MINISTERO D'AGRICOLTURA, INDUSTRIA E COMMERCIO.

DIREZIONE GENERALE DELLA STATISTICA.

ANNALI DI STATISTICA.

SERIE 3ª — VOL. 5.

ROMA

TIPOGRAFIA EREDI BOTTA

1883

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE VOLUME.

I CALCOLI MATEMATICI DELLA CASSA PENSIONI

PER GLI IMPIEGATI DELLE SOCIETÀ FERROVIARIE AUSTRIACHE

PER

GIULIO KAAN

Segretario del detto Istituto

Il dott. Kaan incomincia il suo lavoro coll'esposizione delle formole teoriche che servono per il calcolo delle previsioni delle entrate e degli oneri di una Cassa pensioni, e ne fa quindi l'applicazione alla Cassa degli impiegati delle Società ferroviarie austriache (1). Le formole del Kaan sono citate a modello ed adoperate presso altri Istituti consimili in Austria. Opere di questo genere non esistono nella nostra lingua, perchè in Italia simili istituzioni sono di data più recente che altrove, o vi ebbero finora scarso sviluppo, e la loro mancanza fu avvertita anche negli studi fatti per la Cassa delle Pensioni Civili e Militari a carico dello Stato. Per ciò la Direzione di Statistica ha fiducia di far cosa utile col dare una traduzione dell'opera suddetta.

OSSERVAZIONI PRELIMINARI.

Nella formazione del bilancio di una Cassa-Pensioni è necessario determinare prima il valore attuale di tutte le entrate, poi il valore attuale di tutte le spese dell'Istituto. Il seguente lavoro mostra come si ottengano le espressioni matematiche necessarie per eseguire questi calcoli.

La base dei calcoli che dipendono dalla durata della vita umana è la tavola di mortalità, e quella dei calcoli che dipendono dalla du-

(1) *Die mathematischen Rechnungen bei Pensions-Instituten der Eisenbahn-Beamten und deren Witwen*, v. J. KAAN. *Wien* 1864. Dr *v*. L. SOMMER.

rata dell'abilità al lavoro di un individuo è la tavola d'invalidità. La prima considera un numero d'individui viventi in un dato tempo, e contiene il numero dei sopravviventi per ogni età successiva; la seconda considera un numero d'individui abili al lavoro in un determinato tempo, e contiene il numero di quelli validi in ogni età seguente (1).

Sia: m l'età;

l_m il numero dei viventi dell'età m secondo la tavola di mortalità;

a_m il numero dei validi al lavoro dell'età m secondo la tavola d'invalidità;

$i = 0{,}05$ il saggio d'interesse per lira;

$r = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,05}$ il fattore di sconto;

R_m il valore attuale di una rendita di una lira pagabile annualmente e posticipatamente per la durata della vita di un individuo di età m;

$R_{\left(m \times \frac{n}{n}\right)}$ il valore attuale di una rendita annuale di una lira pagabile per la durata della vita di un individuo di età m, in n rate posticipate uguali per ogni anno.

$R_{m,\mu}$ ed $R_{\left(m \times \frac{n}{n}\right),\,\mu}$ i valori attuali della rendita di una lira pagabile per la durata della vita, a partire dal μ^{mo} anno (rendita vitalizia differita).

${}_b R_m$ ed ${}_b R_{\left(m \times \frac{n}{n}\right)}$ i valori attuali della rendita di una lira pagabile fino al b^{esimo} anno, se prima non succede la morte (rendita temporanea sopra una testa);

$\mathfrak{R}_m$ il valore attuale di una rendita di una lira pagabile annualmente e posticipatamente per la durata della abilità al lavoro di un individuo dell'età di m anni;

$\mathfrak{R}_{\left(m \times \frac{n}{n}\right)}$ il valore attuale di una rendita annuale di una

(1) L'autore allega alla sua memoria le tavole di sopravvivenza di Brune e Fischer e la tavola degli abili al lavoro secondo i quozienti di invalidità dati da Heym. *N. d. D.*

lira pagabile per la durata della abilità al lavoro, in n rate eguali posticipate in ogni anno;

$\mathfrak{R}_{m,\,\mu}$ ed $\mathfrak{R}_{\left(m \times \frac{n}{n}\right),\,\mu}$ i valori attuali della rendita di una lira per la durata della abilità al lavoro, a pagarsi solo dal μ^{mo} anno;

$\underset{b}{\mathfrak{R}}_{m,}$ ed $\underset{b}{\mathfrak{R}}_{\left(m \times \frac{n}{n}\right)}$ i valori attuali della rendita di una lira pagabile fino al b^{esimo} anno, se non sopravvengono prima l'invalidità o la morte.

Di l_m viventi,

dopo il	1°	anno ne	sopravvivono	l_{m+1};
id.	2°	id.	id.	l_{m+2};
id.	3°	id.	id.	l_{m+3};
. . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
id.	p anni		id.	l_{m+p}.

Se perciò ciascuno degli l_m viventi deve ricevere annualmente e posticipata la somma di una lira, saranno da pagarsi

dopo	1	anno	$l_{m+1} \cdot 1$;
id.	2	anni	$l_{m+2} \cdot 1$;
id.	3	id.	$l_{m+3} \cdot 1$;
. . . .	. . .	. . . .	. . . .
id.	p	id.	$l_{m+p} \cdot 1$ lire.

I valori attuali di questi pagamenti successivi sono:

per quello	alla fine del	1°	anno	$l_{m+1} \cdot r$
id.	id.	2°	id.	$l_{m+2} \cdot r^2$;
id.	id.	3°	id.	$l_{m+3} \cdot r^3$;
. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .
id.	id.	p	id.	$l_{m+p} \cdot r^p$,
. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .

e quindi il valore attuale di tutti i pagamenti ammonta a:

[a] $\quad l_{m+1} \cdot r + l_{m+2} \cdot r^2 + l_{m+3} \cdot r^3 + \ldots + l_{m+p} \cdot r^p + \ldots$

e così via fino alla più alta età data dalla tavola di mortalità: quindi il valore attuale della rendita di una lira pagabile posticipatamente ogni anno per la durata della vita di un individuo di m anni, si trova dividendo il valore [a], pel numero dei viventi di m anni cioè per l_m; si avrà perciò

$$R_m = \frac{l_{m+1}r + l_{m+2}r^2 + l_{m+3}r^3 + \ldots\ldots + l_{m+p}r^p + \ldots\ldots;}{l_m}$$

oppure anche

$$R_m = \frac{l_{m+1}r^{m+1} + l_{m+2}r^{m+2} + l_{m+3}r^{m+3} + \ldots + l_{m+p}r^{m+p} + \ldots,}{l_m r^m} \qquad [1]$$

la quale ultima formola è più comoda, perchè nel calcolo per una data età possono venir adoperati i prodotti già formati per le età precedenti.

A facilitare il calcolo del valore della rendita annuale di una lira, pagabile per la durata della vita in n rate uguali ogni anno, supponiamo che nel corso dell'anno le morti avvengano uniformemente. Di l_m individui di età m, nel p^{esimo} anno ne moriranno:

$$l_{m+p-1} - l_{m+p},$$

e secondo l'ipotesi fatta, nel primo intervallo di $\frac{1}{n}$ del p^{esimo} anno ne moriranno:

$$\frac{1}{n}(l_{m+p-1} - l_{m+p}).$$

Sono perciò nel p^{esimo} anno ancor viventi

$$\text{dopo } \frac{1}{n} \text{ di anno } l_{m+p-1} - \frac{1}{n}(l_{m+p-1} - l_{m+p});$$

$$\text{id. } \frac{2}{n} \text{ id. } l_{m+p-1} - \frac{2}{n}(l_{m+p-1} - l_{m+p});$$

. . . .

$$\text{id. } \frac{q}{n} \text{ id. } l_{m+p-1} - \frac{q}{n}(l_{m+p-1} - l_{m+p});$$

. . . .

$$\text{id. } \frac{n}{n} \text{ id. } l_{m+p-1} - \frac{n}{n}(l_{m+p-1} - l_{m+p});$$

Al termine del q^{esimo} intervallo nel p^{esimo} anno si dovrà pagare:

$$\frac{1}{n}\left[\,l_{m+p-1}-\frac{q}{n}\,(l_{m+p-1}-l_{m+p})\,\right],$$

e se noi adoperiamo per le parti di anno l'interesse semplice, il valore di questo pagamento al principio del p^{esimo} anno sarà:

$$\frac{\frac{1}{n}\left[\,l_{m+p-1}-\frac{q}{n}\,(l_{m+p-1}-l_{m+p})\right]}{1+\frac{q}{n}\,i}=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\,l_{m+p-1}-\frac{q}{n}\,(l_{m+p-1}-l_{m+p})\,\right]\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1},$$

e il valore attuale di questo pagamento, ossia il suo valore scontato ad interesse composto per $(p-1)$ anni sarà:

$$\frac{1}{n}\left[\,l_{m+p-1}-\frac{q}{n}\,(l_{m+p-1}-l_{m+p})\,\right]\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}r^{p-1}=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{n-q}{n}\,l_{m+p-1}+\frac{q}{n}\,l_{m+p}\right]\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}r^{p-1}.$$

Se si fa $p=1,\,2,\,3\,\ldots..$ e si somma, si ha il valore attuale dei pagamenti alla fine del q^{esimo} intervallo in tutti gli anni con:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}\left[\frac{n-q}{n}\,(l_m+l_{m+1}\,r+l_{m+2}\,r^2+\ldots..)+\right.$$

$$\left.\frac{q}{n}\,(l_{m+1}+l_{m+2}\,r+l_{m+3}\,r^2+\ldots.)\right]=\frac{1}{n}\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}\left\{\frac{n-q}{n}\,l_m+\right.$$

$$\left.\left(\frac{n-q}{n}+\frac{q}{n\,r}\right)(l_{m+1}\,r+l_{m+2}\,r^2+\ldots..)\right\};$$

e dividendo per l_m, avuto riguardo alla formola [1], si ottiene il valore attuale dei pagamenti al q^{esimo} intervallo di tutti gli anni per ciascun individuo d'età m con:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}\left\{\frac{n-q}{n}+\left[1+\frac{q}{n}\left(\frac{1}{r}-1\right)\right]R_m\right\};$$

oppure essendo $\quad r = \dfrac{1}{1+i} \quad$ e $\quad \dfrac{1}{r} - 1 = i$:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}\left\{\frac{n-q}{n}+\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)R_m\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}R_m+\frac{n-q}{n^2}\left(1+\frac{q}{n}\,i\right)^{-1}.$$

Se si fa ora in questa espressione successivamente $q = 1, 2, \ldots n$, e si somma, si ottiene il valore totale della rendita annuale di una lira pagabile per la durata della vita in n rate nel corso di ogni anno:

$$R_{\left(m\times\frac{n}{n}\right)} = R_m + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{n-1}{1+\frac{1}{n}\,i}+\frac{n-2}{1+\frac{2}{n}\,i}+\frac{n-3}{1+\frac{3}{n}\,i}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}\,i}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

e facendo $n = 12$, si ha il valore attuale della rendita annuale di una lira pagabile per la durata della vita in rate mensili:

$$R_{\left(m\times\frac{12}{12}\right)} = R_m + \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12,05}+\frac{10}{12,10}+\frac{9}{12,15}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{2}{12,50}+\frac{1}{12,55}\right),$$

oppure:

$$R_{\left(m\times\frac{12}{12}\right)} = 0{,}45026 + R_m \ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

Quando il pagamento della rendita deve incominciare solo dopo μ anni, bisogna osservare che di l_m individui aventi un' età m, solo $l_{m+\mu}$ raggiungono il $(m+\mu)^{esimo}$ anno: ciascuno di questi riceve una rendita incominciante dopo μ anni per l'età $(m+\mu)$, il cui valore è allora:

$$R_{m+\mu}\,,$$

e per tutti gli $l_{m+\mu}$ individui:

$$l_{m+\mu} \cdot R_{m+\mu}.$$

Il valore attuale della rendita complessiva è:

$$l_{m+\mu} \cdot R_{m+\mu}\, r^{\mu};$$

e quest'espressione divisa per l_m, dà il cercato valore della rendita per un individuo:

$$R_{m,\mu} = \frac{l_{m+\mu}}{l_m} r^{\mu}\, R_{(m+\mu)} \ldots\ldots\ldots \quad [4]$$

Nella stessa guisa si ha per pagamenti mensili:

$$R_{\left(m \times \frac{12}{12}\right)} \cdot \mu = \frac{l_{m+\mu}}{l_m} r^{\mu}\,(0{,}45026 + R_{(m+\mu)}) =$$

$$= 0{,}45026\, \frac{l_{m+\mu}}{l_m} r^{\mu} + R_{m,\mu} \ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

Se la rendita deve incominciar subito, ed è pagabile solo durante b anni, premesso che prima del termine di questi b anni non succeda la morte dell'individuo, nel qual caso la rendita cessa, si potrà trovare il suo valore sottraendo dal valore della rendita vitalizia che incomincia subito, il valore di quella che incomincia dopo b anni:

$$\underset{b}{R}_m = R_m - \frac{l_{m+b}}{l_m} r^b\, R_{(m+b)}, \ldots\ldots\ldots \quad [6]$$

ed

$$\underset{b}{R}_{\left(m \times \frac{12}{12}\right)} = 0{,}45026 + R_m - \frac{l_{m+b}}{l_m} r^b\,(0{,}45026 + R_{m+b}). \quad [7]$$

È evidente che dalle formole [1] a [7] si può ottenere invece del valore della rendita pagabile per la durata della vita, quello della rendita pagabile per la durata della abilità al lavoro, sostituendo ad l_m, l_{m+1}, l_{m+2} ecc., a_m, a_{m+1}, a_{m+2} ecc. Si avrà in questo caso:

$$\mathfrak{R}_m = \frac{a_{m+1}\, r^{m+1} + a_{m+2}\, r^{m+2} + \ldots + a_{m+p}\, r^{m+p} + \ldots}{a_m\, r^m}; \quad [8]$$

$$\mathfrak{R}_{\left(m \times \frac{n}{n}\right)} =$$

$$= \mathfrak{R}_m + \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{n-1}{1+\frac{1}{n}i} + \frac{n-2}{1+\frac{2}{n}i} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n-1}{n}i} \right\}; \quad [9]$$

$$\mathfrak{R}_{\left(m \times \frac{12}{12}\right)} = 0{,}45026 + \mathfrak{R}_m ; \quad \ldots\ldots \quad [10]$$

$$\mathfrak{R}_{(m,\mu)} = \frac{a_{m+\mu}}{a_m} r^{\mu} \mathfrak{R}_{(m+\mu)} ; \quad \ldots\ldots \quad [11]$$

$$\mathfrak{R}_{\left(m \times \frac{12}{12}\right),\mu} = \frac{a_{m+\mu}}{a_m} r^{\mu} \left(0{,}45026 + \mathfrak{R}_{(m+\mu)}\right) . \quad . \quad [12]$$

$$\underset{b}{\mathfrak{R}_m} = \mathfrak{R}_m - \frac{a_{m+b}}{a_m} r^b \mathfrak{R}_{(m+b)} ; \quad \ldots\ldots \quad [13]$$

$$\underset{b}{\mathfrak{R}}_{\left(m \times \frac{12}{12}\right)} = 0{,}45026 + \mathfrak{R}_m - \frac{a_{m+b}}{a_m} r^b \left(0{,}45026 + \mathfrak{R}_{(m+b)}\right) . \quad [14]$$

CAPITOLO I.

VALORE ATTUALE DEI PAGAMENTI.

§ 1.

Formazione e dotazione del capitale.

Secondo il maggior numero degli statuti attuali delle Casse-Pensioni degli impiegati ferroviari, il capitale della Cassa viene formato da contribuzioni dei soci pagate:

a) all'entrare del socio nell'istituto;

b) per un avanzamento di stipendio;

c) durante tutto il tempo in cui l'individuo fa parte della società.

Questi pagamenti sono ordinariamente fissati ad un tanto per cento dello stipendio.

Le Casse-Pensioni ricevono poi ordinariamente dalla società delle ferrovie una dotazione annua la quale è fissa, o proporzionale alle somme di una o di più d'una delle categorie (*a*) (*b*) (*c*) menzionate precedentemente.

Il versamento dei soci relativo alle categorie (*a*) e (*b*) non si fa ordinariamente in una sola volta, ma in un numero più o meno grande di rate mensili; il versamento relativo alla categoria (*c*) si fa all'epoca di ogni riscossione di stipendio, di solito mensilmente.

Alcuni statuti ammettono inoltre che nel tempo in cui scadono le somme relative ad (*a*) e (*b*), quelle relative a (*c*) cessino.

§ 2.

a) Pagamento dei soci per l'ammissione alla Cassa.

Sia:

t lo stipendio dell'impiegato quando entra a far parte della Cassa-Pensioni;

d il numero d'anni dacchè l'impiegato è socio della Cassa;

e il numero (frazione propria) pel quale dev'essere moltiplicato lo stipendio, per ottenere l'ammontare dell'intiera tassa di ammissione;

z il numero in anni, nel quale la tassa et dev'essere pagata:

A_m il valore attuale della tassa che un impiegato di m anni deve ancora pagare.

L'impiegato avrà ancora una parte di tassa a pagare se egli non appartiene alla Cassa da z anni, cioè se $d < z$. Avvertendo che questo pagamento si fa in rate mensili, il valore attuale della parte che resta ancora a pagarsi è evidentemente eguale al valore attuale di una rendita $\frac{et}{z}$ annuale, pagabile in rate mensili, la quale, ammesso che l'invalidità o la morte non avvenga prima, verrà pagata durante $z - d$ anni. Quindi secondo la formola [14]:

$$A_m = \left\{ 0{,}45026 \left(1 - \frac{a_{m+z-d}}{a_m} r^{z-d}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{R}_m - \frac{a_{m+z-d}}{a_m} r^{z-d} \mathfrak{R}_{(m+z-d)} \right\} \frac{et}{z} \quad \ldots \text{[15]}$$

E se l'impiegato è appena entrato nell'istituto pensioni, ossia se si ha $d = 0$, sarà:

$$A_m = \left\{ 0{,}45026 \left(1 - \frac{a_{m+z}}{a_m} r^z\right) + \mathfrak{R}_m - \frac{a_{m+z}}{a_m} r^z \mathfrak{R}_{(m+z)} \right\} \frac{et}{z}. \text{[16]}$$

§ 3.

b) Pagamenti dei soci per aumento di stipendio.

L'entità dell'aumento dello stipendio e il tempo dopo il quale si verifica questo aumento, pare non si possano comunemente determinare in anticipazione, perchè queste due quantità dipendono dall'ordinamento gerarchico e dalle speciali condizioni della società alla quale la Cassa-Pensioni appartiene, condizioni che accordano dopo un più o meno lungo tempo ad ogni singolo impiegato l'avanzamento in una classe di maggiore stipendio.

