteriore supposizione sulla natura della serie dei decessi. Ammetteremo che i valori di $f(x)$ siano dati fra x'' e x' dall'equazione

$$f(x) - f(x') = - \frac{f(x') - f(x'')}{x'' - x'} (x - x')$$

cioè ammetteremo invece della curva dei decessi la corda che unisce le estremità delle ordinate ignote $f(x')$ e $f(x'')$. Allora avremo:

$$\begin{aligned} & \int_{x=x''-(\tau+\Delta\tau)}^{x=x''-\tau} f(x) dx = \\ &= \Delta \tau \left\{ f(x') - \{ f(x') - f(x'') \} \left\{ 1 - \frac{\tau + 0,5 \Delta \tau}{x'' - x'} \right\} \right\} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t''-x''} \{ F''(t_0 + t'' - t') - F''(t_0) \} f(t' - t_0) dt_0 = \\ &= \sum_{\tau=0}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\Delta F(t'' - x'' + \tau) - \Delta F(t' - x'' + \tau)}{\Delta \tau} \int_{x=x''-(\tau+\Delta\tau)}^{x=x''-\tau} f(x) dx \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \int_{t-x'}^{t-x''} M_{t'}^{t''} = & \{ F(t'' - x') - F(t' - x') \} f(x') - \\ & - \{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') \} f(x'') - \\ & - [f(x') - f(x'')] \sum_{\tau=0}^{\tau+\Delta\tau=x''-x'} \Delta F(t'' - x'' + \tau) - \\ & - \Delta F(t' - x'' + \tau) \left\{ 1 - \frac{\tau + 0,5 \Delta\tau}{x'' - x'} \right\} \end{aligned}$$

Il numero dei defunti fra x'' ed x' e fra t' e t'' appare in questa equazione come un prodotto di cui un fattore è il ricercato $f(x') - f(x'')$ e l'altro può essere facilmente trovato quando, come abbiám supposto, si conoscano le quantità delle nascite nelle frazioni di tempo della lunghezza $\Delta\tau$. L'espressione sotto il segno della somma si chiama la correzione in causa della densità delle nascite.

Il valore $f(x') - f(x'')$ calcolato con questo metodo esprime il numero dei defunti fra le età x' e x'' , ammettendo una serie di decessi rettilinea e tale che se ad essa fossero stati soggetti tutti i nati nell'intervallo da $t' - x''$ a $t'' - x'$ ne sarebbero morti fra gli istanti t' e t'' precisamente tanti, quanti in realtà ne morirono. Vediamo ora che influenza abbia l'adoperare invece della curva dei decessi la corda che unisce le estremità delle ordinate $f(x')$ ed $f(x'')$.

Se fra x' e x'' le ordinate della curva sono tutte minori di quelle delle corde, l'area compresa fra due ordinate, la curva e l'asse delle ascisse sarà minore dell'area compresa fra le stesse ordinate la corda e l'asse delle ascisse. Si avrà quindi

$$\Delta\tau \left\{ f(x') - \{ f(x') - f(x'') \} \left\{ 1 - \frac{\tau + 0,5 \Delta\tau}{x'' - x'} \right\} \right\} > \int_{x=x''-(\tau+\Delta\tau)}^{x=x''-\tau} f(x'') dx$$

Il fattore $1 - \frac{\tau + 0,5 \Delta\tau}{x'' - x'}$ è quindi troppo piccolo e bisognerebbe aumentarlo. L'influenza di questo fattore troppo piccolo sul valore $\int_{t-x'}^{t-x''} M_{t'}^{t''}$ dipende dal segno che assume la differenza

$$\Delta F(t'' - x'' + \tau) - \Delta F(t' - x'' + \tau)$$

pei successivi valori di τ e che può essere o sempre positivo o sempre negativo, ovvero ora positivo ed ora negativo.

Se il segno è sempre positivo ciò vuol dire che la densità delle nascite in ogni particella di tempo della durata Δt_0 è minore che nella

particella di tempo della stessa durata che comincia dopo $t'' - t'$ unità, la correzione Σ è quindi troppo piccola e si ha:

$$\begin{aligned} {}_{t-x'}M_{t''}^{t''} &> \{f(x') - f(x'')\} \{ [F(t'' - x'') - F(t' - x'')] + \Sigma \} \\ {}_{t-x''}M_{t'}^{t'} &< \{f(x') - f(x'')\} \{ F(t'' - x'') - F(t' - x'') \} \end{aligned}$$

Quest' ultima disuguaglianza si ottiene supponendo il fattore $1 - \frac{\tau + 0,5 \Delta \tau}{x'' - x'}$ uguale all'unità per tutti i valori di τ , mentre è per sua natura compreso fra lo zero e l'unità.

Si sono così trovati due limiti molto prossimi fra i quali deve essere compreso $f(x') - f(x'')$.

Analogamente si potrebbe procedere nel caso del segno costantemente negativo; nel caso poi di segni alternati l'errore è certo assai piccolo e trascurabile.

Si potrebbe poi procedere allo stesso modo quando le ordinate della corda da x' a x'' fossero tutte minori di quelle della curva. Qualora poi le ordinate della corda fossero ora maggiori ed ora minori di quelle della curva l'errore riuscirebbe certo assai poco importante.

Per arguire se le ordinate della curva sono maggiori o minori di quelle della corda si può ricorrere al metodo diretto. Se per esempio col metodo diretto e dai casi di decessi che avvengono fra t' e t'' si trova che $f(0) - f(0,5)$ è maggiore di $f(0,5) - f(1)$; ovvero se si trova ad esempio il valore $f(0) - f(0,5)$ col confronto fra i defunti nell'età 0 a 0,5 nati nell'anno 1862 (che in parte muoiono nel 1863) e il numero dei nati nel 1862; poscia si calcola il valore $f(0,5) - f(1)$ col confronto fra i defunti nell'età 0,5 a 1 nati nel 1862 (che in parte son morti nel 1863) e i nati nel 1862 e si trova che $f(0) - f(0,5)$ è molto maggiore di $f(0,5) - f(1)$ si può conchiudere, in modo però non del tutto assoluto, che le ordinate della curva $f(x)$ fra 0 a 1 sono minori di quelle della corda.

Come caso particolare del metodo ora sviluppato, che diremo metodo anhaltico, è a considerarsi un calcolo dei valori di $f(x') - f(x'')$ già da tempo usato. Supponendo costante la densità delle nascite da $t_0 = t' - x''$ a $t_0 = t' - x'$ e da $t_0 = t'' - x''$ a $t_0 = t'' - x'$ ponendo per conseguenza $\tau = 0$ e $\Delta \tau = x'' - x'$ si avrà:

$$\begin{aligned} {}_{t-x''}M_{t'}^{t'} &= \{f(x') - f(x'')\} \frac{1}{2} \{ F(t'' - x'') - \\ &- F(t' - x'') \} \{ F(t'' - x') - F(t' - x') \} \end{aligned}$$

cioè si otterrà $f(x') - f(x'')$ dividendo il numero dei defunti fra

x' e x'' e fra t' e t'' per la media aritmetica dei nati da $t' - x'$ a $t'' - x''$ e da $t' - x'$ e $t'' - x''$; per esempio per trovare $f(0) - f(1)$ si dividerà il numero dei defunti fra le età 1 e 0 nell'anno 1864 per la media aritmetica dei nati negli anni 1863 e 1864. Questo metodo non dà però una approssimazione sufficiente, ritenendo costante la densità delle nascite per un intervallo di tempo troppo lungo, ed è di gran lunga a preferirsi quello anhaltico nel quale è tenuto conto della densità reale delle nascite basata sui registri mensili.

Il lavoro principale di tutti gli autori che si servono del materiale della statistica della popolazione non è quella di trovare la mortalità esaminando i vari gradi d'età, ma piuttosto di rappresentare la mortalità umana in modo semplice con una *media*, con un *quoziente* chiamato ordinariamente la *durata media della vita*. Moser intende per durata media della vita il tempo trascorso per ogni unità di nati dalla nascita fino all'età a cui questi nati possono pervenire. La durata media della vita secondo questa definizione è un caso particolare d'altre idee più generali che riguardano due età x' e x'' . Infatti tale durata media deve indicarsi colla espressione $\int_0^{\omega} f(x) dx$ e si vede facilmente che dessa è un caso particolare:

1° Del tempo trascorso fra le età x' e x'' per ogni unità di nati.

2° Del quoziente di questo tempo trascorso diviso pel numero degli individui di x' anni cioè del quoziente $\frac{1}{f(x')} \int_{x'}^{x''} f(x) dx$ che si chiama la durata probabile della vita degli individui di x' anni sino all'età x'' e che si deve ritenere come la media del tempo a percorrerli da ogni individuo d' x' anni sino all'età x'' .

3° Finalmente delle somme dell'età x' e del tempo a trascorrere, cioè: $x' + \frac{1}{f(x')} \int_{x'}^{\omega} f(x) dx$. Questa somma della raggiunta età e del tempo a trascorrere la chiamiamo la durata media della vita degli individui d' x' anni sino all'età x'' . Supponendo $x' = 0$ e $x'' = \omega$ si ottiene da tutte queste espressioni ciò che Moser intende per durata media della vita. Per conoscere come possa essere calcolata direttamente la durata media della vita, basta ricordarsi come si calcoli il tempo trascorso e come si trova la quantità $f(x')$; il modo di collegare queste quantità è espresso nella definizione della durata media della vita.