Però, presso quegli Istituti che sussistono già da molti anni si trovano numeri *medi* fondati sulle esperienze degli anni precedenti, i quali naturalmente non riguardano ogni singolo impiegato, ma che danno utilissimi dati per la formazione del bilancio dell'istituto-pensioni, nel quale si tien conto complessivamente del valore di tutte le entrate e di tutti i pagamenti probabili.

Pel calcolo di questi *numeri medi*, si può supporre che l'avanzamento di stipendio per ogni impiegato avvenga ad eguali intervalli di tempo: anzi più semplicemente, che l'impiegato abbia ogni anno un eguale aumento di stipendio.

Abbiamo preferito l'ultima ipotesi non solo perchè essa ci conduce ad espressioni molto più semplici della prima: ma anche perchè è ragionevole l'ammettere che gli impiegati coi più alti stipendi aumentino bensì di somme maggiori, ma per converso più raramente degli impiegati con piccoli stipendi e ciò perchè il numero dei primi è relativamente piccolo, e vi si verificano quindi più rare vacanze.

Sia ora:

v l'importare dell'aumento annuale di stipendio;

e_1 il numero (frazione propria) pel quale, secondo lo statuto, va moltiplicato l'ammontare dell'aumento di stipendio per ottenere la somma che l'impiegato deve pagare a questo titolo in 12 rate mensili;

B_m il valore attuale dei pagamenti che deve fare un impiegato di m anni per gli aumenti di stipendio;

$e_1 v$ sarà l'ammontare dei pagamenti annuali per avanzamento, da farsi in 12 rate mensili.

Il valore attuale di tutti i pagamenti che per questo titolo deve fare un impiegato, è dato dal valore attuale di una rendita annuale $e_1 v$, pagabile in rate mensili per la durata dell'attività di questo impiegato. Sarà perciò secondo la formola [10]:

$$B_m = (0{,}45026 + \mathfrak{R}_m)\, e_1 v \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad [\mathbf{17}]$$

Se il pagamento viene fatto (come alcuni statuti prescrivono) durante un numero dato $D = d + p$ anni, oppure fino a che sia raggiunta una data età di $(m + p)$ anni, allora secondo la formola [14] si ottiene:

$$\underset{p}{B_m} = \left\{0{,}45026\left(1 - \frac{a_{m+p}}{a_p} r^p\right) + \mathfrak{R}_m - \frac{a_{m+p}}{a_m} r^p \, \mathfrak{R}_{m+p}\right\} e_1 v \, . \quad [\mathbf{18}]$$

§ 4.

c) Pagamenti *correnti* dei soci.

Sia:

T lo stipendio attuale dell'impiegato;

e_2 il numero (frazione propria) pel quale si deve moltiplicare lo stipendio annuale, per ottenere il valore del pagamento annuale corrente da farsi in rate mensili;

C_m il valore attuale di tutti i pagamenti probabili che deve fare un impiegato dell'età di m anni.

Se lo stipendio attuale è T, e l'aumento annuale è v, lo stipendio dopo il tempo x sarà:

$$T + v\,x.$$

Siccome però l'aumento di stipendio può avvenire in ogni tempo dell'anno, si tratta prima di tutto di determinare lo stipendio medio da portarsi in conto ad un dato anno, per esempio all'n^{esimo}. Questo medio stipendio è [1]:

$$\int_{n-1}^{n} (T + vx)\, dx = T + \frac{2n-1}{2}\, v \,. \; . \; . \; . \; . \; . \quad [\mathbf{19}]$$

[1] A maggior spiegazione di quest'espressione serva la seguente osservazione che abbiamo messo qui perchè possa essere utile anche ulteriormente.

La media aritmetica y_1 di tutti i valori, che la funzione $y = f(x)$ può assumere per tutti i valori da x tra a e b, quando $b > a$, è:

$$y_1 = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}.$$

La esattezza di questa espressione si fa evidente colla dimostrazione geometrica. Rappresenti $y = f(x)$ l'equazione di una curva, le di cui ascisse sono x e le ordinate y. Si deve allora trovare la media aritmetica di tutte le ordinate da $f(a)$ fino ad $f(b)$.

Questa ordinata media è evidentemente quella che moltiplicata per la differenza delle ascisse estreme dà la superficie racchiusa fra la curva, l'asse delle ascisse e queste ordinate estreme, ossia:

$$y_1 \,.\, \int_a^b dx = \int_a^b f(x)\, dx\,; \qquad y_1 = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{\int_a^b dx}.$$

Così per una funzione di due variabili $y = \varphi(x, z)$ si ha che la media y_1 per tutti i valori di x tra a e b, in cui $b > a$, e di z tra c e d in cui $d > c$, è:

$$y_1 = \frac{\int_c^d dz \int_a^b \varphi(z, x)\, dx}{\int_c^d dz \int_a^b dx} = \frac{\int_a^b dx \int_c^d \varphi(x, z)\, dz}{\int_a^b dx \int_c^d dz},$$

ciò che può essere provato analogamente considerando il volume di un corpo limitato da una superficie la cui equazione è $y = \varphi(x, z)$.

Quindi l'ammontare del pagamento a questo titolo all'n^{esimo} anno sarà:

$$\left(T+\frac{2n-1}{2}\,v\right)e_2;$$

conseguentemente:

$$\text{nel } 1^{\circ} \text{ anno } \left(T+\frac{v}{2}\right)e_2;$$

$$\text{id. } 2^{\circ} \text{ id. } \left(T+\frac{3v}{2}\right)e_2;$$

$$\text{id. } 3^{\circ} \text{ id. } \left(T+\frac{5v}{2}\right)e_2,$$

. . . .

cioè l'aumento annuo di questo pagamento è $v\,e_2$.

Questi pagamenti possono quindi considerarsi come una rendita pagabile in rate mensili per la durata dell'attività, rendita che ammonta al 1° anno a

$$\left(T+\frac{v}{2}\right)e_2,$$

e che annualmente cresce di $v\,e_2$.

La rendita totale è quindi formata:

dalla rendita immediata di . . . . . . $e_2\left(T+\frac{v}{2}\right)$;
id. id. differita di 1 anno . . . $e_2\,v$;
id. id. id. di 2 anni . . . $e_2\,v$;
. . . .

e così di seguito.

Ora, avuto riguardo alle formole [10] e [12] il valore attuale dei pagamenti correnti è formato dal valore attuale:

della rendita immediata $\left(T+\frac{v}{2}\right)e_2$,

ossia:
$$e_2\left(T+\frac{v}{2}\right)(0{,}45026+\mathfrak{R}_m);$$

della rendita $e_2 v$ dal 1° anno, ossia: $e_2\, v\, \frac{a_{m+1}}{a_m}\, r\ (0{,}45026 + \mathfrak{R}_{m+1})$;

id. id. $e_2 v$ dal 2° id. $e_2\, v\, \frac{a_{m+2}}{a_m}\, r^2 (0{,}45026 + \mathfrak{R}_{m+2})$;

id. id. $e_2 v$ dal 3° id. $e_2\, v\, \frac{a_{m+3}}{a_m}\, r^3 (0{,}45026 + \mathfrak{R}_{m+3})$;

. . . .

La somma di queste espressioni dà il valore attuale di tutti i pagamenti correnti:

$$C_m = e_2 \left\{ 0{,}45026 \left[\left(T + \frac{v}{2} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{a_{m+1}\, r + a_{m+2}\, r^2 + a_{m+3}\, r^3 + \cdots\cdots}{a_m}\, v \right] +$$

$$\left. + \left(T + \frac{v}{2} \right) \mathfrak{R}_m + \frac{a_{m+1}\, \mathfrak{R}_{m+1}\, r + a_{m+2}\, \mathfrak{R}_{m+2}\, r^2 + \cdots}{a_m}\, v \right\},$$

oppure riducendo, e per la formola [8]:

$$C_m = e_2 \left\{ 0{,}45026\ T + 0{,}22513\ v + (T + 0{,}95026\, v)\, \mathfrak{R}_m + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{m+1}\, r^{m+1}\, \mathfrak{R}_{m+1} + a_{m+2}\, r^{m+2}\, \mathfrak{R}_{m+2} + \cdots\cdots}{a_m\, r^m}\, v \right\},$$

od anche:

$$C_m = e_2 \left\{ \left[0{,}45026 + \mathfrak{R}_m \right] T + \left[0{,}22513 + 0{,}95026\, \mathfrak{R}_m + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{a_{m+1}\, r^{m+1}\, \mathfrak{R}_{m+1} + a_{m+2}\, r^{m+2}\, \mathfrak{R}_{m+2} + \cdots\cdot}{a_m\, r^m} \right] v \right\} \ldots \mathbf{[20]}$$

Per $v = o$, ossia se lo stipendio si mantenesse costante, questa espressione si ridurrebbe alla seguente:

$$C_m = (0{,}45026 + \mathfrak{R}_m)\, e_2\, T \,.\ .\ .\ .\ .\ .\ . \ \mathbf{[21]}$$

Quando il pagamento cessi dopo $D = d + p$ anni, o venga fatto solo finchè sia raggiunto l'$(m+p)^{esimo}$ anno, si ha, seguendo lo stesso metodo usato per la formola [7], relativo anche alle [14] e [20]:

$$\underset{p}{C_m} = C_m - \frac{a_{m+p}}{a_m} r^p \left\{ C_{m+p} + p\,(0{,}45026 + \mathfrak{R}_{(m+p)}) \right\} \ldots [\mathbf{22}]$$

Qualora nel tempo in cui vengono pagate le rate d'entrata non si facciano pagamenti correnti, si può trovare il valore dei pagamenti seguendo lo stesso metodo adoperato per ricavare la formola [4]. Si avrà quindi:

$$C'_m = \frac{a_{m+z}}{a_m} r^z\, C_{m+z} \,.\; \ldots\ldots\ldots [\mathbf{23}]$$

Così quando non si debbano fare pagamenti correnti dopo l'aumento di stipendio, durante il tempo pel quale si pagano somme a questo titolo speciale, il valore del pagamento annuo $e_2\, v$ dev'essere diffalcato da C_m ed il valore del pagamento corrente è:

$$C''_m = C_m - (0{,}45026 + \mathfrak{R}_m)\, e_2\, v ;\; \ldots\ldots [\mathbf{24}]$$

e finalmente quando questo pagamento non debba farsi nè durante il tempo in cui si pagano le rate d'entrata, nè durante quello in cui si pagano somme per aumento di stipendio, il suo valore sarà [1]:

$$C'''_m = \frac{a_{m+z}}{a_m} r^z \left\{ C_{m+z} - (0{,}45026 + \mathfrak{R}_{m+z})\, e_2\, v \right\} \ldots [\mathbf{25}]$$

[1] L'autore ha calcolato il valore della espressione:

$$\frac{\Sigma a_{m+1}\, r^{m+1}\, \mathfrak{R}_{m+1}}{a_m\, r_m}$$

che figura nella formola [20].

N. d. D.

CAPITOLO II.

VALORE ATTUALE DEGLI IMPEGNI.

§ 5.

Oneri della Cassa Pensioni.

Il maggior numero delle Casse-Pensioni delle società ferroviarie ora esistenti accordano:

a) agl'impiegati stessi, pensioni vitalizie in caso d'invalidità, quando però quest'ultima sopraggiunga dopo un dato numero di anni, durante i quali l'impiegato sia stato socio;

b) alle vedove degl'impiegati, pensioni vitalizie o che durano fino a nuovo matrimonio, a condizione però che il defunto marito abbia fatto parte della società per un dato numero di anni e che il primo matrimonio abbia pure durato un numero d'anni prefisso;

c) sussidi alle vedove di quegli impiegati che non hanno alcun diritto alla pensione;

d) determinate pensioni o sussidi ai figli degl'impiegati, o dopo la morte del padre per tutto il tempo in cui la madre sopravvive, o dopo la morte d'ambedue i genitori fino ad una data età.

Le pensioni vengono ordinariamente pagate in rate mensili posticipate.

§ 6.

a) Pensioni agli invalidi.

Secondo il maggior numero degli statuti delle Casse-Pensioni ferroviarie, l'entità della pensione che riceve un impiegato divenuto invalido, dipende dall'ammontare dell'ultimo stipendio e dal numero degli anni di compartecipazione alla società; in modo cioè, che il diritto alla pensione incominci solo quando questa compartecipazione sussista da un dato numero di anni, e l'entità della pensione dopo questo numero di anni venga espressa in parti percentuali dello stipendio; in seguito la pensione cresce di determinate somme, espresse pure ordinariamente in parti percentuali dello stipendio, e raggiunge il suo massimo valore dopo un certo numero di anni.

Sia ora:

g il numero d'anni di compartecipazione alla società, dopo i quali l'impiegato ha diritto a pensione in caso d'invalidità;

p il numero (frazione propria) pel quale si deve moltiplicare l'ultimo stipendio, per ottenere la *pensione minima* ossia la pensione dopo un numero g di anni di compartecipazione;

δ il numero di anni dopo il quale la pensione cresce di un determinato grado;

$\mathfrak{p}$ il numero (frazione propria) pel quale si deve moltiplicare l'ultimo stipendio per ottenere l'aumento della pensione dopo i δ anni;

D il numero di anni di servizio o di compartecipazione alla società, dopo il quale si ha diritto al maximum della pensione;

J_n l'ammontare della pensione annua di un impiegato di m anni, che nell'n^{esimo} anno diviene invalido;

$\mathfrak{A}_m$ il valore attuale della pensione-invalidi spettante ad un impiegato di m anni.

Lo stipendio dopo l'n^{esimo} anno è secondo la formola [19]:

$$T + \frac{2n-1}{2} v .$$

Il fattore pel quale lo stipendio dev'essere moltiplicato per ottenere la pensione è

$$p + \frac{d-g+n-1}{\delta} \mathfrak{p}, \quad (^1)$$

nel quale però, siccome la pensione cresce ogni periodo di δ anni di una somma $= \mathfrak{p} \times$ lo stipendio, si deve considerare solo il numero intero risultante dalla divisione

$$\frac{d-g+n-1}{\delta},$$

e trascurare la restante frazione propria.

(1) Per i simboli non definiti in questo paragrafo vedansi quelli stabiliti nel capitolo I.

Ne segue che (¹):

$$\text{per } n \overline{\overline{<}}\, g - d\,,\ J_n = 0\,;$$

$$\text{per } n > g - d,\ J_n = \left(p + \frac{d+n-g-1}{\delta}\,\mathfrak{p}\right)\left(T + \frac{2n-1}{2}\,v\right)\Big\}. \quad \textbf{[26]}$$

Quando il fattore, pel quale lo stipendio dev'essere moltiplicato onde ottenere la pensione, debba raggiungere il suo massimo valore alla fine del p^{esimo} anno di compartecipazione alla società, si avrà per $n > D - d$:

$$J_n = \left(p + \frac{D-g-1}{\delta}\,\mathfrak{p}\right)\left(T + \frac{2(D-d)-1}{2}\,v\right). \quad . \quad \textbf{[27]}$$

Ma se il massimo della pensione è fissato in un numero che noi chiameremo I, allora si avrà:

$$I = \left(p + \frac{d+n-g-1}{\delta}\,\mathfrak{p}\right)\left(T + \frac{2n-1}{2}\,v\right),$$

da cui si può ricavare e determinare n, e quindi quell'anno che noi chiameremo *limite*, dopo il quale la pensione non subisce ulteriori aumenti, ma resta continuamente eguale ad I.

Determinata in tal modo la media pensione-invalidi per ciascun anno, ci resta ancora a trovare il numero di coloro che in ciascun anno e quindi p. e. nell'n^{esimo} anno, diverranno invalidi.

Sia a_m il numero dei soci abili al lavoro viventi di età m, secondo le tavole di invalidità: si avrà che

al principio dell'n^{esimo} anno . . . . a_{m+n-1}
e alla fine » » » . . . . a_{m+n}

saranno ancora abili.

(¹) Secondo gli statuti della società austriaca delle ferrovie dello Stato, la pensione non è dipendente dall'ultimo stipendio, ma dalla media degli stipendi degli ultimi tre anni di servizio, quindi per questo istituto di pensioni si deve mettere

$$T + (n-2)\,v,$$

invece di

$$T + \frac{2\,n-1}{2}\,v\,.$$

Se nel corso dell'n^{esimo} anno nessuno fosse divenuto invalido, ossia con altre parole, se il numero a_{m+n} di soci abili viventi alla fine dell'anno, rappresentasse i sopravviventi di un numero y di soci viventi al principio dell'anno, dovrebbe essere $a_{m+n-1} = y$; quando però non si presenti questo caso, $a_{m+n-1} - y$ esprime evidentemente il numero di tutti quelli che son divenuti invalidi nel corso dell'anno, sia che sopravvivano all'n^{esimo} anno, sia che nell'n^{esimo} anno muoiano.

Ora degli l_{m+n-1} viventi al principio dell'n^{esimo} anno, supponiamo ne sopravvivano alla fine di esso ancora l_{m+n}. Sta allora la proporzione [1]:

$$l_{m+n} : l_{m+n-1} = a_{m+n} : y ,$$

da cui

$$y = a_{m+n} \frac{l_{m+n-1}}{l_{m+n}} ,$$

e quindi il numero dei *divenuti invalidi* nell'n^{esimo} anno ammonta a:

$$a_{m+n-1} - a_{m+n} \frac{l_{m+n-1}}{l_{m+n}} ,$$

oppure anche a:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right) l_{m+n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [\mathbf{28}]$$

Di quelli che divengono invalidi nell'n^{esimo} anno, una parte sopravvive, un'altra muore nello stesso anno.

Se gli a_{m+n-1} viventi soci abili al lavoro al principio dell'n^{esimo} anno diminuissero nel corso dell'anno solo per causa di morte, i sopravviventi alla fine dell'anno sarebbero:

$$a_{m+n-1} \frac{l_{m+n}}{l_{m+n-1}} .$$

Ma siccome alla fine dell'n^{esimo} anno ne rimangono soltanto

[1] L'autore suppone con ciò che la mortalità degli invalidi sia la stessa come per gli abili al lavoro. Il Behm ed altri tengono ora conto della mortalità specifica degli invalidi la quale può differire sensibilmente da quella degli abili al lavoro. *N. d. D.*

abili a_{m+n}, ne viene che il numero dei divenuti invalidi nell'n^{esimo} anno, ma che sopravvivono, è:

$$a_{m+n-1}\frac{l_{m+n}}{l_{m+n-1}}-a_{m+n},$$

oppure:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad[\mathbf{29}]$$

Il numero di coloro che nell'n^{esimo} anno divengono invalidi e muoiono, si ottiene evidentemente sottraendo dall'intero numero dei divenuti invalidi nell'n^{esimo} anno [28], il numero degli invalidi sopravviventi [29]; sarà quindi:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n})\,.\,.\,.\,.\quad[\mathbf{30}]$$

Coloro che hanno cessato d'esser soci abili al lavoro nell'n^{esimo} anno e che sopravvivono, riceveranno nello stesso anno una certa parte della pensione annuale J_n in rate mensili scadute, e dopo dell'n^{esimo} anno una rendita vitalizia annuale J_n, pagabile dalla fine dell'n^{esimo} anno fino alla morte, in rate scadenti mensilmente. Coloro invece che cessano dall'attività nell'n^{esimo} anno, ma che nello stesso anno muoiono, ricevono solo una certa parte dell'annuale pensione invalidi J_n in rate scadenti mensilmente.

Si deve perciò trovare il valore attuale:

1° Delle rate da pagarsi nell'n^{esimo} anno:

a) agli $\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n})$ invalidi, che muoiono nell'n^{esimo} anno;

b) agli $\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}$ invalidi che sopravvivono.

2° Della rendita vitalizia incominciante alla fine dell'n^{esimo} anno, da pagarsi in rate a mese scaduto agli

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}$$

individui che cessarono dall'esser soci *attivi* nell'n^{esimo} anno, ma che sopravvivono.

Il totale di queste espressioni dà il valore attuale della somma spettante agli a_m soci abili al lavoro, che divengono invalidi nell'n^{esimo} anno.

Per la classe 1a). — Se l'invalidità e la morte di un certo numero di soci ha luogo nello stesso anno, il tempo che decorre fra questi due avvenimenti può assumere tutti i valori da 0 a 1 anno; e la somma da pagarsi per ogni singolo socio divenuto invalido può pure assumere tutti i valori da 0 a J_n. Il valore attuale di tutti i pagamenti da farsi in questi casi, si trova moltiplicando il numero di questi invalidi, ossia:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(l_{m+n-1} - l_{m+n})$$

pel valore attuale della media fra tutte le somme da pagarsi ai singoli invalidi. Supponiamo ora che l'invalidità succeda in un tempo $n - 1 + \mu$, e la morte in un tempo $n - 1 + \rho$, succedendo i due avvenimenti nello stesso n^{esimo} anno, tanto μ che ρ devono essere minori di 1, e $\rho \geqq \mu$. Il tempo $n - 1 + \mu$ cada nel p^{esimo} mese, e il tempo $n - 1 + \rho$ nel q^{esimo} mese dell'n^{esimo} anno, in modo che:

$$\frac{p-1}{12} < \mu < \frac{p}{12};$$

$$\frac{q-1}{12} < \rho < \frac{q}{12},$$

Si dovrà allora pagare:

alla fine del p^{esimo} mese . . . . . $\left(\frac{p}{12} - \mu\right) J_n$;

id. $(p+1)^{esimo}$ id. . . . . $\frac{1}{12} J_n$;

id. $(p+2)^{esimo}$ id. . . . . $\frac{1}{12} J_n$;

. . . .

alla fine del $(q-2)^{esimo}$ mese . . . . $\frac{1}{12} J_n$;

id. $(q-1)^{esimo}$ id. . . . . $\frac{1}{12} J_n$;

id. q^{esimo} id. . . . . $\left(\rho - \frac{(q-1)}{12}\right) J_n$.

Se questi valori si riducono ad interesse semplice al principio dell'anno, si ottiene il valore totale dei pagamenti al principio dell'n^{esimo} anno:

$$\left[\frac{\frac{p}{12}-\mu}{1+\frac{p}{12}i} + \frac{\frac{1}{12}}{1+\frac{p+1}{12}i} + \frac{\frac{1}{12}}{1+\frac{p+2}{12}i} + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{12}}{1+\frac{q-1}{12}i} + \frac{\rho - \frac{q-1}{12}}{1+\frac{q}{12}i}\right] J_n;$$

oppure

$$\left[\frac{p-12\mu}{12+pi} + \frac{1}{12+(p+1)i} + \frac{1}{12+(p+2)i} + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12+(q-1)i} + \frac{12\rho-(q-1)}{12+qi}\right] J_n.$$

In questa espressione μ e ρ possono prendere tutti i valori da 0 a 1, deve però sempre sussistere che

$$\frac{p-1}{12} \lesseqgtr \mu \lesseqgtr \frac{p}{12} \quad \text{e} \quad \frac{q-1}{12} \lesseqgtr \rho \lesseqgtr \frac{q}{12}.$$

Il valore medio di questa espressione per tutti i valori possibili da μ a ρ è (vedi osservazione relativa alla formola [19]):

$$\left(\frac{\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}} d\mu \int_{\frac{q-1}{12}}^{\frac{q}{12}} \left[\frac{p-12\mu}{12+pi} + \frac{1}{12+(p+1)i} + \right.}{\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}} d\mu \int_{\frac{q-1}{12}}^{\frac{q}{12}} d\rho} \right.$$

$$\left.\frac{+\dfrac{1}{12+(p+2)i}+\cdots+\dfrac{1}{12+(q-1)i}+\dfrac{12\rho-(q-1)}{12+qi}\Big]d\rho}{\displaystyle\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}}d\mu\int_{\frac{q-1}{12}}^{\frac{q}{12}}d\rho}\right\}J_n\,,\quad\textbf{[31]}$$

in cui nel numeratore e nel denominatore per p e q si possono mettere tutti i numeri interi da 1 a 12. Però, a causa di

$$\rho \mathrel{\overline{\overline{>}}} \mu \quad \text{e di} \quad q \mathrel{\overline{\overline{>}}} p\,,$$

il limite inferiore dell'integrazione relativamente a ρ non deve esser preso minore di μ, sicchè per $p=q$ il numeratore diviene:

$$\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}}d\mu\int_{\mu}^{\frac{p}{12}}\left[\frac{12\,(\rho-\mu)}{12+i}\right]d\rho\,,$$

ed il denominatore:

$$\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}}d\mu\int_{\mu}^{\frac{p}{12}}d\rho\,;$$

conseguentemente il numeratore della frazione consiste delle seguenti parti:

per $p=1$, $q=1$;

$$\int_{0}^{\frac{1}{12}}d\mu\int_{\mu}^{\frac{1}{12}}\frac{12\,(\rho-\mu)}{12+i}\,d\rho=\frac{1}{6\,(12+i)\,12^2}\,;$$

per $p=1$, $q=2$;

$$\int_{0}^{\frac{1}{12}}d\mu\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{11}}\left[\frac{1-12\,\mu}{12+i}+\frac{12\,\rho-1}{12+2i}\right]d\rho=$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(12+i)}+\frac{1}{2\,(12+2i)}\right]\frac{1}{12^2};$$

per $p = 1$, $q = 3$;

$$\int_0^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{2}{12}}^{\frac{3}{11}} \left[\frac{1-12\,\mu}{12+i} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{12\,\rho - 2}{12+3\,i}\right] d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{2\,(12+i)} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{1}{2\,(12+3\,i)}\right] \frac{1}{12^2};$$

. . . .

per $p = 1$, $q = 11$;

$$\int_0^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} \left[\frac{1-12\,\mu}{12+i} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{1}{12+3\,i} + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{12\,\rho - 10}{12+11\,i}\right] d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{2\,(12+i)} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{1}{12+3\,i} + \cdots\cdots + \frac{1}{2\,(12+11\,i)}\right] \frac{1}{12^2};$$

per $p = 1$, $q = 12$;

$$\int_0^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} \left[\frac{1-12\,\mu}{12+i} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{1}{12+3\,i} + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{12\,\rho - 11}{12+12\,i}\right] d\rho = \left[\frac{1}{2\,(12+i)} + \frac{1}{12+2\,i} + \frac{1}{12+3\,i} + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12+11\,i} + \frac{1}{2\,(12+12\,i)}\right] \frac{1}{12^2};$$

per $p = 2$, $q = 2$;

$$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{2}{12}} \frac{12\,(\rho - \mu)}{12+2\,i}\, d\rho = \frac{1}{6\,(12+2\,i)\,12^2};$$

per $p=2$, $q=3$;

$$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\frac{2}{12}}^{\frac{3}{12}} \left[\frac{2-12\,\mu}{12+2\,i}+\frac{12\,\rho-2}{12+3\,i}\right] d\rho =$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(12+2\,i)}+\frac{1}{2\,(12+3\,i)}\right]\frac{1}{12^2};$$

per $p=2$, $q=4$;

$$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\frac{3}{12}}^{\frac{4}{12}} \left[\frac{2-12\,\mu}{12+2\,i}+\frac{1}{12+3\,i}+\frac{12\,\rho-3}{12+4\,i}\right] d\rho =$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(12+2\,i)}+\frac{1}{12+3\,i}+\frac{1}{2\,(12+4\,i)}\right]\frac{1}{12^2};$$

. . . .

per $p=2$, $q=12$;

$$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} \left[\frac{2-12\,\mu}{12+2\,i}+\frac{1}{12+3\,i}+\frac{1}{12+4\,i}+\cdots\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{12\,\rho-11}{12+11\,i}\right] d\rho =$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(12+2\,i)}+\frac{1}{12+3\,i}+\frac{1}{12+4\,i}+\cdots+\frac{1}{12\,(12+12\,i)}\right]\frac{1}{12^2};$$

. . . .

. . . .

. . . .

per $p=11$, $q=11$;

$$\int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{11}{12}} \frac{12\,(\rho-\mu)}{12+11\,i}\, d\rho = \frac{1}{6\,(12+11\,i)\,12^2};$$

per $p=11$, $q=12$;

$$\int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} \left[\frac{11-12\,\mu}{12+11\,i}+\frac{12\,\rho-11}{12+12\,i}\right] d\rho=$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(12+11\,i)}+\frac{1}{2\,(12+12\,i)}\right]\frac{1}{12^2};$$

per $p=12$, $q=12$;

$$\int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{12}{12}} \frac{12\,(\rho-\mu)}{12+12\,i}\, d\rho=\frac{1}{6\,(12+12\,i)\,12^2}.$$

Se si ordina secondo il denominatore e si somma, si ottiene per numeratore della frazione, form. [31]:

$$\frac{1}{6.12^2}\left[\frac{1+11.3}{12+i}+\frac{1+11.3+1.10.6}{12+2\,i}+\frac{1+11.3+2.9.6}{12+3\,i}+\right.$$

$$+\frac{1+11.3+3.8.6}{12+4\,i}+\frac{1+11.3+4.7.6}{12+5\,i}+\frac{1+11.3+5.6.6}{12+6\,i}+$$

$$+\frac{1+11.3+6.5.6}{12+7\,i}+\frac{1+11.3+7.4.6}{12+8\,i}+\frac{1+11.3+8.3.6}{12+9\,i}+$$

$$\left.+\frac{1+11.3+9.2.6}{12+10\,i}+\frac{1+11.3+10.1.6}{12+11\,i}+\frac{1+11.3}{12+12\,i}\right]=$$

$$=\frac{1}{432}\left[\frac{17}{12+i}+\frac{47}{12+2\,i}+\frac{71}{12+3\,i}+\frac{89}{12+4\,i}+\frac{101}{12+5\,i}+\right.$$

$$+\frac{107}{12+6\,i}+\frac{107}{12+7\,i}+\frac{101}{12+8\,i}+\frac{89}{12+9\,i}+\frac{71}{12+10\,i}+$$

$$\left.+\frac{47}{12+11\,i}+\frac{17}{12+12\,i}\right].$$

Analogamente si trova il denominatore. Così:

$$\text{per } p=1,\ q=1;\quad \int_{\frac{0}{12}}^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{1}{12}} d\rho = \frac{1}{2.12^2};$$

$$\text{per } p=1,\ q=2;\quad \int_{\frac{0}{12}}^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

$$\text{per } p=1,\ q=3;\quad \int_{\frac{0}{12}}^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{2}{12}}^{\frac{3}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

. . . .

$$\text{per } p=1,\ q=12;\quad \int_{\frac{0}{12}}^{\frac{1}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

$$\text{per } p=2,\ q=2;\quad \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{2}{12}} d\rho = \frac{1}{2.12^2};$$

$$\text{per } p=2,\ q=3;\quad \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\frac{2}{12}}^{\frac{3}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

. . . .

$$\text{per } p=2,\ q=12;\quad \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\text{per } p=11,\ q=11;\quad \int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{11}{12}} d\rho = \frac{1}{2.\,12^2};$$

$$\text{per } p=11,\ q=12;\quad \int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} d\mu \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\rho = \frac{1}{12^2};$$

$$\text{per } p=12,\ q=12;\quad \int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\mu \int_{\mu}^{\frac{12}{12}} d\rho = \frac{1}{2.12^2}.$$

Sommando, il denominatore risulta:

$$12\cdot\frac{1}{2.12^2}+\frac{11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1}{12^2}=$$

$$=\frac{1}{2.12}+\frac{11}{2.12}=\frac{1}{2}.$$

Si ottiene quindi secondo la formola [31] il valore medio di tutti i pagamenti a coloro che divengono invalidi nell'n^{esimo} anno e che muoiono in esso, valore ridotto al principio dell'n^{esimo} anno:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{216}\Bigg[\frac{17}{12+i}+\frac{47}{12+2\,i}+\frac{71}{12+3\,i}+\frac{89}{12+4\,i}+\frac{101}{12+5\,i}+\\&+\frac{107}{12+6\,i}+\frac{107}{12+7\,i}+\frac{101}{12+8\,i}+\frac{89}{12+9\,i}+\frac{71}{12+10\,i}+\\&\qquad+\frac{47}{12+11\,i}+\frac{17}{12+12\,i}\Bigg]J_n,\end{aligned}\right\}\quad\textbf{[32]}$$

e mettendo per i il suo valore, si trova finalmente:

$$0{,}32458\ J_n;\ (^1)$$

cioè il valore dei pagamenti a tutti coloro che divengono invalidi

(1) Se durante l'anno non si calcolassero interessi, non sarebbe necessario considerare che i pagamenti vengono fatti in rate mensili, e un impiegato,

nell'n^{esimo} anno e che nello stesso anno muoiono, ridotto al principio dell'n^{esimo} anno ammonta a:

$$0{,}32458\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n})\,J_n \ldots[\mathbf{33}]$$

Per la classe 1*b*). — Coloro che nell'n^{esimo} anno divengono invalidi e sopravvivono, il cui numero ascende, come si trovò, a:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}\,,$$

ricevono nell'n^{esimo} anno una somma, il cui valore medio al principio dell'n^{esimo} anno si ottiene quando nella formola [31] si facciano variare tra i limiti dati solo μ e p, ponendo ρ costante $=1$, e q costante $=12$. Sicchè si ha:

$$\frac{\displaystyle\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}}\left[\frac{p-12\,\mu}{12+p\,i}+\frac{1}{12+(p+1)\,i}+\frac{1}{12+(p+2)\,i}\cdots+\frac{1}{12+11\,i}+\frac{1}{12+12\,i}\right]d\mu}{\displaystyle\int_{\frac{p-1}{12}}^{\frac{p}{12}}d\mu}\,J_n\,.\;\ldots\ldots\;[\mathbf{34}]$$

che nell'n^{esimo} anno diventa invalido nel tempo μ, e nello stesso anno al tempo ρ muore, riceverebbe

$$(\mu-\rho)\,J_n\,,$$

sicchè la media tra tutti i possibili pagamenti sarebbe:

$$\frac{\int_0^1 d\mu\int_\mu^1(\rho-\mu)\,d\rho}{\int_0^1 d\mu\int_\mu^1 d\rho}\,J_n=\frac{\frac{1}{2}\int_0^1(1-2\,\mu+\mu^2)\,d\mu}{\int_0^1(1-\mu)\,d\mu}\,J_n=\frac{1}{3}\,J_n\,.$$

Si ottiene lo stesso valore, se nella formola [32] si pone la tassa percentuale $i=o$. Difatti si ha:

$$\frac{1}{216}\cdot\frac{864}{12}\,J_n=\frac{1}{3}\,J_n\,.$$

Conseguentemente il numeratore diventa:

per $p = 1$;

$$\int_0^{\frac{1}{12}} \left[\frac{1-12\mu}{12+i} + \frac{1}{12+2i} + \frac{1}{12+3i} + \cdots + \frac{1}{12+12i}\right] d\mu =$$

$$= \left[\frac{1}{2(12+i)} + \frac{1}{12+2i} + \frac{1}{12+3i} + \cdots + \frac{1}{12+12i}\right] \frac{1}{12};$$

per $p = 2$;

$$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} \left[\frac{2-12\mu}{12+2i} + \frac{1}{12+3i} + \frac{1}{12+4i} + \cdots + \frac{1}{12+12i}\right] d\mu =$$

$$= \left[\frac{1}{2(12+2i)} + \frac{1}{12+3i} + \frac{1}{12+4i} + \cdots + \frac{1}{12+12i}\right] \frac{1}{12};$$

. . . .

per $p = 11$;

$$\int_{\frac{10}{12}}^{\frac{11}{12}} \left[\frac{11-12\mu}{12+11i} + \frac{1}{12+12i}\right] d\mu =$$

$$= \left[\frac{1}{2(12+11i)} + \frac{1}{12+12i}\right] \frac{1}{12};$$

per $p = 12$;

$$\int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} \left[\frac{1-12\mu}{12+12i}\right] d\mu = \frac{1}{2(12+12i)\,12},$$

e sommando:

$$\frac{1}{24}\left[\frac{1}{12+i} + \frac{3}{12+2i} + \frac{5}{12+3i} + \frac{7}{12+4i} + \frac{9}{12+5i} + \right.$$

$$+ \frac{11}{12+6i} + \frac{13}{12+7i} + \frac{15}{12+8i} + \frac{17}{12+9i} + \frac{19}{12+10i} +$$

$$\left. + \frac{21}{12+11i} + \frac{23}{12+12i}\right].$$

Ed il denominatore diventa:

per $p = 1$; $$\int_{0}^{\frac{1}{12}} d\mu = \frac{1}{12};$$

per $p = 2$; $$\int_{\frac{1}{12}}^{\frac{2}{12}} d\mu = \frac{1}{12};$$

. . . .