Dobbiamo citare anche un'altra idea che proviene del pari dalla serie dei decessi e che in certi casi particolari è identica alla precedente; l'idea cioè dell'età media dei defunti fra le età x' e x'' per ogni

unità di nati. Si ottiene questa quantità dividendo la somma d'età dei defunti pel loro numero. Questa media può essere espressa da:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{f(x') - f(x'')} \int_{x''}^{\omega''} x f''(x) dx = \\
 & = \frac{1}{f(x') - f(x'')} \left\{ x' f(x') - x'' f(x'') + \int_{x''}^{\omega''} f(x) dx \right\}
 \end{aligned}$$

Confrontando questo quoziente colla durata media della vita degli individui di x' anni sino all'età x'' risulta che per $x'' = \omega$ la durata media della vita degli individui di x' anni è identica all'età media dei defunti fra x' e ω . Per gli altri valori di x'' i due quozienti sono sensibilmente diversi fra loro.

La media età dei defunti in una popolazione, fra x' e x'' e fra t' e t'' si ottiene secondo la definizione data, dividendo la somma dell'età di quei defunti pel loro numero cioè dividendo

$$\int_{t-\omega''}^{t-\omega'} EM_{t'}'' \quad (\text{equazione 26}) \quad \text{per} \quad \int_{t-\omega''}^{t-\omega'} M_{t'}'' \quad (\text{equazione 9 o 11}).$$

Cerchiamo dapprima di stabilire quando questa età media è identica alla età media dei defunti fra x' e x'' per ogni unità di nati. Siccome le quantità di cui è costituito il primo di questi quozienti dipendono dalla serie delle nascite, mentre l'ultimo quoziente dipende soltanto dalla natura delle serie delle morti, non si avvererà la loro identità che nel caso che la serie delle nascite soddisfi a certe condizioni che non accadranno in tutti gli Stati popolati, ma soltanto in alcuni e forse in realtà in nessuno. Vediamo ora di trovare queste condizioni e perciò stabiliamo alcune indicazioni abbreviate. Scriviamo

$$F(t' - x') - F(t' - x'') = \varphi(x')$$

e

$$F(t'' - x') - F(t' - x'') = \varphi(x'').$$

Queste quantità si trovano contemporaneamente nell'equazione 26 e nella 9 o 11 che daranno

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = - \int_{t_0=t'-\omega''}^{t_0=t'-\omega'} \left\{ F''(t_0 + t' - t') - F'(t_0) \right\} dt_0.$$

Poniamo anche nelle equazioni 9 o 11;

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0=t'-\omega''}^{t_0=t'-\omega'} F'(t_0) f(t' - t_0) dt_0 - \int_{t_0=t''-\omega''}^{t_0=t''-\omega'} F''(t_0) f(t'' - t_0) dt_0 = \\
 & = - \int_{t_0=t'-\omega''}^{t_0=t'-\omega'} \left\{ F''(t_0 + t' - t') - F'(t_0) \right\} f(t' - t_0) dt_0 = - Q
 \end{aligned}$$

e nella equazione 26:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0) \left\{ (t' - t_0) f(t' - t_0) + \int_{x=t'-t_0}^{x=x''} f(x) dx \right\} dt_0 - \\ & - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F''(t_0) \left\{ (t'' - t_0) f(t'' - t_0) + \int_{x=t''-t_0}^{x=x''} f(x) dx \right\} dt_0 = \\ & = - \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0 + t'' - t') - F'(t_0) \right\} \left\{ (t' - t_0) f(t' - t_0) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{x=t'-t_0}^{x=x''} f(x) dx \right\} dt_0 = - P. \end{aligned}$$

Servendosi di queste indicazioni si potrà scrivere l'equazione 26:

$${}_{t-x''}^{t-x'} EM'_{t'} = \varphi(x') \left\{ x' f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x) dx \right\} - \varphi(x'') x'' f(x'') - P$$

e l'equazione 9 o 11

$${}_{t-x''}^{t-x'} M'_{t'} = \varphi(x') f(x') - \varphi(x'') f(x'') - Q.$$

Per trovare la condizione necessaria affinchè la media età dei defunti fra x' e x'' e fra t' e t'' sia uguale alla media età dei defunti fra x' e x'' per ogni unità di nati non si ha che a porre uguali le suesposte due quantità; in questo modo si avrà l'equazione:

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi(x'') - \varphi(x') \right\} \left\{ f(x'') \left\{ x'' f(x'') + \int_{x''}^{x'} f(x) dx \right\} - f(x') x' f(x'') \right\} + \\ & + Q \left\{ x' f(x') - x'' f(x'') + \int_{x''}^{x'} f(x) dx \right\} - P \left\{ f(x') - f(x'') \right\} = 0 \end{aligned}$$

nella quale è contenuta la necessaria relazione fra la serie delle morti e quella delle nascite.

In particolare l'equazione è soddisfatta quando $\varphi(x'') - \varphi(x') = 0$ cioè da $t' - x''$ a $t'' - x''$ nascono tanti individui quanti ne nascono da $t' - x'$ a $t'' - x''$; $Q = 0$ cioè la classe d'età da x'' ad x' all'istante t'' è ugualmente numerosa della stessa classe all'istante t' ; $P = 0$ cioè la somma d'età più il tempo a trascorrere sino all'età x'' per quegli individui che a t'' stanno fra le età x'' ed x' è uguale alla stessa quantità per gli individui che a t' stanno fra x'' ed x' .

Per verificare se è soddisfatto questo caso particolare occorrono registri di nascite, censimenti a seconda dell'età da t' a t'' e registri di defunti da t' a $t'' + (x'' - x')$ per ricavare il tempo trascorso. In pochi casi si potranno avere tutti i mezzi di prova, nel maggior numero si potrà soltanto dimostrare che le necessarie condizioni non sono soddisfatte e che la media età dei defunti fra x'' ed x' o t' e t'' non si può

ritenere uguale alla media età dei defunti fra x' e x'' per ogni unità di nati. Può anche darsi che l'equazione sia soddisfatta in altri casi particolari, che però non si possono verificare senza conoscere la serie delle morti.

Si vede facilmente che non può essere nè $\varphi(x'') - \varphi(x') = 0$ nè $Q = 0$ nè $P = 0$ se la differenza $F''(t_0 + t'' - t') - F'(t_0)$ da $t_0 = t' - x''$ a $t_0 = t'' - x'$ ha il segno costantemente positivo o costantemente negativo, cioè se la densità delle nascite è di tal natura da avere ad ogni istante un valore o sempre maggiore o sempre minore di quello che ha all'istante che comincia dopo $t'' - t'$ unità di tempo. Affinchè si verifichi l'equazione di condizione, devono essere alternati i segni della differenza in un certo modo che dipende dalla serie dei decessi, ovvero essa deve assumere costantemente il valore zero. L'equazione di condizione è anche soddisfatta nel caso che da $t_0 = t'' - x''$ a $t_0 = t'' - x'$ si ripetano gli stessi valori della densità delle nascite e nello stesso ordine come da $t_0 = t' - x''$ a $t_0 = t' - x'$. Se supponiamo $x'' = \omega$; essendo $f(\omega) = 0$ la condizione si semplifica nel modo seguente:

$$Q \left\{ x' f(x') + \int_x^\omega f(x) dx \right\} - P f(x') = 0$$

ed è soddisfatta quando $Q = 0$ e $P = 0$ cioè quando gli individui fra l'età x' e ω a t'' sono in egual numero che gli individui che si trovano fra le stesse età a t' e quando la somma delle età, più il tempo a trascorrere sino all'età ω è uguale per gli individui che a t'' stanno fra x' e ω e per quelli che si trovano fra gli stessi limiti d'età all'istante t' . Questo caso particolare è inammissibile con una densità di nascite o continuamente crescente o continuamente diminuyente.

Con un procedimento analogo si può studiare il caso che l'età media dei defunti fra x'' ed x' e fra t' e t'' sia uguale alla durata media della vita degli individui di x' anni sino all'età x'' e si ricavano da tale studio delle conclusioni identiche alle precedenti. Da ciò si rileva che l'età media dei defunti d'uno stato popolato è diversa dalla durata media della vita; essa è dipendente dalla serie delle nascite, il suo aumentare o diminuire può essere effetto di questa serie ed è affatto erroneo il dedurre da essa le variazioni di mortalità, scambiandole colla durata media della vita, che è affatto indipendente dalla serie delle nascite. Affinchè la media età dei defunti divenga uguale alla durata media della vita, ciò che abbiamo visto che in generale non si verifica, devono essere soddisfatte certe relazioni fra la densità delle nascite e la serie dei decessi; si può verificare soltanto in certi casi particolari se esse sussistono; in generale ciò non avviene e non si ha verun fonda-

mento per ammettere che la media età dei defunti sia uguale alla durata media della vita.