. . . .

per $p = 12$; $$\int_{\frac{11}{12}}^{\frac{12}{12}} d\mu = \frac{1}{12},$$

e sommando:

$$12 \cdot \frac{1}{12} = 1.$$

Messi questi valori nella formola [34], si ottiene il valore medio dei pagamenti fatti nell'n^{esimo} anno a coloro che in esso diventano invalidi, ma che sopravvivono, valore ridotto al principio dell'n^{esimo} anno:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{24}\left[\frac{1}{12+i} + \frac{3}{12+2i} + \frac{5}{12+3i} + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{21}{12+11i} + \frac{23}{12+12i}\right] J_n , \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [35]$$

ossia:

$$0{,}48299\ J_n. \ (^1)$$

(1) Se non si calcolassero gl'interessi durante l'anno, è evidente senza nessun altro calcolo, che un impiegato che diviene invalido nell'n^{esimo} anno e che sopravvive, riceverà in media nell'n^{esimo} anno

$$\frac{1}{2} J_n,$$

il qual valore si ricava anche dalla formola [35] se si fa $i = o$; quindi si ottiene

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{144}{12} \cdot J_n = \frac{1}{2} J_n.$$

Conseguentemente il valore di tutti i pagamenti da farsi nell'n^{esimo} anno a coloro che in esso diventano invalidi, ma che sopravvivono, ridotto al principio dell'anno ammonta a:

$$0{,}48299\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}\,J_n\,.\quad .\quad .\quad .\quad [\mathbf{36}]$$

Così si ottiene anche il valore di tutti i pagamenti da farsi nell'n^{esimo} anno a coloro che in esso diventano invalidi senza distinzione, vale a dire tanto a quelli che nel corso dell'n^{esimo} anno muoiono, quanto a quelli che sopravvivono, se si sommano le espressioni [33] e [36]: quindi:

$$0{,}32458\left(\frac{a_{m-n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n})\,J_n+$$

$$+\,0{,}48299\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}\,J_n=$$

$$=(0{,}32458\,l_{m+n-1}+0{,}15841\,l_{m+n})\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)J_n\;..[\mathbf{37}]$$

Per la classe 2. — Gli $\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}-\frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)l_{m+n}$ invalidi che sopravvivono ricevono inoltre una rendita vitalizia annuale J_n, incominciante alla fine dell'n^{esimo} anno e pagabile in rate mensili posticipate. Ora secondo la formola [3] il valore di una tal rendita per un individuo avente $m+n$ anni di età al finire dell'$(m+n)^{esimo}$ anno, e quindi al principio dell'$n+1^{esimo}$ anno di presenza nella società, è:

$$[0{,}45026+R_{(m+n)}]\,J_n\,,$$

in cui

$$R_{(m+n)}=\frac{l_{m+n+1}\,r+l_{m+n+2}\,r^2+l_{m+n+3}\,r^3+\cdots\cdots}{l_{m+n}}\,.$$

Perciò questa rendita vitalizia ammonta al principio dell'n^{esimo} anno a

$$(0{,}45026\,r+R_{m+n}\,r)\,J_n=[0{,}42882+r\,R_{(m+n)}]\,J_n\;...[\mathbf{38}]$$

Conseguentemente il valore di questa rendita vitalizia per tutti coloro che nell' n^{esimo} anno divengono invalidi e che sopravvivono, ridotta al principio dell' n^{esimo} anno, ammonta a:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(0{,}42882 + r R_{(m+n)})\, l_{m+n}\, J_n) \ldots \textbf{[39]}$$

Nella formola [37] abbiamo trovato il valore complessivo di tutti i pagamenti da farsi nell'n^{esimo} anno, e nella formola [39] il valore di quelli da farsi dopo l'n^{esimo} anno a tutti coloro che in esso divengono invalidi, valori ridotti al principio dell'n^{esimo} anno. La somma di queste due espressioni dà quindi il valore complessivo di tutti i pagamenti da farsi a coloro che divengono invalidi nell'n^{esimo} anno, ridotto al principio di esso:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(0{,}32458\ l_{m+n-1} +$$

$$+ 0{,}58723\, l_{m+n} + r\, l_{m+n}\, R_{m+n})\, J_n\,,$$

oppure anche, essendo

$$R_{(m+n)} = \frac{l_{m+n+1}\, r + l_{m+n+2}\, r^2 + l_{m+n+3}\, r^3 + \cdots\cdots}{l_{m+n}} =$$

$$= \frac{l_{m+n-1}\, R_{m+n-1}}{r\, l_{m+n}} - 1\,,$$

e

$$r = \frac{1}{1.05},$$

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)(0{,}32458\, l_{m+n-1} - 0.36515\, l_{m+n} +$$

$$+ l_{m+n-1}\, R_{m+n-1})\, J_n \ldots\ldots\ldots \textbf{[40]}$$

Se l'ultimo valore si sconta per $(n-1)$ anni, si ottiene il valore attuale di tutti i pagamenti da farsi a quelli che divengono invalidi nell' n^{esimo} anno:

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+n-1} - 0{,}36515\, l_{m+n}) +$$

$$+ l_{m+n-1}\, R_{m+n-1}]\, r^{n-1}\, J_n \ldots\ldots\ldots \textbf{[41]}$$

Di qui, se si fa $n = 1, 2, 3$ ecc. e se si somma, si ricava il valore attuale della rendita vitalizia spettante complessivamente agli a_m soci abili al lavoro di m anni di età:

$$\left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)[(0{,}32458\, l_m - 0{,}36515\, l_{m+1}) + l_m R_m]\, J_1 +$$
$$+ \left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} - \frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+1} - 0{,}36515\, l_{m+2}) +$$
$$+ l_{m+1} R_{m+1}]\, r J_2 +$$
$$+ \left(\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}} - \frac{a_{m+3}}{l_{m+3}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+2} - 0{,}36515\, l_{m+3}) +$$
$$+ l_{m+2} R_{m+2}]\, r^2 J_3 + \cdots \ldots \ldots \quad [\mathbf{42}]$$

Questa espressione divisa per a_m, dà finalmente il valore attuale della pensione-invalidi che spetta ad un impiegato attivo di m anni di età:

$$\mathfrak{A}_m = \frac{1}{a_m}\Bigg\{\left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)[(0{,}32458\, l_m - 0{,}36515\, l_{m+1}) +$$
$$+ l_m R_m]\, J_1 +$$
$$+ \left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} - \frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+1} - 0{,}36515\, l_{m+2}) +$$
$$+ l_{m+1} R_{m+1}]\, r J_2 +$$
$$+ \left(\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}} - \frac{a_{m+3}}{l_{m+3}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+2} - 0{,}36515\, l_{m+3}) +$$
$$+ l_{m+2} R_{m+2}]\, r^2 J_3 + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right)[(0{,}32458\, l_{m+n-1} - 0{,}36515\, l_{m+n}) +$$
$$+ l_{m+n-1} R_{m+n-1}]\, r^{n-1} J_n + \cdots \Bigg\} \ldots \quad [\mathbf{43}]$$

Siccome $(0{,}32458\, l_{m+n-1} - 0{,}36515\, l_{m+n})$ è sempre piccolissimo in confronto di $l_{m+n-1}\, R_{m+n-1}$, si può tralasciare questa differenza senza incorrere in errore valutàbile; ciò facendo e moltiplicando numeratore e denominatore per r^m si ottiene la seguente formola approssimativa:

$$\mathfrak{A}_m = \frac{1}{a_m r^m}\left[\left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right) l_m R_m r^m J_1 + \right.$$

$$+ \left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} - \frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right) l_{m+1} R_{m+1} r^{m+1} J_2 +$$

$$+ \left(\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}} - \frac{a_{m+3}}{l_{m+3}}\right) l_{m+2} R_{m+2} r^{m+2} J_3 + \cdots$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}} - \frac{a_{m+n}}{l_{m+n}}\right) l_{m+n-1} R_{m+n-1} r^{m+n-1} J_n + \cdots \right], \quad [\mathbf{43}a]$$

formola ottenibile anche direttamente, ammettendo, che coloro i quali divengono invalidi nell'n^{esimo} anno ricevano una pensione J_n, non pagabile in rate mensili ma annualmente, di cui il primo pagamento si faccia alla fine dell'n^{esimo} anno.

§ 7.

b) Pensioni alle vedove.

L'ammontare della pensione alle vedove è fissato, secondo gli statuti delle Casse-pensioni delle società ferroviarie, in una parte o dello stipendio che il marito aveva all'epoca della sua morte, o della pensione ch'egli a quel tempo godeva od avrebbe avuto il diritto di godere.

La vedova ha però diritto alla pensione, solo nel caso che il marito all'epoca della morte avesse un numero d'anni di servizio tale che gli desse il diritto alla pensione. Oltre a ciò, in molti statuti il diritto della vedova alla pensione è dipendente anche dal numero degli anni di matrimonio, mentre in altri statuti questa condizione non è necessaria.

In ciò che segue si fa astrazione dalla durata del matrimonio, perchè volendo tenerne conto, mancherebbero i dati statistici necessari; ed anche perchè come si è detto, si può prescinderne, ed infatti se ne prescinde nel maggior numero dei casi, come insegna l'esperienza.

Non tenendo conto di questa circostanza gli impegni vengono a crescere, quindi il giudizio sulla solidità della Cassa non può che avvantaggiare.

L'ammontare del *maximum* della pensione, che una vedova può ottenere è determinato nella maggior parte degli statuti.

Sia:

m_1 l'età attuale della moglie dell'impiegato,

π il numero (frazione propria), per cui dev'essere moltiplicato l'ultimo stipendio o la pensione del marito, per ottenere la pensione della vedova, ed evidentemente nell'ultimo caso π avrà un valore diverso da quello che avrà nel 1°,

w_q l'ammontare dell'annua pensione che una donna di m_1 anni, moglie d'un impiegato di m anni, riceve dopo la morte del medesimo,

$\mathfrak{B}_{m,m_1}$ il valore attuale della pensione della vedova.

Lo stipendio pel q^{esimo} anno è, secondo la formola [19]:

$$T + \frac{2q-1}{2} v,$$

e la pensione, secondo la formola [26]:

$$\left(p + \frac{d+q-g-1}{\delta} \mathfrak{p}\right)\left(T + \frac{2q-1}{2} v\right).$$

Conseguentemente, se la pensione della vedova è dipendente dallo stipendio, si avrà:

per $q \overline{\overline{<}} g - d, \; w_q = 0;$

$$q > g - d, \; w_q = \pi \left(T + \frac{2q-1}{2} v\right). \qquad [44]$$

Se invece essa è dipendente dalla pensione che aveva il marito, si avrà:

per $q \overline{\overline{<}} g - d, \; w_q = 0;$

$$q > g - d, \; w_q = \pi \left(p + \frac{d+q-g-1}{\delta} \mathfrak{p}\right)\left(T + \frac{2q-1}{2} v\right). \qquad [45]$$

Chiamando W il *maximum* della pensione della vedova, si può determinare, sostituendo W a w_q nell'una o nell'altra delle ultime due formole, il tempo q dopo il quale la pensione più non aumenta.

Noi abbiamo mostrato come si può trovare la media pensione w_q che la vedova di un impiegato riceve dopo la morte del medesimo, s'egli lasciò il servizio attivo nel q^{esimo} anno.

Ora se questo impiegato di m anni muore nell'n^{esimo} anno, egli può aver lasciato il servizio attivo nel 1°, 2°, 3° ecc., nel q^{esimo}, $(q+1)^{esimo}$ ecc., oppure finalmente anche nell'n^{esimo} anno. Le vedove degli impiegati di m anni che muoiono nell'n^{esimo} anno godranno perciò una o l'altra delle pensioni per le vedove:

$$w_1, w_2, w_3, w_4 \; .\;.\;.\;.\; w_q \; .\;.\;.\;.\; w_{n-1}, w_n .$$

Si deve quindi determinare tra tutte queste pensioni possibili, la pensione media che noi chiameremo W_n.

Ora di a_m impiegati abili al lavoro viventi nell'anno m^{esimo}, ne muoiano fino all'n^{esimo} anno

$$\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n});$$

secondo la formola [28], quelli usciti dal servizio attivo nel 1° anno sono

$$\left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)(l_{m+n-1} - l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_1;

nel 2° anno

$$\left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} - \frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right)(l_{m+n-1} - l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_2;

nel 3° anno

$$\left(\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}} - \frac{a_{m+3}}{l_{m+3}}\right)(l_{m+n-1} - l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_3;

. . . .

nel q^{esimo} anno

$$\left(\frac{a_{m+q-1}}{l_{m+q-1}} - \frac{a_{m+q}}{l_{m+q}}\right)(l_{m+n-1} - l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_q;

. . . .

nel $(n-1)^{esimo}$ anno

$$\left(\frac{a_{m+n-2}}{l_{m+n-2}}-\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_{n-1};

nell' n^{esimo} anno

$$\left(\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}\right)(l_{m+n-1}-l_{m+n}),$$

le cui vedove ricevono la pensione w_n;

in totale: $\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1}-l_{m+n})$, le cui vedove ricevono la pensione media W_n. Questa pensione media W_n si trova, moltiplicando il numero di coloro che lasciano il servizio attivo nei singoli anni fino all'n^{esimo} per la corrispondente pensione accordata alle vedove, e dividendo la somma di questi prodotti pel numero totale di coloro che hanno lasciato il servizio attivo fino all'n^{esimo} anno, ossia pel numero di coloro che muoiono nell'n^{esimo} anno. Si ha quindi:

$$W_n=\frac{l_m}{a_m}\left[\left(\frac{a_m}{l_m}-\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)w_1+\left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}-\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right)w_2+\cdots\cdots+\right.$$
$$+\left(\frac{a_{m+q-1}}{l_{m+q-1}}-\frac{a_{m+q}}{l_{m+q}}\right)w_q+\cdots\cdots+$$
$$\left.+\left(\frac{a_{m+n-2}}{l_{m+n-2}}-\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}\right)w_{n-1}+\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}w_n\right].\text{(1)} \quad \textbf{[46]}$$

(1) Da questa formola, per essere:

$$W_{n-1}=\frac{l_m}{a_m}\left\{\left(\frac{a_m}{l_m}-\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)w_1+\left(\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}-\frac{a_{m+2}}{l_{m+2}}\right)w_2+\cdots\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a_{m+n-3}}{l_{m+n-3}}-\frac{a_{m+n-2}}{l_{m+n-2}}\right)w_{n-2}+\frac{a_{m+n-2}}{l_{m+n-2}}w_{n-1}\right\},$$

si ottiene facilmente la formola:

$$W_n=\frac{l_m}{a_m}\left[W_{n-1}+\frac{a_{m+n-1}}{l_{m+n-1}}(w_n-w_{n-1})\right], \quad [46a]$$

che è più comoda pel calcolo.

Dopo d'aver determinato la media pensione W_n delle mogli di impiegati che divengono vedove nell' n^{esimo} anno, ci resta ancora a trovare il numero di tali vedove.

Supponiamo che esistano $a_m\ l_{m_1}$ matrimoni, in cui gli uomini hanno m anni e sono validi e le donne hanno m_1 anni: nell' n^{esimo} anno muore un numero di uomini

$$\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\, l_{m_1+n}, \quad \ldots\ldots \quad [\mathbf{47}]$$

le cui mogli sopravvivono durante tutto l'anno; nell' n^{esimo} anno muoiono pure uomini e donne in numero di:

$$\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\ (l_{m_1+n-1} - l_{m_1+n}) \ldots \quad [\mathbf{48}]$$

Nei matrimoni in cui nell' n^{esimo} anno muore moglie e marito, uno de' coniugi può morir prima dell'altro: ma un solo di questi due casi (quello per cui il marito muore prima della moglie) ci lascia delle vedove. Siccome però ambedue sono egualmente probabili, si può supporre che per una metà di questi casi l'uomo muoia prima della donna: quindi il numero delle donne che nell' n^{esimo} anno diventano vedove e nello stesso anno muoiono ammonterebbe a:

$$\frac{1}{2}\,\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\ (l_{m_1+n-1} - l_{m_1+n}) \ldots \quad [\mathbf{49}]$$

Sommando le due formole [47] e [49], si ottiene il numero totale delle donne che rimangono vedove nell' n^{esimo} anno, sia che nello stesso anno muoiano, sia che sopravvivano:

$$\frac{1}{2}\,\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\ (l_{m_1+n-1} + l_{m_1+n}) \ldots \quad [\mathbf{50}]$$

Le vedove che muoiono nello stesso n^{esimo} anno, in cui perdono il marito, godranno una parte sola della pensione, che potrà essere la minore (ossia niente) se la loro morte avviene contemporaneamente a quella del marito, o la maggiore, (ossia W_n), se il marito muore al principio e la moglie alla fine dell'anno. Quindi il valore di questa parte di pensione può assumere tutti i valori possibili tra 0 e W_n.

Si può mostrare analogamente a quanto fu fatto per le formole [31] e [32], che il medio ammontare di tutti questi possibili valori al principio dell'n^{esimo} anno è di:

$$0{,}32458\ W_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [\mathbf{51}]$$

e questo valore moltiplicato pel numero delle vedove trovato con la formola [49], dà l'ammontare della somma da pagarsi a tutte le vedove degli impiegati morti nell'n^{esimo} anno, e che pur esse muoiono nello stesso anno, ridotto al principio dell'anno in:

$$0{,}16229\ \frac{a_m}{l_m}\ (l_{m+n-1} - l_{m+n})\ (l_{m_1+n-1} - l_{m_1+n})\ W_n. \quad [\mathbf{52}]$$

Quelle vedove che sopravvivono, ricevono nell'n^{esimo} anno una somma $= 0$ se la morte del marito avviene alla fine dell'anno, ed $= W_n$ se essa avviene al principio; di più queste vedove ricevono una rendita vitalizia annuale W_n incominciante alla fine dell'n^{esimo} anno e pagabile in rate mensili posticipate. Ora si può dimostrare secondo le formole [34] e [35] che il valore medio delle competenze di ciascuna di queste vedove nell'n^{esimo} anno (ridotte al principio di detto anno) ammonta a:

$$0{,}48299\ W_n\ ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [\mathbf{53}]$$

risultato questo che moltiplicato pel numero delle vedove in questione, formola [47], dà il valore dei pagamenti da farsi a tutte le mogli d'impiegati, che diventano vedove nell'n^{esimo} anno e che sopravvivono, ridotto al principio dello stesso anno:

$$0{,}48299\ \frac{a_m}{l_m}\ (l_{m+n-1} - l_{m+n})\ l_{m_1+n}\ W_n. \quad .\ .\ .\ [\mathbf{54}]$$

Finalmente poi il valore della rendita vitalizia incominciante alla fine dell'n^{esimo} anno per ciascuna di queste vedove, ammonta secondo la formola [3] alla fine dell'n^{esimo} anno a:

$$(0{,}45026 + R_{m_1+n})\ W_n,$$

e al principio dell'n^{esimo} anno:

$$(0{,}42882 + r\,R_{m_1+n})\ W_n, \quad \ldots\ldots \quad [\mathbf{55}]$$

risultato, che moltiplicato per il numero delle vedove dà il valore di queste rendite vitalizie per tutte le mogli d'impiegati che diventano vedove nell'n^{esimo} anno e durante questo sopravvivono, valore ridotto al principio dell'anno medesimo:

$$\frac{a_m}{l_m}\left(l_{m+n-1}-l_{m+n}\right) l_{m_1+n}\left(0{,}42882+rR_{m_1+n}\right) W_n . \quad \textbf{[56]}$$

Se ora si sommano le tre formole [52], [54] e [56] si ottiene il valore di tutti i pagamenti da farsi alle mogli d'impiegati che diventano vedove nell'n^{esimo} anno, ridotto al principio dell'anno stesso, ossia:

$$\frac{a_m}{l_m}\left(l_{m+n-1}-l_{m+n}\right)\left(0{,}16229\, l_{m_1+n-1}+\right.$$
$$\left.+\,0{,}74952\, l_{m_1+n}+r\, l_{m_1+n} R_{m_1+n}\right) W_n ,$$

oppure anche, essendo:

$$R_{m_1+n}=\frac{l_{m_1+n+1}\, r+l_{m_1+n+2}\, r^2+\cdots}{l_{m_1+n}}=$$
$$=\frac{l_{m_1+n-1}\, R_{m_1+n-1}}{r\, l_{m_1+n}}-1 ,$$

ed $r=\frac{1}{1.05}$,

$$\frac{a_m}{l_m}\left(l_{m+n-1}-l_{m+n}\right)\left(0{,}16229\, l_{m_1+n-1}-\right.$$
$$\left.-\,0{,}20286\, l_{m_1+n}+l_{m_1+n-1} R_{m_1+n-1}\right) W_n , \quad \textbf{[57]}$$

e perciò il valore attuale di tutti i pagamenti alle mogli d'impiegati che diventano vedove nell'n^{esimo} anno ammonta a:

$$\frac{a_m}{l_m}\left(l_{m+n-1}-l_{m+n}\right)\left(0{,}16229\, l_{m_1+n-1}-\right.$$
$$\left.-\,0{,}20286\, l_{m_1+n}+l_{m_1+n-1}\right) W_n r^{n-1} . \; . \; . \; . \quad \textbf{[58]}$$

Da questo, se si fa $n=1, 2, 3$ ecc. e si somma, si può dedurre il valore attuale di tutti i pagamenti a tutte le vedove, che si hanno dagli $a_m\, l_{m_1}$ matrimoni; sarà:

$$\frac{a_m}{l_m}\Big\{[(0{,}16229\, l_{m_1} - 0{,}20286\, l_{m_1+1}) +$$

$$+ l_{m_1} R_{m_1}]\,(l_m - l_{m+1})\, W_1 +$$

$$+ [(0{,}16229\, l_{m_1+1} - 0{,}20286\, l_{m_1+2}) +$$

$$+ l_{m_1+1} R_{m_1+1}]\,(l_{m+1} - l_{m+2})\, r\, W_2 + [(0{,}16229\, l_{m_1+2} -$$

$$- 0{,}20286\, l_{m_1+3}) + l_{m_1+2} R_{m_1+2}]\,(l_{m+2} - l_{m+3})\, r^2\, W_3 +$$

$$+ \cdots + [(0{,}16229\, l_{m_1+n-1} - 0{,}20286\, l_{m_1+n}) +$$

$$+ l_{m_1+n-1} R_{m_1+n-1}]\,(l_{m+n-1} - l_{m+n})\, r^{n-1}\, W_n + \cdots\Big\}. \quad [\mathbf{59}]$$

Questa espressione divisa per il numero dei matrimoni $a_m\, l_{m_1}$, dà finalmente il valore attuale di ciò che spetta a ciascun matrimonio, ossia la pensione stessa della vedova:

$$\mathfrak{B}_{m,\, m_1} = \frac{1}{l_m\, l_{m_1}}\Big\{[(0{,}16229\, l_{m_1} - 0{,}20286\, l_{m_1+1}) +$$

$$+ l_{m_1} R_{m_1}]\,(l_m - l_{m+1})\, W_1 +$$

$$+ [(0{,}16229\, l_{m_1+1} - 0{,}20286\, l_{m_1+2}) +$$

$$+ l_{m_1+1} R_{m_1+1}]\,(l_{m+1} - l_{m+2})\, r\, W_2 + [(0{,}16229\, l_{m_1+2} -$$

$$- 0{,}20286\, l_{m_1+3}) + l_{m_1+2} R_{m_1+2}]\,(l_{m+2} - l_{m+3})\, r^2\, W_3 + \ldots +$$

$$+ [(0{,}16229\, l_{m_1+n-1} - 0{,}20286\, l_{m_1+n}) +$$

$$+ l_{m_1+n-1} R_{m_1+n-1}]\,(l_{m+n-1} - l_{m+n})\, r^{n-1}\, W_n + \cdots\Big\}. \quad [\mathbf{60}]$$

Siccome $(0{,}16229\, l_{m_1+n-1} - 0{,}20286\, l_{m_1+n})$ in confronto di $l_{m_1+n-1}\; R_{m_1+n-1}$ è sempre molto piccolo, si ottiene, tralasciando questa differenza e moltiplicando numeratore e denominatore per r^{m_1}, la seguente formola, che offre un valore sufficientemente approssimato:

$$\mathfrak{B}_{m,m_1} = \frac{1}{l_m l_{m_1} r^{m_1}} \Big\{ (l_m - l_{m+1})\, l_{m_1} R_{m_1} r^{m_1} W_1 +$$

$$+ (l_{m+1} - l_{m+2})\, l_{m_1+1} R_{m_1+1} r^{m_1} W_2 +$$

$$+ (l_{m+2} - l_{m+3})\, l_{m_1+2} R_{m_1+2} r^{m_1+2} W_3 +$$

$$+ (l_{m+n-1} - l_{m+n})\, l_{m_1+n-1} R_{m_1+n-1} r^{m_1+n-1} W_n + \cdots \Big\}; \quad [\mathbf{60}a]$$

formola che può ottenersi anche direttamente, quando si supponga che tutte quelle che divengono vedove nell'n^{esimo} anno, ricevano una pensione annua W_n, il cui primo pagamento succeda alla fine dell'n^{esimo} anno.

§ 8.

c) Sussidio alle vedove.

Secondo la maggior parte degli statuti, quelle vedove che non hanno diritto alla pensione, perchè il marito non aveva ancora raggiunto l'età e gli anni di servizio necessari per ottenerla, ricevono un sussidio che è dipendente o solo dall'ultimo stipendio del marito od ancora oltre a ciò dal tempo più o meno lungo durante il quale questi appartenne alla Cassa.

Sia:

φ il numero per cui dev'essere moltiplicato l'ultimo stipendio per ottenere il sussidio, tanto se questo dipende dal numero d'anni durante i quali il marito appartenne alla società, quanto se si fa astrazione da questa condizione;

ψ il numero, pel quale dev'essere moltiplicato l'ultimo stipendio per ottenere l'aumento del sussidio per ogni anno in cui il marito fu socio dell'Istituto pensioni;

U_n il sussidio che la vedova riceve, se il marito di lei muore nell'n^{esimo} anno;

$\mathfrak{C}_{m,m_1}$ il valore attuale del sussidio della donna di m_1 anni vedova di un impiegato di un'età m.

Secondo la formola [19], si avrà allora:

$$U_n = [\varphi - (d + n - 1)\psi]\,(T + \frac{2n-1}{2}v), \quad .\ .\ [\mathbf{61}]$$

la quale espressione vale solo nel caso di $d + n \leqq g$, avendo dopo il marito diritto a pensione: sicchè

per $d + n > g$ si dovrà mettere $U_n = 0$.

Se $\psi = 0$, ossia se il sussidio è indipendente dal numero d'anni di compartecipazione alla società, si ha

$$U_n = \varphi\,(T + \frac{2n-1}{2}v).$$

Per ottenere l'ammontare totale dei sussidi da pagarsi nell'n^{esimo} anno agli $a_m\,l_{m_1}$ matrimoni, bisogna moltiplicare U_n pel numero delle vedove, che restano tali nell'n^{esimo} anno: sicchè si ha, secondo la formola [50], che questo totale ammonta a:

$$\frac{1}{2}\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\,(l_{m_1+n-1} + l_{m_1+n})\,U_n\,. \quad [\mathbf{62}]$$

Conseguentemente il valore attuale dei sussidi da pagarsi nell'n^{esimo} anno ammonta a:

$$\frac{1}{2}\frac{a_m}{l_m}(l_{m+n-1} - l_{m+n})\,(l_{m_1+n-1} + l_{m_1+n})\,U_n\,r^{n-1}. \quad [\mathbf{63}]$$

Se vi si fa $n = 1, 2, 3$ ecc. e si somma, si ottiene il valore attuale dei sussidi di tutte le vedove derivanti dagli $a_m\,l_{m_1}$ matrimoni in tutti gli anni:

$$\frac{1}{2}\frac{a_m}{l_m}[(l_m - l_{m+1})\,(l_{m_1} + l_{m_1+1})\,U_1 +$$

$$+ (l_{m+1} - l_{m+2})\,(l_{m_1+1} + l_{m_1+2})\,r\,U_2 +$$

$$+ (l_{m+2} - l_{m+3})\,(l_{m_1+2} + l_{m_1+3})\,r^2\,U_3 + \cdots]. \quad [\mathbf{64}]$$

Se finalmente si divide questa espressione per $a_m\,l_{m_1}$, e se si moltiplica numeratore e denominatore per r^{m_1}, si ottiene il valore attuale del sussidio-vedove che spetta a ciascun matrimonio:

$$\mathfrak{E}_{m,m_1} = \frac{1}{2 l_m l_{m_1} r^{m_1}} [(l_m - l_{m+1})(l_{m_1} + l_{m_1+1}) r^{m_1} U_1 +$$

$$+ (l_{m+1} - l_{m+2})(l_{m_1+1} + l_{m_1+2}) r^{m_1+1} U_2 +$$

$$+ (l_{m+2} - l_{m+3})(l_{m_1+2} + l_{m_1+3}) r^{m_1+2} U_3 + \cdots]. \quad [\mathbf{65}]$$

§ 9.

Pensioni e sussidi alle vedove per le future mogli di impiegati celibi.

Il calcolo esatto dei valori attuali delle pensioni e dei sussidi alle vedove, che riceveranno le future mogli di impiegati ancora celibi, non è possibile se prima non è noto, se e quali dei soci si mariteranno, dopo qual tempo lo faranno, e che età avrà al tempo del matrimonio la futura moglie.

Però se la Cassa-Pensioni di cui si deve fare il bilancio esiste già da lungo tempo, si può fondandosi su dati provati dall'esperienza, arrivare ad un calcolo molto approssimativo. Se però il numero dei soci non è molto grande, e l'esistenza della Cassa non data da lungo tempo, bisogna evitare di discendere a molti dettagli perchè i dati procurati dall'esperienza sono insufficienti a dare valori medi approssimativi.

Se si divide il numero dei soci che negli anni antecedenti si sono ammogliati, mentre appartenevano all'istituto, per la somma dei soci celibi esistenti durante gli stessi anni, il quoziente dà la probabilità che ha un socio celibe di ammogliarsi in un anno, fatta astrazione dall'età del socio.

Il calcolo di tale probabilità per ciascuna classe d'età, darà solo utili risultati quando si abbiano a disposizione le esperienze di molti anni di una Cassa-Pensioni che conti moltissimi soci.

Nelle Casse-Pensioni ferroviarie, che esistono solo da poco tempo il voler scendere ad una tale analisi, sarebbe piuttosto di nocumento che d'utilità, e si può, pel calcolo del valore delle pensioni alle vedove, accettare l'ipotesi di un'uguale probabilità media di matrimonio se gli statuti contengono la condizione che le vedove di soci che si sposano solo dopo una certa età (di solito il 50*esimo* anno) non hanno diritto alla pensione, estendendosi in questo caso la media solo agli anni medii di età.

Se ora la probabilità che un socio celibe ha di ammogliarsi entro un anno è h; sarà la probabilità che un socio ha di non ammogliarsi entro un anno $= 1 - h$.

Conseguentemente la probabilità ch'egli ha di non ammogliarsi

in 2 anni sarà $(1-h)^2$,

in 3 id. id. $(1-h)^3$,

. . . .

in n id. id. $(1-h)^n$.

Di qui ne viene che la probabilità di un socio d'ammogliarsi

in 1 anno è h.

in 2 anni è $1-(1-h)^2$,

in 3 id. $1-(1-h)^3$,

. . . .

in n id. $1-(1-h)^n$.

Sicchè si può fare una tabella che dia la probabilità che ha di ammogliarsi un socio celibe per ogni numero d'anni decorsi.

Riguardo all'età della donna, al tempo in cui essa sposerà uno degli associati, gioverebbe adottare l'ipotesi che la differenza fra l'età della moglie e quella del socio marito, sia ugualo alla media delle differenze d'età fra i soci già ammogliati e le relative mogli. Se i soci già ammogliati hanno in media f anni più delle loro mogli, per ottenere formole approssimativamente esatte pel valore della contribuzione al fondo di un socio celibe, avuto riguardo alla pensione-vedove ed al sussidio, si devono solo moltiplicare i singoli membri delle formole [60a] e [65] per le rispettive probabilità di matrimonio, ponendo invece di l_{m_1}, l_{m_1+1} ecc. l_{m-f}, l_{m-f+1} ecc.

Sia quindi il valore della contribuzione al fondo per un socio celibe di m anni, avuto riguardo alla pensione-vedove. . . . $\mathfrak{B}'_{m,m_1}$

e avuto riguardo al sussidio-vedove . . . . $\mathfrak{C}'_{m,m_1}$

Si avrà:

$$\mathfrak{B}'_{m,m_1}=$$

$$=\frac{1}{l_m l_{m-f} r^{m-f}}\Big\{ h(l_{m+1}-l_{m+2})\, l_{m-f+1}\, R_{m-f+1}\, r^{m-f+1}\, W_2+$$

$$+[1-(1-h)^2]\,(l_{m+2}-l_{m+3})\, l_{m-f+2} R_{m-f+2}\, r^{m-f+2}\, W_3+$$

$$+[1-(1-h)^3]\times$$

$$(l_{m+3}-l_{m+4})\, l_{m-f+3} R_{m-f+3}\, r^{m-f+3}\, W+\cdots\Big\}. \quad [\mathbf{66}]$$

$$\mathfrak{C}'_{m,m_1}=$$

$$=\frac{1}{2l_m l_{m-f} r^{m-f}}\Big\{ h(l_{m+1}-l_{m+2})\,(l_{m-f+1}+l_{m-f+2})$$

$$r^{m-f+2}\, U_2+$$

$$+[1-(1-h)^2](l_{m+2}-l_{m+3})\,(l_{m-f+2}+l_{m-f+3})\, r^{m-f+2}\, U_3+$$

$$+[1-(1-h)^3]\times$$

$$(l_{m+3}-l_{m+4})\,(l_{m-f+3}+l_{m-f+4})\, r^{m-f+3}\, U_4+\cdots\Big\}. \quad [\mathbf{67}]$$

Se gli statuti-pensioni contengono la condizione che le mogli di quei soci che si sposano in un'età maggiore di $w=m+n$, non hanno alcun diritto a pensione o a sussidio, il fattore della probabilità di matrimonio dei rispettivi termini

$$[1-(1-h)^n]\times$$

$$(l_{m+n}-l_{m+n-1})\, l_{m-f+n}\, R_{m-f+n}\, r^{m-f+n}\, W_{n+1},$$

$$[1-(1-h)^n]$$

$$(l_{m+n}-l_{m+n-1})(l_{m-f+n}+l_{m-f+n+1})r^{m-f+n+1}U_{n+1},$$

delle formole [66] e [67] resta costante ed uguale a $[1-(1-h)^n]$.

Ma se $m \overline{\overline{>}} w$, ossia se l'impiegato celibe ha già raggiunto od oltrepassato cotesto termine massimo, allora $\mathfrak{B}'_{m, m_1}$ e $\mathfrak{E}'_{m, m_1}$ diventano $=0$, nulla ricevendo in questo caso la moglie.

Nota della Direzione. — L'autore non considera la 4^a categoria di oneri indicata nel paragrafo 5, capitolo II, cioè quella delle pensioni o dei sussidi agli orfani. La trattazione in formole ne sarebbe molto complicata e non avrebbe che poca utilità, sia per la mancanza di dati statistici i quali permettano di applicarle, sia per l'importo tenue di questa categoria d'oneri relativamente a quelli delle altre categorie di pensioni.

L'autore in un terzo capitolo, che egli intitola *formazione del bilancio*, fa un'estesa applicazione delle formole da lui presentate sui dati offerti dalle varie società ferroviarie austriache.

Non abbiamo creduto opportuno farne la traduzione uscendo dal campo della teoria, e rimandiamo all'opera stessa chi bramasse approfondire lo studio di quest'argomento.

Col suo lavoro l'autore presenta anche varie tavole.

La prima contiene i valori di l_m, l_{m_1}, cioè il numero dei viventi maschi e femmine secondo le tavole di Brune corrette da Fischer, e di a_m, cioè il numero degli abili al lavoro dietro le probabilità d'invalidità date dal dottor Heym e la tavola di mortalità di Brune.

La tavola seconda dà il valore attuale della rendita vitalizia di una lira per varie età di un individuo maschio.

La tavola terza offre il valore attuale della rendita vitalizia di una lira per le varie età di una donna.

La tavola quarta dà il valore attuale del contributo annuale di una lira, che deve pagare un individuo secondo l'età, finchè egli continua ad essere abile al lavoro ed inoltre il valore attuale del complesso di tutti questi contributi.

La tavola quinta dà il valore attuale del complesso dei pagamenti da farsi ad un individuo, dall'età alla quale diventa invalido, per una rendita vitalizia di una lira.

La tavola sesta è divisa in varie parti, secondo le varie differenze di età che possono sussistere fra marito e moglie e dà per ogni caso il valore attuale del complesso dei pagamenti da farsi ad una vedova che gode della pensione di una lira.

La tavola settima è divisa pure secondo le varie differenze di età fra marito e moglie e dà il valore attuale del sussidio di una lira da assegnarsi ad una vedova.

La tavola ottava finalmente dà l'estratto delle disposizioni degli statuti delle Casse-pensioni delle società ferroviarie austriache che influiscono sui calcoli del bilancio.

LE BASI TECNICHE DELLA CASSA-PENSIONI

PER GLI IMPIEGATI DELLE SOCIETÀ D'ASSICURAZIONE IN VIENNA

PER

ROBERTO PENL. (1)

La Cassa-pensioni per gli impiegati delle Società d'assicurazione in Vienna ha un sistema di tariffe fondato sul sistema di depositi liberi ed indipendenti. Differisce però dalle consimili fondate in Italia, ad esempio dalle Casse-pensioni di Bologna, in quanto che il sistema da essa adottato presuppone la conoscenza dei quozienti di mortalità e di invalidità; ciò che permette di conoscere *a priori* la pensione corrispondente ad ogni deposito. L'esposizione delle basi tecniche fatta dal signor Penl offre d'altronde un utile esempio di applicazioni delle formole del Kaan, ed è corredata di tavole calcolate coi metodi più rigorosi.

*
* *

Lo scopo di una Cassa-pensioni è triplice. Essa deve provvedere al pagamento di pensioni o di sussidi:

1° All'impiegato invalido;

2° Alla vedova dopo la morte dell'impiegato;

3° Ai figli dopo la morte della vedova.

(1) *Die technischen Grundlagen des Pensions-Institutes für Assecuranz-Beamte* (Memoria pubblicata nella *Rundschau der Versicherungen*), *herausgegeben von* Dr H. Oesterley. Leipzig 1872.