La media età dei viventi ad un determinato istante si ottiene dividendo la somma delle età dei viventi pel loro numero cioè:

$${}_{t-x''}^{t-x'} E V (t') = \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} E' (t_0) (t' - t_0) f (t' - t_0) dt_0$$

per

$${}_{t-x''}^{t-x'} V (t') = \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} E' (t_0) f (t' - t_0) dt_0.$$

È evidente che questa media età dei viventi a t' fra le età x'' ed x' , dipende dalla densità delle nascite fra $t' - x''$ e $t' - x'$ e dal valore della serie delle morti fra le età x' e x'' . Essa non ha veruna relazione colla durata media della vita. Anche supponendo costante la densità delle nascite, essa si trasforma in un'altra quantità che è diversa dalla durata media della vita, e che è facilmente trovata. Se la densità delle nascite è costante, si può levare dal segno integrale tanto nel dividendo che nel divisore e toglierla da entrambe le parti. La media età dei viventi sarà quindi

$$\frac{\int_{x'}^{x''} x f(x) dx}{\int_{x'}^{x''} f(x) dx}$$

ed eseguendo l'integrazione per parti del numeratore:

$$x' + \frac{\int_{x'}^{x''} dx \int_{x'}^{x''} f(x) dx}{\int_{x'}^{x''} f(x) dx}$$

mentre la durata media della vita è uguale a

$$x' + \frac{\int_{x'}^{x''} f(x) dx}{f(x')}.$$

Per le quantità derivate dalla serie dei decessi si hanno le seguenti relazioni:

1° I defunti all'età x :

$$= - f' (x) dx;$$

2° Gli individui che compiono l'età x :

$$f(x) = - \int_x^{\omega} f(x) dx;$$

3° Il tempo trascorso fra le età x' e x'' :

$$\int_{x'}^{x''} f(x) dx = - \int_{x'}^{x''} dx \int_x^{\omega} f'(x) dx;$$

4° La media età dei viventi d'uno stato a serie continua di nascite

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_x^{x''} f(x) dx = - \int_{x'}^{x''} dx \int_x^{x'} dx \int_x^{\omega} f'(x) dx.$$

Quest'ultima quantità si ricava dal tempo trascorso, come questo dal numero dei viventi e come questo da quello dei defunti.

Dicesi *cifra della mortalità* il quoziente ottenuto da una classe di defunti e da una classe di contemporaneamente viventi e *cifra delle nascite* il quoziente ottenuto da un numero di nati e da una classe di contemporaneamente viventi. Esaminiamo dapprima il quoziente che si forma coi defunti d'un intervallo (da t' a t'') fra le età x' e x'' e il numero dei viventi fra x'' ed x' al principio di questo intervallo. Come dividendo si ha $\frac{t-x'}{t-x''} M_{t'}^{t''}$ e come divisore $\frac{t-x'}{t-x''} V(t')$. Il dividendo dipende dal valore della serie dei decessi, fra le età x' e x'' e dalla distribuzione delle nascite fra $t_0 = t' - x''$ e $t_0 = t'' - x'$. Il divisore dipende dagli stessi valori della serie dei decessi e dalla serie delle nascite fra $t_0 = t' - x''$ e $t_0 = t' - x'$. Il quoziente dipende quindi non solo dal valore della serie dei decessi, ma anche dalla serie delle nascite e non si possono ricavare da esso delle conclusioni sulla mortalità. Ammesso che sia costante la densità delle nascite, ciò che non avviene mai, il quoziente assume la forma

$$(t'' - t') \left\{ \frac{1}{f(x') - f(x'')} \int_{x'}^{x''} f(x) dx \right\}^{-1}$$

ed è cioè un prodotto di cui un fattore è la durata dell'intervallo nel quale sono compresi i decessi, l'altro fattore è il valore reciproco d'un quoziente che soltanto in casi particolari può essere assunto come durata media della vita. Facendo $x'' = \omega$ e $x' = 0$ tale espressione diviene

$$(t'' - t') \left\{ \int_0^{\omega} f(x) dx \right\}^{-1}$$

e la cifra della mortalità appare come il prodotto della durata dell'intervallo pel valore reciproco della durata media della vita. Questa proposizione non ha significato pratico perchè non si può supporre costante la densità delle nascite durante un intervallo di $t'' - t' \pm \omega$ anni cioè per oltre 100 anni.

Intendendosi con *cifra delle nascite* il quoziente formato dividendo

il numero dei nati da t' a t'' pel censimento al tempo t' , essa dipenderà dalla quantità delle nascite nell'intervallo da t' a t'' , dalla densità delle nascite da $t' - \omega$ a t' e dalla natura della serie dei decessi in tutto l'intervallo d'età da 0 a ω . Supponendo di nuovo costante la densità delle nascite da $t' - \omega$ a t' cioè facendo $F'(t_0) = x$ e quindi

$$F'(t'') - F'(t') = A(t'' - t')$$

otteniamo per cifra delle nascite l'espressione

$$(t'' - t') \left\{ \int_0^\omega f(x) dx \right\}^{-1}.$$

Anche questa proposizione non ha utilità pratica per la supposizione fatta della costanza della densità delle nascite.

Il quoziente $\frac{f(x'')}{f(x')}$ si chiama generalmente la probabilità per gli individui di x' anni di raggiungere l'età x'' e il quoziente

$$\frac{f(x') - f(x'')}{f(x')} = 1 - \frac{f(x'')}{f(x')}$$

la probabilità per gli individui di x' anni di morire prima di raggiungere l'età x'' . Se si domanda che probabilità abbia qualcuno di vivere nell'intervallo da t' a t'' si può rispondere con molta facilità. Se l'individuo è nato al tempo t_0 esso avrà a t' l'età $t' - t_0$ e a t'' l'età $t'' - t_0$; la probabilità al tempo t' ch'egli viva anche a t'' è quindi $\frac{f(t'' - t_0)}{f(t' - t_0)}$ e

la sua probabilità di morire è $1 - \frac{f(t'' - t_0)}{f(t' - t_0)}$ e queste quantità si possono calcolare conoscendo soltanto la serie dei decessi.

Sebbene la cifra della mortalità sia inutile per le ricerche sulla durata media della vita e sulla probabilità di vivere in un certo intervallo, si continuerà certo a confrontare sempre il numero dei defunti col censimento. Però le cifre della mortalità e delle nascite, calcolate come precedentemente non sono esatte, poichè confrontano il numero dei defunti o dei nati durante un certo intervallo, colla popolazione ad un certo punto dell'intervallo stesso. Se si divide l'intervallo in piccole parti e si calcola il rapporto fra i nati e i defunti nelle singole parti e la popolazione che si ha al principio di ciascuna di esse, indi si sommano le molte frazioni così ottenute, si ha nella somma di tutte le frazioni una cifra di nascite e di decessi più esatta della precedente. Il censimento all'istante t è rappresentato con $\int_{t-\omega}^{t-0} V(t)$; i nati a t con $F'(t) dt$ e quelli che a t muoiono fra le età ω e 0 con:

$$- dt \int_{t_0=t-\omega}^{t_0=t} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0$$

che si può rappresentare abbreviatamente con $\int_{t-\omega}^{t} M'(t) dt$. Con queste indicazioni si avrà come espressione della cifra perfetta della mortalità fra t' e t'' la quantità

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\int_{t-\omega}^{t} M'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt}$$

La cifra delle nascite cioè la somma dei quozienti dei nati d'ogni istante colla corrispondente popolazione sarà:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{F'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt}$$

Da lungo tempo si è accettata la somma dei quozienti dei singoli aumenti divisi per le corrispondenti entità come una misura del *valore* dell'aumento della popolazione da t' a t'' . Il valore di questo aumento si potrebbe esprimere con

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\int_{t-\omega}^{t} V'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt}$$

Ammettendo

$$\int_{t-\omega}^{t} V'(t) dt = - \int_{t-\omega}^{t} M'(t) dt + F'(t) dt$$

poichè l'aumento della popolazione si compone (trascorrendo la migrazione) dell'aumento dei nati e della diminuzione dei defunti ne segue:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\int_{t-\omega}^{t} V'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt} = - \int_{t'}^{t''} \frac{\int_{t-\omega}^{t} M'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt} + \int_{t'}^{t''} \frac{F'(t) dt}{\int_{t-\omega}^{t} V(t) dt}$$

cioè il valore dell'aumento della popolazione è uguale alla cifra delle nascite meno la cifra dei decessi. Quindi la cifra delle nascite rappresenta il valore dell'aumento che acquista la popolazione durante l'intervallo che si considera, per effetto delle nuove nascite a parte considerate e la cifra dei decessi invece rappresenta il valore della diminuzione che subisce la popolazione durante l'intervallo pel fatto dei decessi.