Per raggiungere questo terzo scopo, oltre alle difficoltà tecniche che s'incontrano nello stato attuale della scienza delle assicurazioni sulla vita, non si ha una base razionale, perchè manca ogni fondamento statistico riguardo ai fattori necessarii per stabilire i computi, cioè, il numero dei figli da aspettarsi in ciascun matrimonio, stabilita pei coniugi una certa età, ed il tempo in cui questi nasceranno.

Perciò al momento della fondazione della Cassa-pensioni per gli impiegati delle società d'assicurazione non potevano venir adottati nel programma della Cassa stessa che provvedimenti per gli impiegati invalidi e per le loro vedove.

Nello stabilire le condizioni della pensione e nel fissare le tariffe ci siamo attenuti alle norme pubblicate dal signor Giulio Kaan, ispettore dell'I. R. privilegiata ferrovia dello Stato e consulente matematico della Società degli impiegati, ecc., pubblicate nella sua opera: « *Zur reform und Begründung der Invaliden und Witwen-Pensionscassen* » (1), e ciò in conformità delle decisioni dell'adunanza degli impiegati delle società d'assicurazione, convocata dal Comitato dei fondatori il 9 novembre 1870 (2).

Secondo queste norme ciascuna contribuzione dei consociati alla Cassa viene considerata e calcolata come deposito indipendente: sopraggiunta l'invalidità oppure il caso di morte del consociato, l'ammontare della pensione vitalizia dell'invalido o della vedova è formato dalla somma di tutte le quote di pensione acquistate mediante i fatti depositi. Questa disposizione rimuove prima di tutto due considerevoli svantaggi delle altre Casse-pensioni.

In primo luogo vi è in questo modo la possibilità, stabilito prima un dato minimo numero di consociati, di dar vita ad una Cassa-pensioni senza capitale di fondazione; poichè un aumento notevole nei casi di morte o d'invalidità non può produrre un'importante riduzione nelle promesse di pensione ai soci attivi sopravviventi.

Assicurando invece in anticipazione una determinata pensione

(1) Vienna, presso CARLO CZERMAK.

(2) La sezione Assicurazioni-Invalidi, dell'Unione degli Impiegati (di Vienna) è anche regolata secondo le norme date da KAAN; le tariffe della *Franz-Joseph-Stiftung* — (*Società mutua per soccorsi agli ufficiali invalidi, loro vedove e loro orfani*) sono anche calcolate secondo le norme citate.

per date contribuzioni annue, non sarebbe offerta nessuna garanzia pel pagamento delle cospicue somme scadenti, nel caso di una quantità anormale di invalidi e di morti nei primi anni, se non si fosse stabilito per tal caso un capitale di fondazione: potrebbero quindi benissimo le contribuzioni annue dei membri non solo essere assorbite, ma essere insufficienti a coprire le pensioni scadenti nei primi anni.

In secondo luogo l'applicazione delle norme sopracitate toglie l'incomodo di determinati pagamenti a date fisse, lasciando invece al socio la facoltà di regolare la quota da pagarsi secondo le sue particolari circostanze finanziarie, e di cessarne il pagamento senza perdita delle già acquistate promesse di pensione.

Per l'assicurazione-invalidi fu adottato il sistema di liquidare la pensione sia per invalidità constatata sia per un'età determinata non maggiore di 65 anni.

Le tabelle, dal signor Giulio Kaan aggiunte alla sua opera suddetta, che furono adoperate per stabilire le tariffe di questa Cassa-pensioni, contengono:

I singoli premi-netti, per l'assicurazione di una pensione per l'invalido, pagabile mensilmente e posticipatamente dal sopraggiungere dell'invalidità fino alla morte;

I singoli premi-netti, per l'assicurazione di una pensione vitalizia alla vedova, pagabile a questa mensilmente e posticipatamente dalla morte dell'invalido.

Per il calcolo di questi premi si può ricorrere all'opera dello stesso autore intitolata « *Die mathematische Rechnungen bei Pensions-Instituten*, ecc., Wien, 1864 (1).

I premi proposti, per le pensioni-invalidi, sono calcolati al 5 per cento in base alle tavole di mortalità poste in questo lavoro. (Vedi la tavola I).

Com'è noto non esiste ancora nessuna tabella d'invalidità servibile, fondata sull'esperienza (2); comunemente viene perciò adope-

(1) Vedasi la traduzione dei capitoli principali di quest'opera in questo stesso volume. *N. d. D.*

(2) La Germania possiede ora varie tavole d'invalidità, citiamo, ad esempio, quella del Behm per gli impiegati delle Società ferroviarie tedesche. *N. d. D.*

rata pel calcolo delle probabilità d'invalidità l'ipotesi di Heym (1). Se questa ipotesi possa usarsi esattamente, se essa possa già venir chiamata una legge, ce l'hanno insegnato gli studi del dottore Wiegand, sui rapporti d'invalidità degli impiegati ferroviari (2).

La formola del signor G. Kaan, secondo la quale furono calcolate le tabelle di pensioni per invalidi, è

$$\mathfrak{A}_m = \frac{\Sigma \left\{ \left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} \right) l_m \, R_m \, r^m \right\}}{a_m \, r^m}$$

in cui (3)

$\mathfrak{A}_m$ è il premio unico netto;

a_m il numero dei membri attivi viventi, per l'età m secondo le tavole d'invalidità;

l_m il numero dei viventi, per l'età m secondo la tavola di mortalità;

R_m la rendita vitalizia pagabile annualmente;

r^m lo sconto.

I valori di questa formola per le differenti età si trovano riuniti nella tavola II (2ª colonna).

Si trattava ora, per il calcolo della tariffa per la pensione agli invalidi pagabile al più tardi ad una determinata età (tavola 1ª e 2ª dello statuto), di stabilire il valore attuale di una rendita-invalidi, pagabile mensilmente e posticipatamente, che incominci al soprav-

(1) Vedi: Dr Karl Heym, *die Kranken-und Invaliden Versicherung*, Leipzig, 1863. — Dr Wiegand, *Versicherung gegen Erwerbuns fähigkeit*, Halle, 1865. — Sim. Spitzer, *Uber invalidenpensionen* (Jahres bericht der Wiener Handelsakademie, v. j. 1864.

(2) Nell'anno 1868, secondo osservazioni del dottore Wiegand su 62,853 persone si calcolarono secondo l'ipotesi di Heym 365 casi di invalidità probabili. In realtà il numero degl'invalidi ascese a 366. — Nell'anno 1869, 73,342 persone secondo le leggi di Heym dovevano dare 446 casi d'invalidità probabili. E anche allora Wiegand constatò l'esattezza della detta legge, essendo il numero reale d'invalidi in quell'anno, 445.

(3) Si ha anche in una forma usuale di scrittura

$$\mathfrak{A}_x = \frac{\Sigma \left\{ \left(\frac{a_x}{\lambda_x} - \frac{a_{x+1}}{\lambda_{x+1}} \right) \Sigma \, D_{x+1} \right\}}{a \, \rho^x}.$$

venire dell'invalidità al lavoro, al più tardi però al s^{esimo} anno di vita (valore che noi chiameremo $\mathfrak{A}_m^s$.)

Questo valore fu ottenuto nel modo seguente:

Supposto che nel medesimo tempo, a_m persone di una stessa età m formino un' assicurazione di questa specie, i doveri dell' Istituto verso tutti questi a_m assicurati sono formati dal valore attuale di tutte le rendite pagabili ai soci divenenti invalidi nel $(m+1)$, $(m+2)$, ..., $(s-1)$ ed s^{esimo} loro anno di vita fino alla loro morte, più il valore attuale di tutti i pagamenti di rendita da farsi alla fine dell's^{esimo} anno ai viventi a_s soci attivi.

Il primo valore (pagamenti ai divenuti invalidi) è formato dalla differenza tra il valore attuale dei pagamenti di rendita ai divenuti invalidi nell' $(m+1)$, $(m+2)$,.., $(s-1)$, s, $(s+1)$,... 78, 79^{esimo} loro anno di vita [1] ed il valore attuale dei pagamenti di rendita ai divenuti invalidi nel loro $(s+1)$, $(s+2)$, ..., 78, 79^{esimo} anno di vita: è perciò eguale a:

$$[I]\ \frac{1}{r^m}\Sigma\left\{\left(\frac{a_m}{l_m}-\frac{a_{m+1}}{l_{m+1}}\right)l_m\,R_m\,r^m\right\}-\frac{1}{r^m}\Sigma\left\{\left(\frac{a_s}{l_s}-\frac{a_{s+1}}{l_{s+1}}\right)l_s\,R_s\,r^s\right\}.$$

L'ultimo valore (pagamento agli a_s soci) è un pagamento da farsi dopo $(s-m)$ anni: $a_s\,R_{\left(s\times\frac{12}{12}\right)}$, espresso perciò da

$$[II]\qquad \frac{1}{r^m}\,R_{\left(s\times\frac{12}{12}\right)}\,a_s\,r^s=\frac{1}{r^m}\left(R_s+0{,}45026\right)a_s\,r^s\,.$$

Paragonando il valore degli intieri pagamenti degli a_m Soci, ossia

$$[III]\qquad a_m\,\mathfrak{A}_m^s$$

alla somma delle espressioni [I] e [II] si ha

[1] All' 80^{esimo} anno di vita, secondo le tavole d'invalidità, tutte le persone sono da considerarsi come incapaci al lavoro.

$$[IV] \qquad \mathfrak{A}_m^s = \frac{\Sigma \left\{ \left(\frac{a_m}{l_m} - \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} \right) l_m R_m 1^m \right\}}{a_m r^m} +$$

$$+ \frac{R_{\left(s \times \frac{12}{12} \right)} a_s r^s - \Sigma \left\{ \left(\frac{a_s}{l_s} - \frac{a_{s+1}}{l_{s+1}} \right) l_s R_s r^s \right\}}{a_m r^m} =$$

$$= \mathfrak{A}_m + \frac{(R_s + 0{,}45026)\, a_s r^s - \Sigma \left\{ \left(\frac{a_s}{l_s} - \frac{a_{s+1}}{l_{s+1}} \right) l_s R_s r^s \right\}}{a_m r^m} .$$

Facciamo $s = 65$, come nelle tavole 1ª e 2ª dello statuto dell'Istituto-pensioni per gli impiegati d'assicurazione; avremo allora

$$[V] \qquad \mathfrak{A}_m^{65} = \mathfrak{A}_m + \frac{4937}{a_m r^m} .$$

Secondo questa formola fu calcolata la 4ª colonna, della tavola II.

Per render possibile il paragone e far vedere come crescono rapidamente i premi quando si fosse stabilito che la pensione potesse incominciare ad essere pagata ad età inferiori a 65 anni, ho aggiunto nella colonna 6ª anche il valore di

$$[VI] \qquad \mathfrak{A}_m^{60} = \mathfrak{A}_m + \frac{14603}{a_m r^m}$$

Nelle tavole de' premi effettivamente adottate per l'Istituto-pensioni e riguardanti le pensioni invalidi, fu però fatta ai valori dati dalle formole, un aumento del 10 per cento per compensare le deviazioni eventuali dalla legge d'invalidità di Heym.

Questo aumento non costituisce in realtà una elevazione di premi, essendo stabilito secondo la costituzione dell' Istituto (§ 22 dello statuto) che tutti gli avanzi constatati vengano di nuovo ripartiti nelle quote pensioni e scritti a conto dei soci.

Le colonne 3ª, 5ª e 7ª della tavola II indicano i premi di tariffa pei tre predetti casi d'assicurazione per invalidi.

Tavola di mortalità di Brune-Fischer e di invalidità di Kaan per uomini.

Tavola I.

Età m	Viventi l_m	Attivi a_m	Età m	Viventi l_m	Attivi a_m
25.	100,000	100,000	60. . . .	59,384	49,211
26.	99,380	99,275	61. . . .	57,264	45,961
27.	98,744	98,530	62. . . .	55,059	42,530
28.	98,082	97,765	63. . . .	52,769	38,921
29.	97,396	96,977	64. . . .	50,394	35,152
30.	96,685	96,167	65. . . .	47,940	31,256
31.	95,950	95,332	66. . . .	45,413	27,307
32.	95,192	94,472	67. . . .	42,820	23,349
33.	94,411	93,586	68. . . .	40,170	19,455
34.	93,609	92,674	69. . . .	37,474	15,717
35.	92,776	91,733	70. . . .	34,750	12,230
36.	91,913	90,762	71. . . .	32,015	9,092
37.	91,021	89,759	72. . . .	29,291	6,390
38. . . .	90,102	88,722	73. . . .	26,599	4,187
39.	89,156	87,649	74. . . .	23,963	2,510
40.	88,175	86,538	75. . . .	21,406	1,338
41.	87,161	85,387	76. . . .	18,951	607
42.	86,115	84,194	77. . . .	16,616	218
43.	85,039	82,957	78. . . .	14,419	50
44.	83,925	81,674	79. . . .	12,376	1
45.	82,775	80,311	80. . . .	10,499	0
46.	81,591	78,956	81. . . .	8,795	. . . .
47.	80,368	77,513	89. . . .	7,269	. . . .
48.	79,106	76,004	83. . . .	5,921	. . . .
49.	77,811	74,423	84. . . .	4,748	. . . .
50.	76,447	72,760	85. . . .	3,743	. . . .
51.	75,040	71,004	86. . . .	2,846	. . . .
52.	73,577	69,145	87. . . .	2,078	. . . .
53.	72,054	67,171	88. . . .	1,425	. . . .
54.	70,462	65,070	89. . . .	897	. . . .
55.	68,799	62,828	90. . . .	515	. . . .
56.	67,065	60,435	91. . . .	268	. . . .
57.	65,261	57,885	92. . . .	122	. . . .
58.	63,381	55,159	93. . . .	. . . .	. . . .
59.	61,423	52,279	94. . . .	. . . .	. . . .

Premio unico per la pensione d'invalidità di una lira annua.

Tavola II.

ETÀ	La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente invalidità al lavoro		La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente incapacità al lavoro al più tardi però al 65° anno di età		La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente invalidità al più tardi però al 60° anno di età	
m	Premio netto $\mathfrak{A}_m$	Premio secondo la tariffa (Tabella II*b* dello statuto)	Premio netto $\mathfrak{A}^{65}_m$	Premio secondo la tariffa (Tavola II*a* dello statuto)	Premio netto $\mathfrak{A}^{60}_m$	Premio secondo la tariffa
1	2	3	4	5	6	7
25. . . .	0.733	0.806	0.900	0.900	1.227	1.350
26. . . .	758	831	935	1.028	281	409
27. . . .	785	863	972	069	338	472
28. . . .	813	894	1.011	112	399	519
29. . . .	844	928	054	159	464	631
30. . . .	876	964	098	208	532	686
31. . . .	911	1.001	146	260	606	766
32. . . .	947	042	196	316	684	852
33. . . .	986	085	250	375	767	943
34. . . .	1.027	130	307	438	855	2.041
35. . . .	1.071	178	368	505	949	144
36. . . .	117	229	432	575	2.049	254
37. . . .	166	283	501	651	156	371
38. . . .	218	340	574	731	269	496
39. . . .	273	400	651	816	390	629
40. . . .	330	463	732	905	518	770
41. . . .	391	530	819	2.000	655	921
42. . . .	455	600	910	101	801	3.081
43. . . .	522	674	2.007	208	957	252
44. . . .	593	752	111	322	3.123	436
45. . . .	667	833	219	411	300	630
46. . . .	742	916	332	965	487	835
47. . . .	821	2.003	452	697	687	4.056
48. . . .	903	093	579	837	901	292
49. . . .	988	187	713	984	4.131	541
50. . . .	2.075	282	853	3.138	377	814

PREMIO UNICO PER LA PENSIONE D'INVALIDITÀ DI UNA LIRA ANNUA.

Segue *Tavola II.*

ETÀ	La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente invalidità al lavoro		La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente incapacità al lavoro al più tardi però al 65° anno di età		La pensione-invalidi incomincia a sopravveniente invalidità al più tardi però al 60° anno di età	
m	Premio netto $\mathfrak{A}_m$	Premio secondo la tariffa (Tabella II*b* dello statuto)	Premio netto $\mathfrak{A}_m^{65}$	Premio secondo la tariffa (Tavola II*a* dello statuto)	Premio netto $\mathfrak{A}_m^{60}$	Premio secondo la tariffa
1	2	3	4	5	6	7
51. . . .	165	381	3.002	302	641	5.105
52. . . .	2.256	2.482	3.158	3.371	4.926	5.418
53. . . .	349	584	321	657	5.235	758
54. . . .	443	687	501	851	572	6.129
55. . . .	532	785	680	4.018	926	519
56. . . .	633	896	889	278	.....	.....
57. . . .	728	3.001	4.104	515	.....	.....
58. . . .	822	101	338	772	.....	.....
59. . . .	914	205	591	5.053	.....	.....
60. . . .	3.003	303	877	364	.....	.....
61. . . .	088	396	.....	.....	.....	.....
62. . . .	168	485	.....	.....	.....	.....
63. . . .	246	571	.....	.....	.....	.....
64. . . .	316	648	.....	.....	.....	.....
65. . . .	382	720	.....	.....	.....	.....
66. . . .	443	787	.....	.....	.....	.....
67. . . .	483	831	.....	.....	.....	.....
68. . . .	536	888	.....	.....	.....	.....
69. . . .	566	923	.....	.....	.....	.....
70. . . .	596	953	.....	.....	.....	.....

DI UN METODO

PER CALCOLARE LA MORTALITÀ DI UNA POPOLAZIONE

DI CUI SIANO NOTI IL NUMERO DEGLI ABITANTI CLASSIFICATI PER ETÀ, QUELLO DELLE MORTI E I MOVIMENTI DI EMIGRAZIONE.

Il problema della mortalità, quando si voglia tener conto della emigrazione, si fa così complesso, che non se ne hanno ancora soluzioni semplici e sicure.

Il Dr G. Körösi, direttore dell'ufficio di statistica municipale di Budapest, pubblicava nel 1874 uno studio su tale questione (1). Il Dr Dienger professore nel politecnico di Karlsruhe, in una memoria uscita pochi mesi dopo nella *Rivista delle assicurazioni* che si pubblica in Lipsia dal Dr Oesterley, poneva le basi di una soluzione rigorosa del problema.

Poichè in Italia si hanno da alcuni anni notizie regolari e continue sulla emigrazione, diviene possibile l'applicazione dei metodi di calcolo della mortalità, colle notizie dei nati, dei morti e degli emigrati. Il problema è quindi di attualità, ed è specialmente a questo titolo che stimiamo utile di presentarne qui la trattazione fattane dal Dr Dienger.

(1) *Welche Grundlagen hat die Statistik zu beschaffen, um wichtige Mortalitäts-tabellen zu gewinnen* — von J. Körösi, Berlin, 1874. — Verlag des Kön. stat. Bureau's.

Calcolo delle tavole di mortalità in base ad osservazioni individuali [1].

PEL Dr *J. Dienger* [2].

I. La Commissione permanente del Congresso internazionale statistico aveva dato incarico al direttore della statistica dell'Impero germanico signor Becker, ed al signor Körösi, direttore dell'ufficio di statistica di Budapest, di presentare due memorie preparatorie sopra la questione: « Quali dati debba fornire la statistica perchè se ne possano dedurre buone tavole di mortalità. » Le due memorie furono pubblicate negli Atti della Commissione suddetta, riunitasi a Stocolma nel 1874.

I due autori hanno cercato, ciascuno dal proprio punto di vista, di sciogliere questa questione tanto importante anche per le assicurazioni sulla vita.

Non è mia intenzione di fare qui una relazione od una critica dell'uno o dell'altro di questi scritti; mi limiterò solamente a fare qualche cenno del secondo per correggere una proposta che esso contiene.

In ambidue gli scritti si tratta essenzialmente di utilizzare i censimenti della popolazione, per dedurre i rapporti di mortalità di intere popolazioni (p. e. di una città, di una provincia, di un paese). A questo riguardo il Körösi ritiene di massima importanza che si abbia da considerare solamente la popolazione *stabile* (*sesshaft*), composta, com'egli dice, di quelle persone che restano almeno tre anni nello stesso luogo. Il procedimento suggerito dal Körösi non si dovrebbe dunque applicare al gruppo delle persone le quali hanno emigrato e sono ritornate in patria nel periodo dell'osservazione.

II. Le proposte di Körösi sono, in sostanza, le seguenti:

(1) L'autore intende per *osservazioni individuali*, quelle fatte sopra schede nominali.

(2) V. la *Rundschau der Versicherungen* di Masius, anno 1874, edita ora dal Dr H. Oesterley a Lipsia.

Nel censimento generale della popolazione dovrebbero essere indicate le singole persone per nome, cognome (per le donne maritate o vedove anche il cognome del padre), sesso, anno e luogo di nascita, professione, religione e durata della dimora nel luogo. Si dovrebbe inoltre domandare il giorno della nascita, come richiedono le società d'assicurazione ai loro inscritti. All'ufficio di statistica si darebbe avviso di ogni caso di morte che avvenisse fino al prossimo censimento, come pure sarebbero date notizie precise a fine di riconoscere l'identità della persona e si indicherebbe il giorno della morte.

Per ciascuna delle persone registrate nel primo censimento (si potrebbe anche tener calcolo degli assenti momentaneamente) si farebbe una scheda contenente le suddette qualifiche della persona. Fino al prossimo censimento si registrerebbe nella relativa scheda ciascun caso di morte annunziato. Si terrebbe conto solamente delle morti che avvengono fra le persone iscritte nominativamente nelle liste del primo censimento; si escluderebbero dal calcolo le morti che si verificassero fra i nati o fra gli immigrati dopo il primo censimento.

Al secondo censimento, si agirebbe esattamente come pel primo e si farebbero le relative schede. Quindi si ricercherebbe quante fra le persone comprese nel primo censimento siano presenti anche al secondo; quelle che mancassero all'appello dovrebbero ritenersi come morte od emigrate. Il numero dei morti essendo cognito, si verrebbe a conoscere il numero degli emigrati.

Come si vede *non si tiene qui conto degli immigrati nel periodo che trascorse tra il 1° e il 2° censimento*, ed i nati nell'intervallo devono considerarsi pure come immigrati, e non sono nemmeno calcolati i casi di morte avvenuti tra loro, e le persone che nel *periodo statistico*, emigrarono e ritornarono in patria sono considerate come stabili, non si tiene cioè conto della loro assenza temporanea.

Con queste disposizioni crede il signor Körösi di aver preparato tutto quanto sia necessario alla formazione delle tavole di mortalità.

III. Siano ora presenti al primo censimento A persone coetanee; di queste ne siano morte tra il 1° ed il 2° censimento un numero T, e in quest'ultimo censimento se ne trovino B presenti. Naturalmente gli emigrati sono rappresentati dal numero $A - T - B$.

Körösi in base a queste premesse conchiude che si debba ritenere: *che su $B+T$ persone coetanee ne siano morte nel periodo fra l'uno e l'altro censimento T*; e con ciò naturalmente verrebbe ad esser cognito tutto il resto. A prima vista ciò sembra esatto; ma non è così. E si può convincersi meglio della cosa se si considera un caso estremo; se si fa cioè $B=0$. Ciò significa che delle A persone, al secondo censimento nessuna è presente. Tutte sono morte od emigrate nell'intervallo. Ora se $T=A$ si deduce che non vi fu emigrazione; in caso diverso vi fu emigrazione. Secondo la regola del Körösi in ambedue i casi si dovrebbe dire: se sopra T (uguale o minore di A) sono morte T persone, la probabilità di morte è l'unità. Ciò è vero nel primo caso, quando T sarà uguale ad A; ma per $T<A$, ciò è inesatto.

Scopo del presente scritto è di trovare la probabilità di morte, colla maggiore approssimazione, dai dati così raccolti.

Le disposizioni proposte dal Körösi vengono da me considerate come opportune, e tali che non potrebbero essere migliori nelle condizioni attuali.

IV. L'errore della conclusione a cui giunge il Körösi, indicata al paragrafo precedente, consiste in ciò, che si attribuiscono tutti i morti T alla popolazione stabile, il che è contrario alla realtà. Noi scomporremo quindi il numero A (delle persone coetanee) in due parti, che chiameremo x ed y, delle quali x indica la popolazione stabile, ed y la popolazione fluttuante.

Per meglio intuire la cosa, si può immaginare che delle A persone, y siano destinate alla emigrazione. In realtà però non tutte queste y persone emigreranno, perchè alcune di esse moriranno prima di farlo. Si avrà dunque

$$x+y=A.$$

Delle x persone (quelle di stabile dimora) un numero u morirà prima di un nuovo censimento; delle y invece destinate all'emigrazione ne morirà nello stesso tempo un numero v. Si potrà quindi stabilire con grande probabilità l'equazione

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}.$$

Non si vede alcun motivo che faccia rigettare quest'eguaglianza [1]. I morti (u) della prima parte, sono, in ogni caso, tra i morti constatati T. Non è così per quelli (v) della seconda. Una parte di questi ultimi si trova tra i morti constatati nel paese; l'altra comprende quelli morti all'estero. Il rapporto di queste due parti di v non si può dedurre esattamente dai dati del censimento. Noi dobbiamo quindi supporre che le emigrazioni siano avvenute con moto uniforme nell'intervallo fra i due censimenti, e quindi sia da assumersi fra i T morti anche la metà dei casi di morte avvenuti fra le y persone destinate all'emigrazione. Allora si avrebbe:

$$u + \frac{1}{2} v = T.$$

Come s'è detto, sta in questo assunto l'unico punto debole del presente metodo.

Conseguentemente, delle y persone destinate all'emigrazione, sono realmente emigrate $y - \frac{1}{2} v$. Essendo morte T persone, ne rimasero al momento del 2° censimento:

$$A - T - (y - \frac{1}{2} v)$$

ossia:

$$A - T - y + \frac{1}{2} v.$$

Si avrà quindi:

$$A - T - y + \frac{1}{2} v = B.$$

[1] In generale le y persone destinate all'emigrazione apparterranno alla classe più indigente della popolazione, e quindi saranno soggette, con molta probabilità, ad una maggiore mortalità. Si potrebbe all'equazione proposta dare la forma più generale

$$\frac{u}{x} = \alpha \frac{v}{y}$$

dove α sarebbe un coefficiente minore dell'unità.

N. d. D.

Quest'equazione è evidentemente una giusta deduzione della supposizione fatta.

V. Per la determinazione delle quattro incognite x, y, v, u si hanno le quattro equazioni:

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} v = A - T - B; \quad & u + \frac{1}{2} v = T; \\ x + y = A \quad ; \quad & uy = vx; \end{aligned} \quad \ldots\ldots [1]$$

Dalle tre prime equazioni si ricava:

$$y = A - T - B + \frac{1}{2} v; \quad u = T - \frac{1}{2} v; \quad x = T + B - \frac{1}{2} v; \quad [2]$$

Sostituendo questi valori nella quarta equazione si viene a determinare v:

$$v^2 - 2v(A + B) + 4T(A - T - B) = 0$$

In quest'equazione si vede che $A - T - B$ (come appare pure dal II° paragrafo) non è mai negativo. Risolvendola si ha:

$$v = A + B \pm \sqrt{(A + B)^2 - 4T(A - T - B)};$$

e siccome evidentemente si ha $v < A + B$, così può solo valere il segno negativo. Mettiamo

$$b = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}\sqrt{(A + B)^2 - 4T(A - T - B)}; \quad [3]$$

Allora noi troviamo per le quattro incognite i seguenti valori:

$$v = 2b; \quad y = A - T - B + b; \quad u = T - b; \quad x = T + B - b; \quad [4]$$

Essendo nella [3] la radice quadrata da prendersi solo col suo valore positivo, le equazioni [4] risolvono pienamente il problema dato.

Ciascuna delle due frazioni

$$\frac{u}{x} \text{ oppure } \frac{v}{y}, \quad [5]$$

se in essa si sostituiscono i trovati valori, dà la cercata probabilità di morte.

VI. Per meglio provare l'esattezza dei numeri trovati si osservino i due seguenti casi particolari:

1° Delle A persone nessuna emigrò. Naturalmente allora si ha $B = A - T$, e quindi

$$b = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}\sqrt{(A+B)^2} = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A+B) = 0.$$

e quindi:

$$v = 0;\ y = 0;\ u = T;\ x = T + B.$$

Delle due frazioni [5] la seconda è indefinita, la prima dà:

$$\frac{T}{T+B} = \frac{T}{A},$$

come si vede al paragrafo III°.

2° Delle A persone, nessuna più esiste al secondo censimento. E cioè $B = 0$: ne viene quindi

$$b = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4T(A-T)} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A-2T)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(A - 2T) = T$$

e

$$v = 2T,\ y = A,\ u = 0,\ x = 0.$$

Delle due frazioni [5] la prima è inservibile e la seconda dà:

$$\frac{2T}{A}\ (^1)$$

e quindi il doppio di ciò che s'è ottenuto nel primo caso.

VII. Si vede anche facilmente che il valore delle frazioni [5] starà sempre tra

$$\frac{T}{A} \text{ e } \frac{2T}{A}$$

(1) Vedi nota dell'autore in fine.

N. d. D.

poichè

$$\frac{u}{x}=\frac{T-b}{T+B-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [6]$$

Il valore di B può andare da 0 fino ad $A-T$. Se si differenzia b rispetto a B si ha

$$\frac{db}{dB}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{A+B+2T}{\sqrt{(A+B)^2-4T(A-T-B)}},$$

e siccome $(A+B+2T)^2>(A+B)^2-4T(A-T-B)$, la seconda frazione è maggiore di $\frac{1}{2}$, e quindi il quoziente differenziale continuamente negativo. Conseguentemente b decresce col crescere di B, e diminuisce continuamente da T a 0, se B cresce da 0 fino ad $A-T$.

Consideriamo ora la frazione [6] e differenziamola rispetto a b; noi otteniamo:

$$\frac{d\left(\frac{u}{x}\right)}{db}=\frac{-(T+B-b)+T-b}{(T+B-b)^2}=\frac{-B}{(T+B-b)^2},$$

cioè il quoziente differenziale è negativo e conseguentemente cresce la frazione col continuo diminuire di b. Essa raggiunge quindi i suoi estremi valori per gli estremi valori di b. E siccome questi estremi valori sono T e 0, i dati limiti sono realmente esatti (il primo è il minore, il secondo è il maggiore).

Con questo sarebbe interamente risolto il problema proposto. Io voglio però aggiungere ancora una considerazione che serve a giustificare le supposizioni fatte nel IV° paragrafo.

VIII. Siano N persone della stessa età, delle quali durante l'unità di tempo ne muore uniformemente un certo numero, in modo che si riducano a P. Si deve trovare il *coefficiente di mortalità.*

Per coefficiente di mortalità s'intende un numero a, tale che di K persone della medesima età nel tempo infinitesimo dt, ne muoiano $K a\, dt$.

Sia ora espresso da y il numero delle persone ancor viventi (delle N) al tempo t. In un tempo dt ne moriranno $aydt$, ne restano quindi in vita: $y - aydt$. Ma siccome al tempo $t + dt$ il numero delle persone viventi è pure $y + \frac{dy}{dt}\, dt$ si ha:

$$\frac{dy}{dt} = -ay,\ y = Ce^{-at},$$

in cui C è una costante. E siccome per $t = 0 : y = N$ e per $t = 1 : y = P$, si ha

$$P = Ne^{-a};\ a = -\log.n\left(\frac{P}{N}\right),$$

con che resta risolto il problema. Per approssimazione è:

$$a = -\log.n.\left(\frac{P}{N}\right) = -\log.n.\left\{1 - \left(1 - \frac{P}{N}\right)\right\} = 1 - \frac{P}{N}. \text{ (1)}$$

IX. Sia un numero N di persone coetanee, il cui coefficiente uniforme di mortalità sia a. Di questo numero N, una parte emigra e questa emigrazione sia fatta in modo che in tempi uguali, emigrino uguali quantità di persone. A causa di morti e d'emigrazioni questo numero N di persone sia col tempo ridotto a 0.

Se y conserva lo stesso significato che nel paragrafo precedente si ha (indicando con p il numero d'emigrati nell'unità di tempo):

$$\frac{dy}{dt}\, dt = -aydt - pdt,\ y = Ce^{-at} - \frac{p}{a}.$$

Per $t = 0$, sarà $y = N$; per $t = 1 : y = 0$ quindi:

$$C = N + \frac{p}{a},$$

e

$$0 = \left(N + \frac{p}{a}\right)e^{-a} - \frac{p}{a} \text{ donde } p = \frac{aNe^{-a}}{1 - e^{-a}} = \frac{Na}{e^{a} - 1}.$$

(1) Se si considera un piccolo spazio di tempo - giorno, mese - come unità di tempo, allora si potrebbe ancora usare questa formula approssimativa; invece per unità maggiori si dovrebbe tener conto, secondo la grandezza della medesima, anche della 2^a, $3^a \ldots n^a$ potenza di $1 - \frac{P}{N}$.

N. d. D.

I morti nel tempo dt sono $a y dt$; quindi muoiono in tutto:

$$\int_0^1 a y dt = \left(N + \frac{p}{a}\right)(1 - e^{-a}) - p = N\left(1 - \frac{a}{e^a - 1}\right).$$

Se la popolazione fosse solo soggetta alla mortalità, essa alla fine del tempo 1 si ridurrebbe a Ne^{-a}, e $N(1 - e^{-a})$ sarebbe il numero dei morti.

Il numero $N\left(\frac{a}{e^a - 1}\right)$ esprime dunque quello dei morti *constatati* in paese tra le persone che vi sono rimaste, e

$$N(1 - e^{-a}) = \frac{N(e^a - 1)}{e^a}$$

indica il numero delle persone morte realmente. Il rapporto fra essi è:

$$\left(1 - \frac{a}{e^a - 1}\right)\frac{e^a}{e^a - 1} = \frac{(e^a - a - 1)\, e^a}{(e^a - 1)^2}.$$

Approssimativamente questo valore è:

$$\frac{\left(\frac{a^2}{2} + \ldots\right)(1 + a + \ldots)}{\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots\right)^2} = \frac{a^2}{2}\,\frac{(1 + \ldots)(1 + a \ldots)}{a^2\left(1 + \frac{a}{2} + \ldots\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1 + a + \ldots}{1 + a + \ldots} = \frac{1}{2}.$$

Sta in ciò la giustificazione della supposizione fatta nel IV° paragrafo.

X. Bisogna poi osservare che il procedimento svolto nei paragrafi dal I° al V° si presta alla formazione di tavole di mortalità ricavate dalle liste delle società d'assicurazione, potendo per queste farsi annualmente la statistica.

XI. Nei paragrafi precedenti fu solo risolto il problema di determinare la mortalità per tutta la durata del periodo tra un censimento e l'altro. Se invece delle liste date dai censimenti venissero adoperati i dati delle assicurazioni, basterebbe pienamente la soluzione indicata, perchè allora il periodo accennato durerebbe solo un anno. La cosa però si presenta diversamente se si vogliono utilizzare i dati di censimenti effettuati a maggiori intervalli di tempo l'uno dall'altro. Si devono prima raccogliere le notizie richieste nel primo paragrafo e si deve specialmente tener conto della data di ciascun caso di morte fra le A persone, in modo che si sappia quante di queste A persone ne morirono nel primo anno, quante nel secondo, ecc. fino all'anno in cui si fa un nuovo censimento. Trattasi ora di determinare la mortalità per ogni anno dell'intervallo di due censimenti (o più esattamente la probabilità di morte, come risulta da queste osservazioni).

Per sciogliere questo problema con generalità, supponiamo che il primo censimento disti n anni dal censimento seguente, e si sappia che delle A persone presenti al primo censimento, i morti nel primo, secondo, ... n^{esimo} anno del periodo statistico sono: T_1; T_2 . . . .; T_n. Si può risolvere la quistione impiegando la supposizione fatta al IV° paragrafo.

XII. Le lettere A, B, x, y abbiano lo stesso significato che nel primo paragrafo. Delle x persone, ne sieno nel primo, secondo . . . . n^{esimo} anno, morte un numero u_1 ; u_2 ; . . . . : u_n. Delle y ne muoiano (in totale) nello stesso tempo: v_1 ; v_2 ; . . . . v_n (numeri che realmente non si possono constatare).

Secondo ciò che s'è detto prima, si ha ora:

$$u_1 + \frac{1}{2} v_1 = T_1 ; \; u_2 + \frac{1}{2} v_2 = T_2 ; \; \ldots . ; \; u_n + \frac{1}{2} v_n = T_n . [7]$$

Supponiamo che delle A persone, P sieno realmente emigrate (P naturalmente sarà un'incognita), e supponiamo ancora che si abbia per ogni singolo anno un numero $\frac{P}{n}$ di emigrati. Si avranno allora le seguenti equazioni:

$$\frac{u_1}{x} = \frac{v_1}{y} ; \; \frac{u_2}{x - u_1} = \frac{v_2}{y - \frac{1}{2} v_1 - \frac{P}{n}} ;$$

$$\frac{u_3}{x - u_1 - u_2} = \frac{v_3}{y - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{2P}{n}} ; \ldots \ldots$$

$$\frac{u_n}{x - u_1 - u_2 - \ldots\ldots - u_{n-1}} =$$

$$= \frac{v_n}{y - \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1}) - \frac{(n-1)P}{n}}, \quad \ldots [8]$$

che si deducono osservando che delle x persone, al principio del secondo, terzo .... n^{esimo} anno ne vivono ancora:

$$x - u_1\,;\; x - u_1 - u_2\,;\; \ldots\ldots;\; x - u_1 - \ldots\ldots - u_{n-1}\,;$$

e delle y invece:

$$y - \frac{1}{2}v_1 - \frac{P}{n};\; y - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{2P}{n};\; \ldots\ldots;$$

$$y - \frac{1}{2}(v_1 + \ldots + v_{n-1}) - \frac{(n-1)P}{n};$$

perchè si devono sottrarre i morti *constatati* e i casi d'emigrazione accertati.