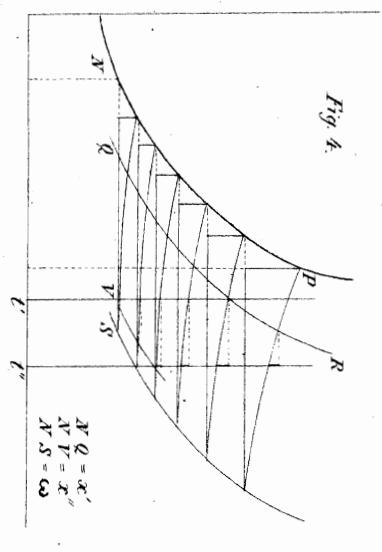
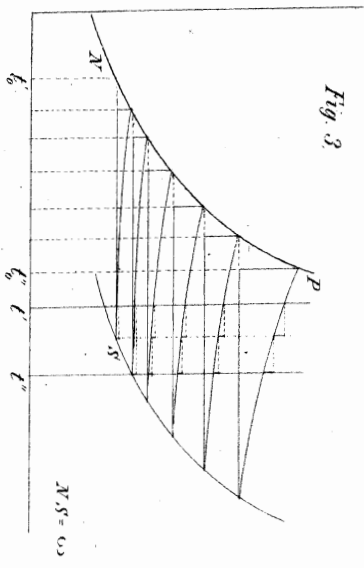
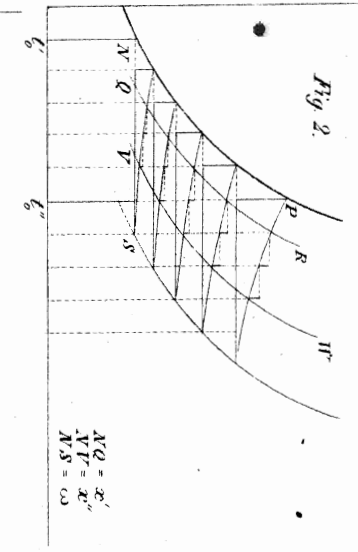
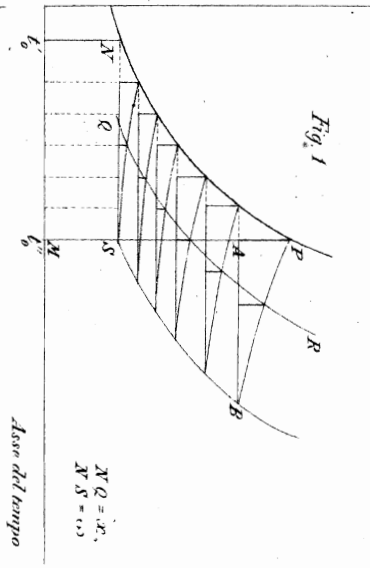
Si può finalmente eseguire l'integrazione del primo membro dell'equazione e scrivere:

$$\text{log. nat.} \frac{{}^{t''-0}V(t'')}{{}^{t'-0}V(t')} = - \int_t^{t''} \frac{{}^{t-0}M'(t) dt}{{}^{t-0}V(t)} + \int_t^{t''} \frac{F'(t) dt}{{}^{t-0}V(t)}.$$

Questa equazione dimostra che conoscendo la popolazione al principio e alla fine dell'intervallo, bisogna soltanto calcolare la cifra delle nascite o quella dei decessi. La quantità non calcolata si può ricavare dall'equazione superiore sempre però trascurando la migrazione. La cifra delle nascite è uguale a quella dei decessi, quando la popolazione alla fine dell'intervallo ha lo stesso valore che al principio poichè $\text{log. nat. } 1 = 0$.

Il precedente lavoro preso nel suo complesso insegna a conoscere le proprietà generali delle classi di viventi e defunti e in particolare le loro relazioni colla mortalità. Abbiám visto che si può raggiungere questo scopo colla rappresentazione analitica delle classi, alla quale siamo pervenuti coll'aiuto della serie delle nascite considerata come funzione del tempo e di quella dei decessi considerata come funzione dell'età. In seguito poi vennero esposti i metodi più opportuni per la determinazione diretta e indiretta della mortalità e vennero esaminati i quozienti che vengono abitualmente calcolati.

Appare da tale lavoro che per la determinazione diretta della mortalità occorrono i formulari, dei quali venne dato un esempio e secondo i quali devono essere ripartiti i registri dei decessi e per la determinazione indiretta devesi adottare il metodo d'Anhalt che è l'unico che tien conto della densità delle nascite.



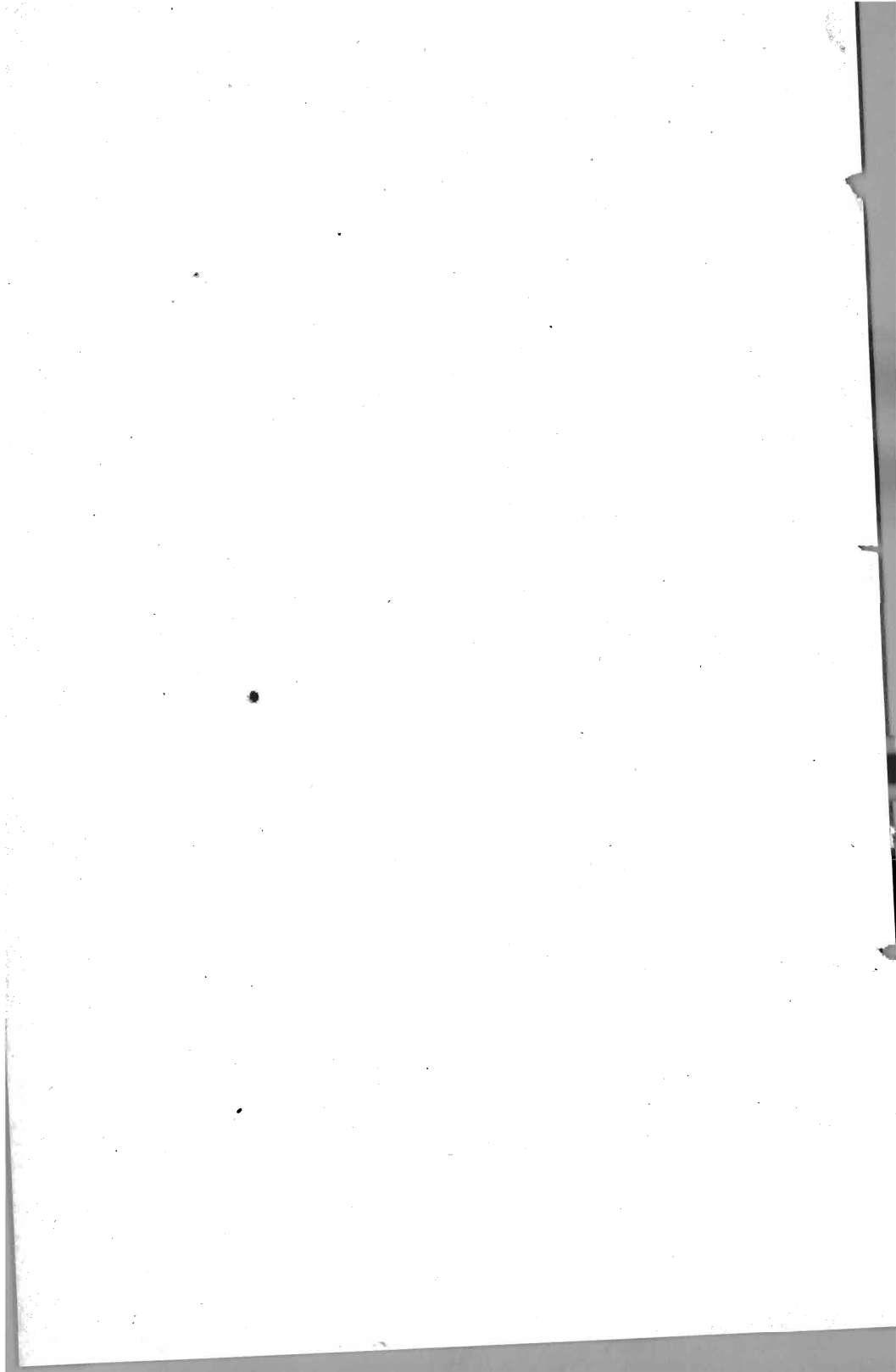


Fig. 5

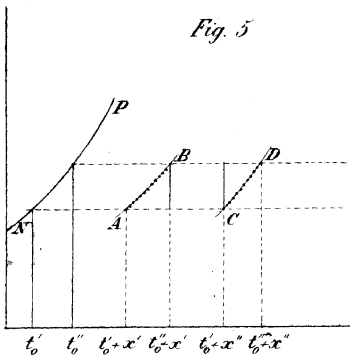


Fig. 6

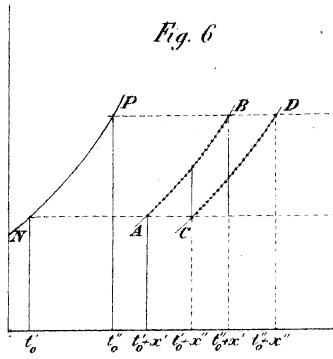


Fig. 7

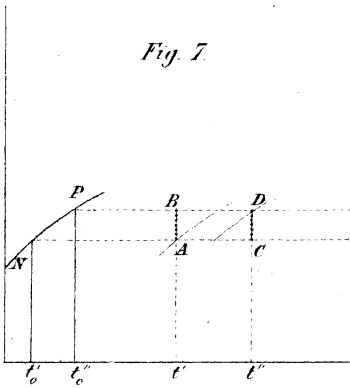


Fig. 8

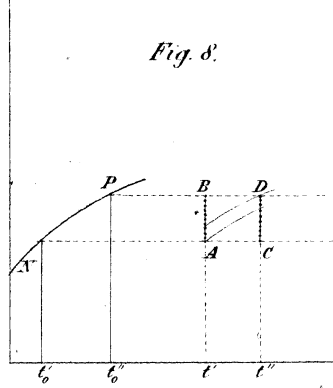


Fig. 9

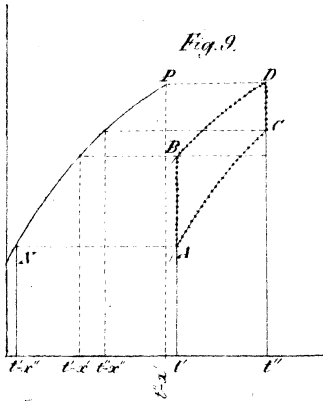
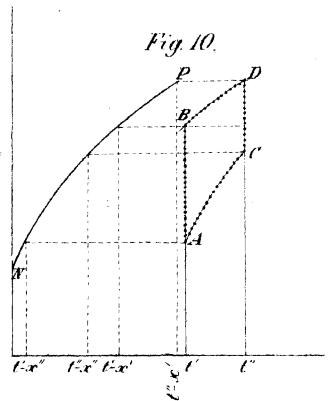


Fig. 10



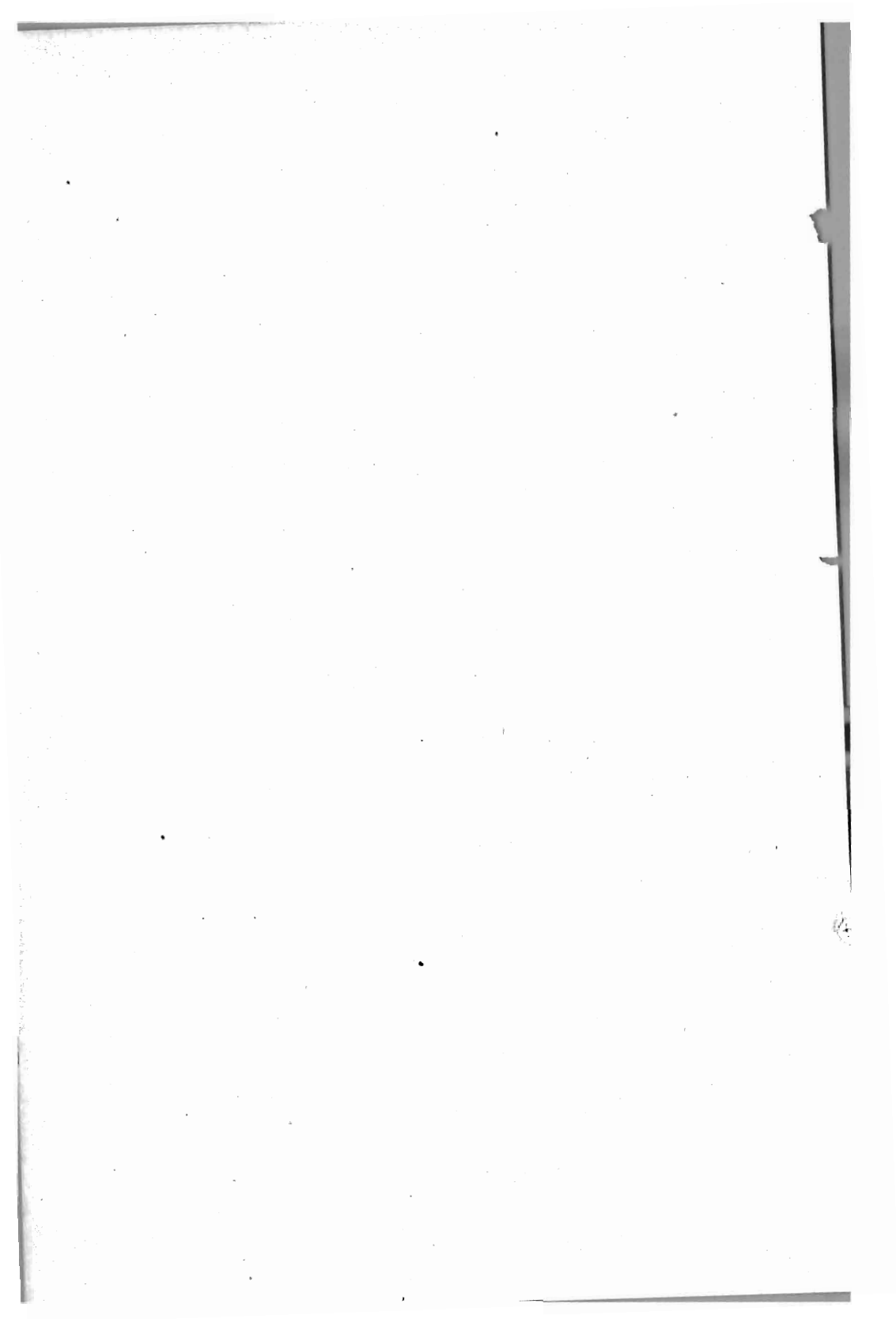


Fig. 11.

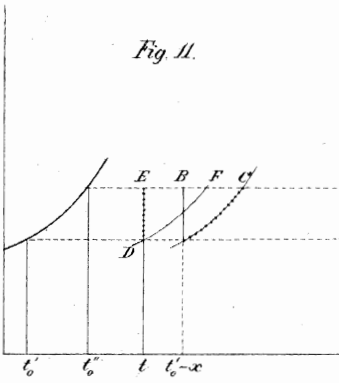


Fig. 12.

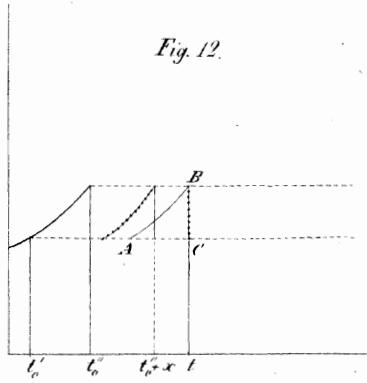


Fig. 13.

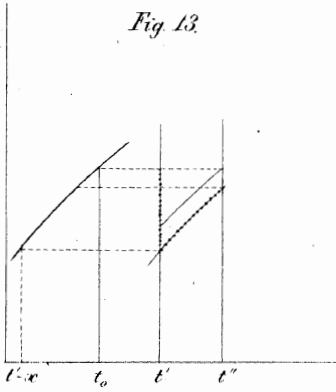


Fig. 14.

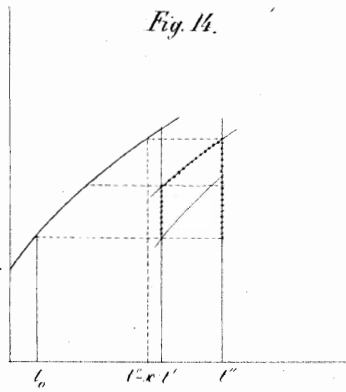


Fig. 15.

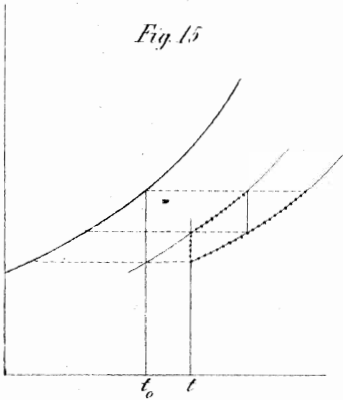
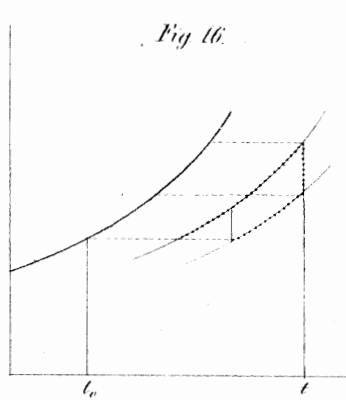


Fig. 16.



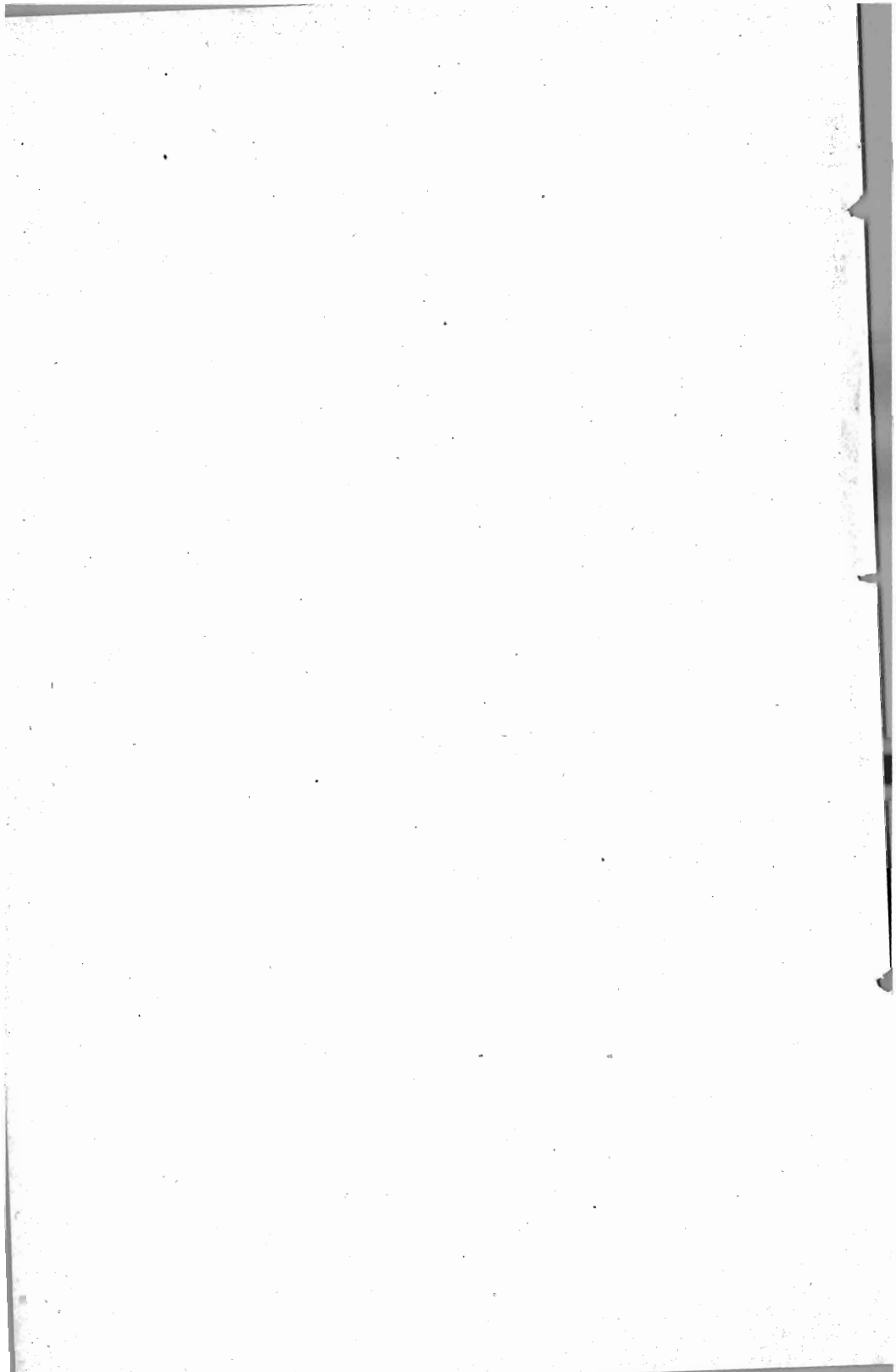


Fig. 17.

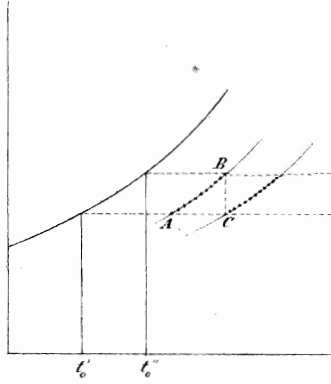


Fig. 18.

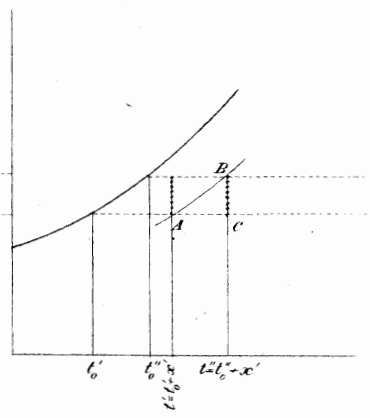


Fig. 19.

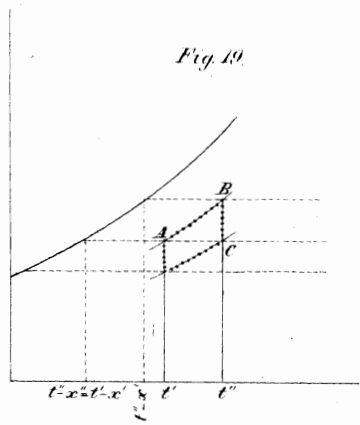
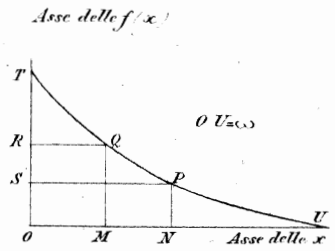
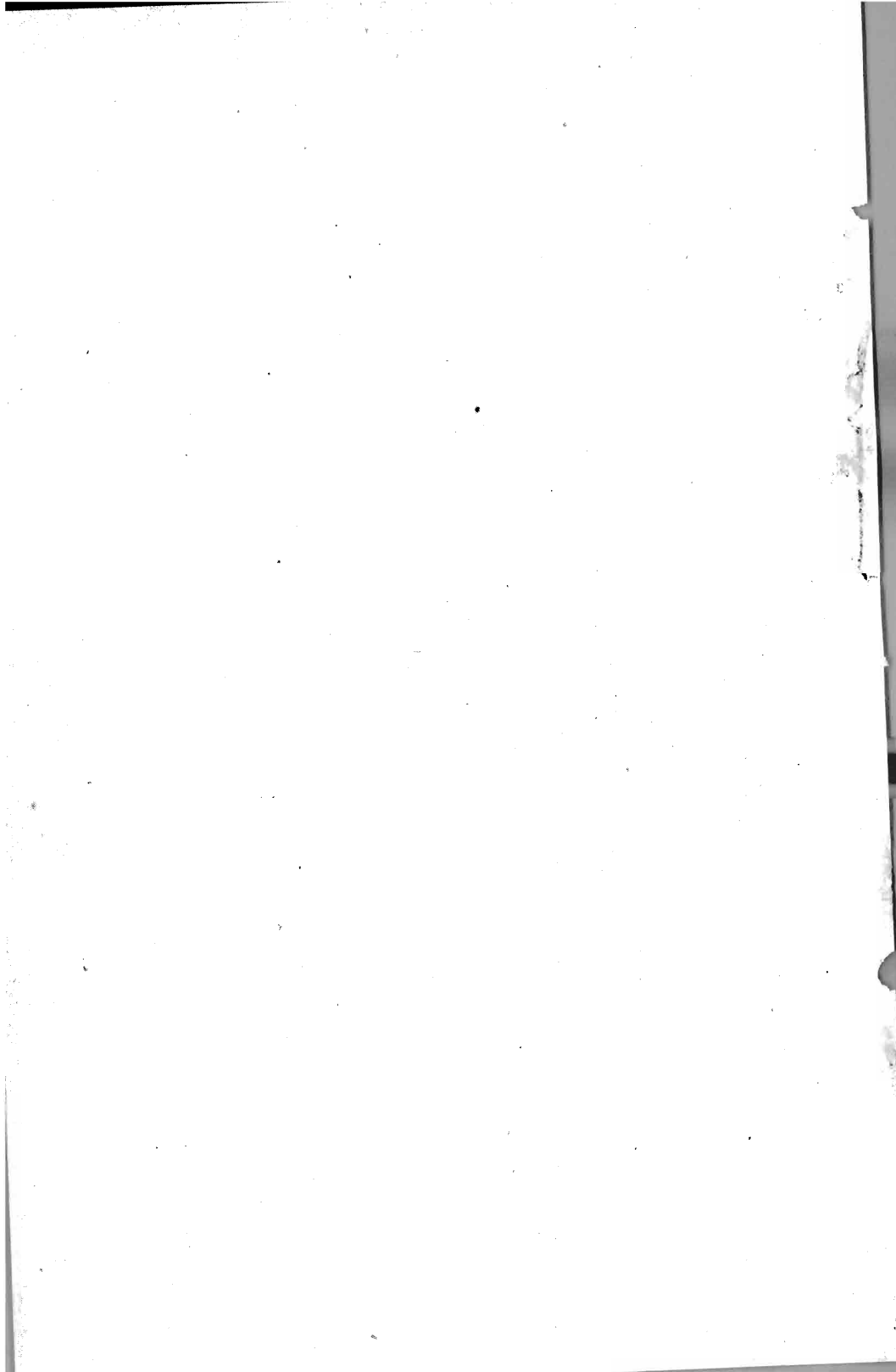


Fig. 20.





MITTHELUNGEN AUS DER GESCHÄFTS-UND STERBLICHKEITS-STATISTIK
DER LEBENSVERSICHERUNGSBANK FÜR DEUTSCHLAND ZU GOTHA

für die fünfzig Jahre von 1829 bis 1878.

VON D^r A. EMMINGHAUS.

(Weimar, Böhlau, 1880.)

Il D^r Emminghaus, già professore nella scuola politecnica di Carlsruhe, ora direttore della Banca di assicurazioni sulla vita, di Gotha (la più antica delle istituzioni omonime della Germania e la prima ancora oggi per importanza) ha pubblicato un resoconto statistico delle operazioni della Banca ch'egli dirige, in occasione del primo giubileo (mezzo secolo) della fondazione di quel sodalizio.

La società contava alla fine del 1879 circa 55 mila assicurati, e nel suo cinquantennio di operazioni ha avuto per ben 85 mila persone iscritte sui suoi registri, di cui 80 mila maschi e 5 mila femmine.

Il suo egregio direttore ha con diligente cura raccolto tutto il materiale che poteva interessare la statistica della mortalità per età e per cause di morte e ne ha dedotto varie tavole di decime mortuarie, tenendo conto della durata dell'assicurazione e dell'importanza delle somme assicurate.

Questa ultima distinzione, che non ci occorre ancora di vedere applicata nelle statistiche francesi ed inglesi, sarà certo di non lieve vantaggio alle Società.

Però non è da nascondersi che aumentando le suddivisioni, diminuisce il numero delle osservazioni per ogni categoria ed i coefficienti ricavati hanno per ciò minor valore. Così, se sulle 85,000 osservazioni si hanno 22,000 casi di morte in complesso, per le 23 specie di cause di morte l'autore non ha più che mille morti in media per ciascuna. Per due cause, il diabete, e le malattie dello spirito (Geistes-Krankheiten) si hanno meno di 100 morti in complesso. L'autore suddivide ancora

questi numeri, già assai scarsi, in categorie di età ed ottiene numeri assai tenui, minori di 10, da cui deduce delle medie che avranno una probabilità assai limitata.

La Germania con tutti i suoi istituti conta un mezzo milione di assicurati (1). Essa potrebbe quindi, riunendo le osservazioni di più società, dare un materiale assai più cospicuo, a cui sarebbero applicabili con maggior frutto le distinzioni fatte dal D^r Emminghaus per quella di Gotha.

Ci auguriamo che ciò possa avvenire in breve tempo.

L. PEROZZO.

(1) *Zustand und Fortschritte der deutschen Lebensversicherungs-Anstalten im Jahre 1879. Bremer Handelsblattes, n° 1508, 1880.*

TATONSARY POPULATION.

A Paper showing Approximately the numbers of Males who Emigrated in 1851-70 from certain English Counties, and indicating the effect produced by such Emigration upon the numbers of the people at several ages. By THOMAS A. WELTON. (Read February 11th 1880.)— *Transactions of the Manchester Statistical Society.* Session 1879-80.

Il signor Tommaso Welton ha studiato l'effetto dell'emigrazione nel ventennio 1851-1870 sulla popolazione di alcune contee inglesi, per il sesso maschile. Questo studio può offrire un qualche interesse per noi, poichè la statistica dell'emigrazione fornirà bentosto i mezzi di poter ripetere il calcolo per il nostro Stato. L'autore ha considerato le contee dell'ovest Wilts, Somerset, Devon e Cornwall e quelle dell'est Suffolk e Norfolk.

Le prime quattro avevano nel 1851 una popolazione maschile di 780,000 individui e nel 1871 di 803,000. L'aumento nel ventennio fu di 23,000, ossia del 3 per cento circa. Dalle cifre date dall'autore risulta invece che per le donne lo stesso aumento sarebbe del 5 per cento.

Le contee dell'est avevano 376,000 maschi nel 1851, e 377,000 nel 1871. L'aumento sarebbe solo di 1000 individui, ossia circa di 3 per diecimila. L'aumento nelle femmine sarebbe stato invece del 2 per cento circa.

Egli viene quindi a darsi ragione di questi aumenti col numero dei nati e dei morti.

Nelle quattro contee dell'ovest si ebbero nel ventennio 1851-1871 544,600 nati (maschi) e 333,700 morti. L'aumento naturale sarebbe stato di circa 212,000 maschi. Si sono quindi perduti 189,000 abitanti per l'eccesso della emigrazione sulla immigrazione nelle anzidette contee.

Per le contee dell'est quest'eccesso avrebbe dato la perdita di 101,000 maschi. Dividendo quindi la popolazione maschile per età,

egli trova, come è da aspettarsi, che la perdita netta per l'emigrazione è minore di assai nei fanciulli e nei vecchi che non negli adulti.

Colle classificazioni dei censiti per età al 1851 ed al 1871, col registro dei morti per età nel ventennio, e col calcolo di questi morti distribuiti per anni di nascita, egli ha trovato il numero dei maschi mancanti per l'emigrazione. Dai numeri assoluti desume queste cifre :

Perdita per l'emigrazione su 100 morti delle rispettive età.

	E T À								
	Da 0 a 15 anni	Da 15 a 20	Da 20 a 25	Da 25 a 30	Da 30 a 35	Da 35 a 40	Da 40 a 45	Da 45 a 50	Al di sopra di 50 anni
Contee dell'ovest.	13	41	201	375	366	293	155	72	5
Contee dell'est.	15	57	228	388	405	313	178	99	10

L'autore fa notare la somiglianza delle due serie nei due gruppi di contee. In ambedue il rapporto dato ha un valore massimo nell'età dai 25 ai 35 anni. Per queste età egli dà un prospetto numerico per ciascuna delle sei contee. Da esso ricaviamo che in quelle dell'est i ragazzi da 5 a 10 anni nel 1851 erano 97,000, di cui erano morti 10,000 circa nel ventennio, mentre si trovavano soli 51,000 maschi nel 1871 dell'età da 25 a 30 anni da cui egli desumerebbe una perdita dovuta all'emigrazione di 36,000 individui. Per la sola contea di Cornovaglia sarebbero tanti i rimasti quanti i perduti per l'emigrazione.

Queste cifre sarebbero enormi, se non si riflettesse ad una circostanza che l'autore sembra aver dimenticata, e per la quale si devono diminuire le cifre che egli computa come perdita netta. L'autore conta come perdita netta la differenza tra i rimasti nel 1871 e quelli esistenti nel 1851 all'età di 20 anni indietro diminuita ancora dei morti in patria che provengono da questi individui. Ma gli emigrati non sono certo rimasti tutti vivi nel ventennio, e bisognerebbe poter sapere quanti erano superstiti nel 1871, in qualunque paese del globo per poter fare un paragone più concreto.

Od almeno bisognerebbe fare un computo approssimativo, ammettendo una stessa mortalità per gli emigrati e per i rimasti in patria, il che è certo inferiore al vero, di quanti probabilmente sarebbero ancora vivi al 1871 degli emigrati nel ventennio.

Così nell'esempio precedente, essendo 10,000 i morti su un gruppo di popolazione che scese da 97,000 a 51,000 individui, si avrebbe avuta, procedendo *grosso modo* (1), una mortalità di $\frac{10}{\frac{1}{2}(97+51)}$ nel ventennio cioè del 13 e più per cento. I 36,000 emigrati d'altronde si possono per la più semplice delle ipotesi possibili distribuire uniformemente nel ventennio, cosicchè essi sarebbero stati esposti solo per la metà del ventennio, ossia per un decennio alla mortalità anzidetta. Quindi per una prima approssimazione essi vanno diminuiti del $\frac{1}{2} \times \frac{13}{100}$ del loro numero, cioè di 2000 è più. La perdita effettiva si ridurrebbe quindi a 34,000. Realmente si ridurrebbe ancora a meno, perchè è certo che l'emigrante va esposto a maggiori probabilità di morte di quello che resta nel proprio paese.

L'autore calcola quindi, collo stesso modo da lui precedentemente seguito, la perdita netta per emigrazione dei distretti delle varie contee, e trae la conclusione che, all'infuori di poche città, l'intera area delle contee dell'est e dell'ovest fu spogliata di circa una metà della popolazione maschile all'età di 25 a 40 anni che avrebbe posseduto, se non fossero avvenute emigrazioni. Egli crede che una larga proporzione di assenti si troverebbero in Londra, e un molto minor numero in America ed in Australia; attribuisce questa grande emigrazione alla facilità dei mezzi di comunicazione, e ritiene che non sia necessario di stimolare più oltre un movimento che ha progredito così efficacemente e che tende ad avanzare con moto accelerato.

L. PEROZZO.

(1) Un metodo rigoroso è quello seguito dal professor DIENGER di Karlsruhe nel suo studio *Berechnung von Sterbetafeln*, edito nella *Rundschau der Versicherungen* (herausgegeben von D^r H. OESTERLEY - Lipsia 1874).

CALCUL DES CHANCES

ET

PHILOSOPHIE DE LA BOURSE.

È questo il titolo di un libro pubblicato a Parigi da Jules Regnault fino dal 1863, ma poco noto fra noi.

Uno dei sintomi più rimarchevoli del male che travaglia la società moderna, è il giuoco di borsa; il quale sotto l'apparenza della speculazione, si è fatto strada pian piano sino ad acquistare una importanza funesta nel mondo economico.

Tutti coloro che rifuggendo dal lavoro serio e da qualunque specie di occupazione, vogliono ad ogni costo menar vita agiata in onta alla esiguità dei propri mezzi, si danno al giuoco di borsa, nel quale bene spesso trovano amari disinganni ed irreparabile rovina.

In ogni tempo non mancò chi ispirato a sentimenti di sana morale, si diede a stigmatizzare siffatto abuso; ma l'avidità, questo despota delle umane cose, rese mai sempre vani gli sforzi dei moralisti. L'idea di arricchire, sia pure spogliando il proprio simile e talvolta lo stesso amico, non mancherà in ogni tempo di esercitare grandi attrattive in quella classe di persone, purtroppo assai numerosa, che costituisce la grande massa dei parassiti.

Gli è con tale persuasione che il Regnault, pur mirando allo scopo medesimo, lascia da banda le declamazioni sulla moralità oltraggiata e si dà a dimostrare al giuocatore come nell'ordine naturale delle cose, egli ad un dato giorno deve essere inevitabilmente rovinato. Badisi che egli non intende predire se dalla tale o tal altra operazione possa attendersi guadagno o perdita, sibbene determinare *a priori* ciò che deve necessariamente verificarsi dopo una serie continua di operazioni;

nella stessa guisa che mentre è impossibile precisare l'età alla quale una data persona cesserà di vivere, si può benissimo e con molta approssimazione predire sur un forte numero di persone, quante di esse giungeranno ad un'età data. È noto come ciò dipenda dal teorema dimostrato da Bernoulli, secondo cui:

« Moltiplicando indefinitamente le osservazioni e le esperienze, il
« rapporto degli avvenimenti di diversa natura che debbono verificarsi,
« si approssima a quello delle loro possibilità rispettive entro limiti il
« cui intervallo va restringendosi sempre fino a divenire minore di ogni
« quantità assegnabile. »

Il Regnault divide il suo lavoro in due parti. Nella prima tratta del giuoco di borsa dal punto di vista della probabilità del guadagno, ponendo in evidenza come il diritto di senseria sia se non la sola, certo la principale causa della ineguaglianza delle probabilità contraddittorie. Nella seconda parte distingue la vera dalla falsa speculazione, l'impiego del capitale cioè dal puro giuoco di borsa.

È nella prima parte che dopo di essersi alquanto diffuso in considerazioni speciali sul calcolo di probabilità, considerando che alla borsa tutti gli avvenimenti possibili non possono determinare che due effetti *contraddittorii*, cioè *rialzo* e *ribasso*, dice che: « il miglior modo di
« calcolare la probabilità del rialzo o del ribasso che deve risultare da
« una data situazione, sarebbe di distinguere convenientemente le
« cause indipendenti fra loro, classificarle secondo il presunto grado
« d'influenza ed a seguito di un metodo di osservazioni anteriori ben
« precise, assegnare a ciascuna il grado di probabilità del suo verifi-
« carsi, come del suo effetto presunto: facendo il prodotto di queste
« due probabilità si otterrebbe il valore del rialzo o del ribasso pro-
« babile. »

Ma in pratica è ciò possibile? Come avere presenti tutte le cause che hanno influenza sulla borsa, come classificarle secondo la loro importanza, come valutarne le probabilità rispettive, e quelle dagli effetti da esse prodotti? Tuttociò non è possibile.

Quanto al volgare avviso che la borsa sia il termometro della pubblica opinione, osserva: « V'è in ciò qualche cosa di troppo generale,
« giacchè non v'ha alcuno che non abbia un'opinione qualsiasi su av-
« venimenti interessanti la società tutta; senonchè coloro la cui opi-
« nione è rispettabile non hanno pressochè mai occasione di esprimerla
« alla borsa... La borsa è stata e sarà sempre il termometro dell'opi-
« nione del pubblico che la frequenta. » Quindi è che, secondo molto opportunamente soggiunge il nostro autore, « non v'ha che una sola
« maniera di realizzare benefizi certi alla borsa: non operando cioè che
« su dati sicuri e sconosciuti al pubblico e di possedere il secreto di

« certi avvenimenti abbastanza importanti per esercitare una considerevole influenza sui corsi. »

In fine della prima parte egli conclude dicendo:

- 1° *Più le somme da perdere o guadagnare sono grandi;*
- 2° *più le quote sulle quali si opera sono piccole;*
- 3° *più il tempo medio della liquidazione è breve,*

e maggiore è la probabilità di perdere.

- 1° *Più le somme da perdere o guadagnare sono piccole;*
- 2° *più le quote sulle quali si opera sono grandi;*
- 3° *più il tempo medio delle liquidazioni è lungo,*

e minore è la probabilità di perdere.

Nella seconda parte l'autore facendo presente che i fondi pubblici al pari di qualsiasi merce, sono soggetti alle variazioni dipendenti dalla legge generale della offerta e della domanda, ossia variano in ragione della domanda e della offerta dei capitali, osserva come finchè tali oscillazioni hanno una causa reale nello stato del credito e nel movimento corrispondente di capitali disponibili, la speculazione è ciò che deve essere; mentre invece quando dette variazioni sono cagionate dal giuoco con uno spostamento sterile di somme corrispondenti alle differenze, allora si cade nell'agiotaggio ossia nell'abuso della speculazione.

Certo però che non si può segnare il limite che separa la vera dalla falsa speculazione, come non può dirsi a qual punto l'economia si cangi in avarizia. Quindi la inutilità degli sforzi tendenti a prevenire i mali derivanti dal giuoco. Il giuoco è il parassita inevitabile della speculazione, è desso che esagera tutti i movimenti dei corsi, che falsa il prezzo degli elementi costitutivi della ricchezza pubblica, e trascina seco la stessa speculazione. Si pretese rimediarsi togliendo ogni guarentigia legale al credito derivante dal giuoco. Con ciò si avrebbe il rimedio maggiore del male; poichè si permetterebbe al disonesto di mancare impunemente ai propri impegni.

Il conte Mollien, versatissimo in questioni di credito pubblico, diceva: « Quando un uomo libero fa una promessa temeraria, si è nell'adempiria che esso troverà la pena della sua imprudenza o della sua mala fede. »

Quale idea potrebbe farsi la coscienza pubblica di una legge che proteggesse la mala fede, incoraggiando il perdente a non pagare le sue differenze? La legge che trovasi in contraddizione con la morale scema l'autorità del legislatore e ne compromette il carattere.

Si pretese ancora combattere il giuoco ponendo ostacoli ai con-

tratti a termine. Ma nulla di più assurdo. Bisogna avere un'idea molto circoscritta delle necessità del credito pubblico per cercare di sopprimere il contratto a termine, che alimenta le transazioni e sostiene i corsi. Se alla borsa non potessero farsi che operazioni a contanti, la maggior parte dei valori rimarrebbero inerti e non potrebbero circolare. Convieni avere presente che accanto alla disonesta speculazione che opera su mere finzioni e falsa il mercato, v'ha la speculazione onesta che impegna lealmente i suoi capitali e che merita un favore uguale a quello che si accorda al negoziante il quale vende ad un prezzo convenuto una partita di cotone o di caffè che non è ancora a sua disposizione.

A che valse in Francia l'eccezione fatta per legge al debito di giuoco? Ce lo dice il fatto che a Parigi si giuoca alla borsa nel modo stesso e forse più di quello che non si giuoca in Austria, in Germania, in Svizzera, nei Paesi Bassi ed in Italia, ove tale restrizione non esiste. Gli è che il mercato a termine, essendo l'alimento del credito, non può sparire dinanzi alla semplice minaccia della eccezione sul giuoco, e la inconsiderata disposizione di legge rimane lettera morta. Gli agenti di cambio posti nell'alternativa di non fare affari o violare la legge, non hanno esitato un istante ad appigliarsi al secondo partito, continuando ad essere gl'intermediarii delle operazioni a termine, malgrado il rischio di trovare nella propria clientela, chi forte della legge stessa manchi ai propri impegni.

Per far meglio apprezzare l'incompatibilità di simile giurisprudenza con le abitudini della borsa, fa mestieri pensare al momento in cui l'agente di cambio riceve l'ordine dal suo cliente. Ciò avviene ben sovente per lettera, o per telegramma, che l'agente di cambio riceve direttamente alla borsa. Tale ordine deve essere eseguito senza ritardo sotto pena di pregiudicare il cliente, e non è questo il caso di affari che si trattano con comodo, si discutono lungamente e danno luogo a spiegazioni che possono porre in chiaro la intenzione del contraente. La legge francese prescrive che l'agente debba rifiutarsi di eseguire l'ordine del suo cliente, quando le risorse di questo siano inferiori alla importanza della operazione. Ma come è possibile che l'agente possa sempre essere in grado di giudicare con sicurezza della solvibilità e serietà del suo cliente?

Il libro del Regnault ha indubbiamente il pregio di presentare sotto il vero suo punto di vista una delle questioni più importanti che interessano il mondo economico; e se la sua forma potesse essere meno scientifica è a ritenere che non mancherebbe di produrre ottimi risultati morali, coll'evitare dissesti gravi e grandi disillusioni.

In ogni modo noi crediamo opportuno farlo presente e racco-

mandarlo, nella ferma fiducia che esso, studiato a fondo, possa grandemente influire a rendere meno frequenti gli abusi del giuoco non mai abbastanza lamentato, ma non mai con maggior foga di oggi praticato.

A. PAOLINI.

FINE DEL VOLUME.