Il numero y è esaurito alla fine dell' n^{esimo} anno; i restanti B derivano quindi solamente da x. Ed infatti

$$x - u_1 - u_2 - \ldots\ldots - u_n = B;$$

$$y - \frac{1}{2}(v_1 + \ldots\ldots + v_n) - P = 0, \quad \ldots\ldots [9]$$

a cui si aggiunge l'eguaglianza:

$$x + y = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [10]$$

Il numero delle equazioni [7] a [10] risulta:

$$n + n + 2 + 1 = 2n + 3,$$

e il numero delle incognite è pure lo stesso:

$$(x,\ y,\ P,\ u_1\ \ldots\ldots,\ u_n,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n).$$

La prima, seconda, . . . , n^{esima} equazione del sistema [8] danno le probabilità di morte cercate pel primo, secondo, ... , n^{esimo} anno.

XIII. Si tratta ora della determinazione delle incognite.

Prima di tutto le [9] danno:

$$\left.\begin{aligned} P &= y - \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n); \\ x &= B + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n. \end{aligned}\right\} [11]$$

Così la [7] e la [10]

$$\left.\begin{aligned} & y = A - B - (u_1 + \ldots\ldots + u_n); \\ & u_1 = T_1 - \frac{1}{2} v_1;\ u_2 = T_2 - \frac{1}{2} v_2;\ \ldots;\ u_n = T_n - \frac{1}{2} v_n; \end{aligned}\right\} [12]$$

quindi:

$$x - u_1 = B + u_2 + \ldots\ldots + u_n =$$

$$= B + T_2 + \ldots\ldots + T_n - \frac{1}{2}(v_2 + \ldots\ldots + v_n),$$

$$x - u_1 - u_2 = B + u_3 + \ldots\ldots + u_n =$$

$$= B + T_3 + \ldots\ldots + T_n - \frac{1}{2}(v_3 + \ldots\ldots + v_n),$$

. . . .

. . . .

$$x - u_1 - \ldots\ldots - u_{n-1} = B + u_n = B + T_n - \frac{1}{2} v_n,$$

$$x = B + T_1 + \ldots\ldots + T_n - \frac{1}{2}(v_1 + \ldots\ldots + v_n).$$

Se si considera poi che

$$\left.\begin{aligned} y &= A - B - (T_1 + \ldots\ldots + T_n) + \frac{1}{2}(v_1 + \ldots\ldots + v_n), \\ P &= A - B - (T_1 + \ldots\ldots + T_n); \end{aligned}\right\} [13]$$

dalle [8] si ricava :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(T_1-\frac{1}{2}v_1\right)\left\{A-B-(T_1+\dots+T_n)+\frac{1}{2}(v_1+\dots+v_n)\right\}=\\
&\qquad=v_1\left\{B+T_1+\dots\dots+T_n-\frac{1}{2}(v_1+\dots\dots+v_n)\right\},\\
&\left(T_2-\frac{1}{2}v_2\right)\left\{\frac{n-1}{n}(A-B-T_1-\dots-T_n)+\frac{1}{2}(v_2+\dots+v_n)\right\}=\\
&\qquad=v_2\left\{B+T_2+\dots\dots+T_n-\frac{1}{2}(v_2+\dots\dots+v_n)\right\},\\
&\left(T_3-\frac{1}{2}v_3\right)\left\{\frac{n-2}{n}(A-B-T_1-\dots-T_n)+\frac{1}{2}(v_3+\dots+v_n)\right\}=\\
&\qquad=v_3\left\{B+T_3+\dots\dots+T_n-\frac{1}{2}(v_3+\dots\dots+v_n)\right\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left(T_n-\frac{1}{2}v_n\right)\left\{\frac{1}{n}(A-B-T_1-\dots\dots-T_n)+\frac{1}{2}v_n\right\}=\\
&\qquad\qquad=v_n\left(B+T_n-\frac{1}{2}v_n\right).
\end{aligned}\right\}[14]$$

Di queste equazioni, l'ultima contiene solo v_n, la penultima v_n e v_{n-1}, ecc., sicchè si può determinare semplicemente v_n, potendosi facilmente decidere riguardo al segno delle radici dell'equazione quadratica. La precedente equazione, nella quale si può sostituire v_n, da subito v_{n-1} e così di seguito.

Quando tutti i v sono determinati, le [12] e [13] danno gli u ed y, mentre P si ha dalla [13] ed x dalla [11], oppure dall'equazione data più tardi a quest'uopo.

Le frazioni che formano i due membri della prima, seconda, ecc. equazione [8], danno come già s'è detto le cercate probabilità.

La soluzione completa della [14] in formole sarebbe inutile, essendo evidentemente più conforme allo scopo indicare il sistema.

XIV. Pel caso particolare di un periodo statistico durante due anni si ha:

$$P=A-B-(T_1+T_2);$$

$$\left(T_1 - \frac{1}{2} v_1\right)\left(P + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2\right) = v_1 \left(A - P - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2\right);$$

$$\left(T_2 - \frac{1}{2} v_2\right)\left(\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} v_2\right) = v_2 \left(B + T_2 - \frac{1}{2} v_2\right);$$

$$u_1 = T_1 - \frac{1}{2} v_1;\ u_2 = T_2 - \frac{1}{2} v_2;$$

$$y = P + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2;\ x = A - P - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2;$$

in cui A e B hanno lo stesso significato di prima e T_1 e T_2 sono i morti constatati nel primo e secondo anno. Le frazioni

$$\frac{u_1}{x} = \frac{v_1}{y};\ \frac{u_2}{x - u_1} = \frac{2 v_2}{P + v_2}$$

danno le probabilità cercate.

XV. Per periodi statistici di tre anni di durata si avrebbe:

$$P = A - B - (T_1 + T_2 + T_3);$$

$$\left(T_1 - \frac{1}{2} v_1\right)\left\{P + \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3)\right\} =$$
$$= v_1 \left\{B + T_1 + T_2 + T_3 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3)\right\},$$

$$\left(T_2 - \frac{1}{2} v_2\right)\left\{\frac{2}{3} P + \frac{1}{2}(v_2 + v_3)\right\} =$$
$$= v_2 \left\{B + T_2 + T_3 - \frac{1}{2}(v_2 + v_3)\right\},$$

$$\left(T_3 - \frac{1}{2} v_3\right)\left(\frac{1}{3} P + \frac{1}{2} v_3\right) = v_3 \left(B + T_3 - \frac{1}{2} v_3\right);$$

$$u_1 = T_1 - \frac{1}{2} v_1;\quad u_2 = T_2 - \frac{1}{2} v_2;\ u_3 = T_3 - \frac{1}{2} v_3;$$

$$y = P + \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3),$$

$$x = B + T_1 + T_2 + T_3 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3);$$

da cui le tre frazioni

$$\frac{T_1 - \frac{1}{2} v_1}{x} = \frac{v_1}{y};$$

$$\frac{T_2 - \frac{1}{2} v_2}{B + T_2 + T_3 - \frac{1}{2}(v_2 + v_3)} = \frac{v_2}{\frac{2}{3} P + \frac{1}{2}(v_2 + v_3)};$$

$$\frac{T_3 - \frac{1}{2} v_3}{B + T_3 - \frac{1}{2} v_3} = \frac{v_3}{\frac{1}{3} P + \frac{1}{2} v_3}$$

che dànno le tre cercate probabilità di morte.

XVI. Nel caso particolare del XIII° paragrafo in cui era $P = 0$, ossia non si era verificata emigrazione, si avevano tutti i v eguali a 0 ed $y = 0$.

Riguardo a ciò devesi osservare che nell'ultima equazione [14], che scriveremo adesso così:

$$\left(T_n - \frac{1}{2} v_n\right) \frac{1}{2} v_n = v_n \left(B + T_n - \frac{1}{2} v_n\right)$$

od ancora

$$v_n \left(B + \frac{1}{2} T_n - \frac{1}{4} v_n\right) = 0,$$

non si deve rigettare il fattore v_n perchè egli dà l'esatta soluzione.

E con ciò è pienamente risolto il problema propostoci, sempre riservando l'esame ulteriore che si dovesse fare riguardo alla ipotesi di una emigrazione uniforme.

Supplemento al paragrafo VI°.

S'è fatto un piccolo errore nella formola citata. Nel paragrafo VI°, articolo 2°, si è considerato il caso in cui $B = 0$ e venne trovato come probabilità di morte il rapporto

$$\frac{2T}{A}.$$

Ciò è solo esatto finchè $2T < A$. L'errore commesso verrà spiegato con ciò che segue.

Nella formola [3] a pagina 6 la quantità

$$\frac{1}{2}\sqrt{(A+B)^2 - 4T(A-T-B)}$$

deve avere un valore positivo, che si deve poi sottrarre da $\frac{1}{2}(A+B)$. Nel caso particolare indicato, la suddetta quantità è uguale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{(A-2T)^2}.$$

E siccome questa dev'essere positiva essa sarà solo uguale a

$$\frac{1}{2}(A-2T) \text{ se } A > 2T.$$

Nel caso che $A < 2T$ si dovrà mettere $\frac{1}{2}(2T-A)$, come si può veder facilmente perchè:

$$\sqrt{(A-2T)^2} = \sqrt{(2T-A)^2}$$

Ora è:

$$b = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(2T-A) = A - T;\ v = 2A - 2T;$$

$$y = A - T + b = 2A - 2T,$$

e conseguentemente

$$\frac{v}{y} = \frac{2A-2T}{2A-2T} = 1$$

cioè nel caso di $2T > A$ la probabilità di morte è sempre $= 1$, come si poteva prevedere per la natura della cosa.

Elaborazione dei dati delle società d'assicurazione per la formazione delle tavole di mortalità

PEL Dr *J. DIENGER* DI KARLSRUHE (1).

I. Nella memoria precedente io ho cercato di far vedere come si possa utilizzare per la formazione di tavole di mortalità, il materiale che si ricava dai censimenti, ordinato, ben inteso, secondo le disposizioni indicate.

Chiamando con A, T, B determinati numeri di persone coetanee presi tra un censimento ed il seguente, dall'equazione [1] si ricavavano le frazioni

$$\frac{u}{x} \text{ oppure } \frac{v}{y}$$

che davano i rapporti di mortalità cercati.

Già nella conclusione del paragrafo X° io ho osservato che il procedimento indicato s'adatta in particolar modo all'impiego dei dati che possono venir forniti facilmente dalle società d'assicurazione. Ora io voglio parlare più lungamente su tale questione.

II. In una società d'assicurazione si presenti il caso, che di A persone della stessa età a, assicuratesi al principio dell'anno, nel corso di esso, T siano morte ed E si ritirino, sicchè alla fine dell'anno, di quelle A persone siano ancora assicurate:

$$A - T - E = B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

persone.

Le lettere A, T, B abbiano lo stesso significato che nella memoria antecedente.

Ora suppongasi che la società in questione duri già da molti anni, sicchè le sia possibile di ricavare dai suoi dati il valore di A, di T, di B per una serie d'anni successivi, e sieno questi valori:

$$A_1, T_1, B_1; \; A_2, T_2, B_2; \ldots\ldots\ldots; \; A_n, T_n, B_n; \quad [2]$$

(1) Vedi la *Rundschau der Versicherungen* di MASIUS edita ora dal Dr Oesterley - 1875, Lipsia.

e sia sempre:

$$B_r = A_r - T_r - E_r .$$

Si osservi che tutti gli n gruppi [2] si riferiscono a persone della stessa età. Il preparare poi questi n gruppi [2] è, come già s'è detto in principio, cosa molto facile.

Le lettere

$$A_r\,,\ T_r\,,\ B_r\,,\ E_r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

si riferiscono ad un dato anno (per tutte le persone di una stessa età a che si trovano assicurate in quell'anno). Le stesse lettere con un altro indice, possono riferirsi ad un altro anno, sempre però per quelle persone della stessa età a, che in quest'altro anno si trovano assicurate.

Facciamo ora le seguenti considerazioni sulla trasformazione di questi valori.

III. Se si determinano v_r, y_r, u_r, x_r nelle equazioni,

$$v_r = 2b_r\,,\ y_r = A_r - T_r + b_r - B_r\,,\ u_r = T_r - b_r\,,$$

$$x_r = T_r + B_r - b_r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

in cui

$$b_r = \frac{1}{2}\,(A_r + B_r) - \frac{1}{2}\sqrt{(A_r + B_r)^2 - 4T_r\,(A_r - T_r - B_r)},$$

le frazioni

$$\frac{u_r}{x_r} \text{ oppure } \frac{v_r}{y_r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

uguali fra di loro esprimono il rapporto di mortalità, come si manifesta fra le persone della stessa età a in quell'anno a cui si riferiscono le lettere [3]. Qui è importante osservare che se le [5] devono dare esatti valori, è necessario che il numero x_r (A_r) sia abbastanza grande.

Per la formazione di una tavola di mortalità non si dovrà certo accontentarsi dei risultati di un solo anno. Le condizioni comuni di mortalità, come si manifestano nei rapporti generali dell'umana società (principalmente in quella parte di essa, che deve servire alla formazione della tavola), possono rimanere presso a poco costanti per una serie di anni, ed i risultati, ossia la tavola, devono avere valore per un periodo di tempo ancor maggiore. Uniremo quindi ora i numeri [2], e questo complesso lo si considererà come proveniente dalle osservazioni di un solo anno.

Se si ha

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n = A;\ T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_n = T;$$

$$B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_n = B \quad \ldots\ldots\ldots \quad [6]$$

si potrà dire: di A persone della stessa età a, che erano presenti in principio dell'anno, morirono durante il corso di esso, T e restarono ancora B.

Se si vuole ora avere il rapporto di mortalità per una persona di a anni, in seguito alle osservazioni fatte dalla detta società, non si ha che ad applicare subito la formola [4] a pag. 6, e quindi dalla [5] pag. 6 dedurre quel rapporto. Le A, T, B colà indicate equivalgono ad A, T, B della nostra [6].

IV. È facile lo scorgere che il rapporto di mortalità

$$\frac{u}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [7]$$

non si può derivare dai singoli

$$\frac{u_1}{x_1},\ \frac{u_2}{x_2},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{u_n}{x_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [8]$$

Basta a ciò una semplice considerazione delle formole relative. Qui la [7] è naturalmente il valore, che si ottiene coll'impiego della formola [4] a pag. 6 come fu già indicato nel paragrafo III°.

Solo nel caso che le frazioni [8] fossero eguali fra di loro, il rapporto [7] coinciderebbe con esse.

V. Ma le osservazioni di una unica società, anche se essa esista da lungo tempo, non si possono considerare come sufficienti. Si deve far in modo che tutte o parte di quelle società che fanno affari in un dato paese, per esempio in Germania, mettano in comune le loro osservazioni.

Se vengono quindi da tutte le società comunicate in ciascun anno le quantità [3], nell'equazione [6], non si formeranno allora le quantità A, T, B solamente coi dati di una unica società, ma con quelli di tutte insieme. Quindi A sarà la somma di tutte le quantità A_1, fornite dalle osservazioni delle società per i singoli anni della loro durata.

Allora la frazione

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{u} = \frac{T-b}{T-b+B}, \\ \text{dove} \quad &b = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}\sqrt{(A+B)^2 - 4T(A-T-B)} \end{aligned}\right\} \quad [9]$$

esprimerà il rapporto di mortalità di una persona di età a, come lo si ricava dalle predette osservazioni riunite.

Finchè non si potranno avere osservazioni più numerose, questo è il valore da porre nelle tavole di mortalità, e il rapporto di sopravvivenza alla medesima età è:

$$1 - \frac{T-b}{T-b+B} = \frac{B}{B+T-b} \quad \ldots\ldots \quad [10]$$

Con ciò viene risolto il problema proposto. È poi quasi inutile raccomandare il perfezionamento del materiale originale, ossia dei dati [3], per ulteriori ricerche.

STUDIO COMPARATIVO

SOPRA

ALCUNE FORMOLE PROPOSTE PER LA DETERMINAZIONE DELLA MORTALITÀ

NEL CASO DI EMIGRAZIONE.

Memoria dell'ingegnere G. B. Favero.

Introduzione.

Fra i problemi di cui si occupa la statistica matematica vi è quello di determinare la mortalità nel caso che un numero di persone della stessa età vada successivamente alterandosi non solo per le morti che avvengono, ma anche per emigrazione di alcuni individui od immigrazione di nuovi.

Di questo problema si occuparono il Heym (1), il Wittstein (2), lo Zeuner (3), il Dienger (4), ed anche il Körösi (5), il Becker (6), il Lewin (7), e varie formole più o meno semplici furono proposte per calcolare la cercata mortalità.

(1) *Masius. Rundschau der Versicherungen*, Bd. III (1853), pag. 335.

(2) *Grunert's Archiv der Mathematik und Physik*, Theil XXXIX, p. 67 - ed anche nell'opuscolo: *Mathematische Statistik und deren Anwendung auf National-Oeconomie und Versicherungs-Wissenschaft von Theodor* Wittstein. Hannover, 1867, pag. 16.

(3) *Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik, von D.r Gustav* Zeuner. Leipzig, 1869, pag. 97 e segg.

(4) *Masius. Rundschau der Versicherungen*, Bd. XXIV (1874), pag. 449. - Questo lavoro del Dienger fu poi ristampato con delle aggiunte nell'opuscolo: *Mittheilungen über individuale Mortalitäts-Beobachtungen von Joseph* Körösi. Budapest, 1876, pag. 43.

(5) *Congrès international de statistique à Budapest, Programme.* Budapest, 1876, pag. 106 e segg.

(6) *Detto*, pag. 221 e 263.

(7) *Detto*, pag. 345 e 360.

Scopo della presente Memoria si è di presentare un esame comparativo delle principali formole proposte o raccomandate dagli autori sopra citati, e di indicarne qualche altra che pure potrebbe servire alla soluzione del problema.

Le formole furono esaminate tanto sotto l'aspetto del concetto scientifico a cui esse si appoggiano, quanto sotto quello della maggiore o minore facilità pratica di adoperarle.

Lo Zeuner nel suo pregiato lavoro su questo argomento sviluppa alcune formole generali, dalle quali deduce come casi particolari le formole per altra via trovate da Heym e da Wittstein, e deduce pure, in base ad una sua nuova ipotesi, un'altra formola che egli propone.

Questo modo tenuto dallo Zeuner ha il grande vantaggio di considerare la questione sotto un punto di vista generale, ed è perciò che si è creduto di seguirlo pure in questo scritto, sviluppando prima alcune formole generali dietro un processo diverso da quello seguito dallo Zeuner, e discendendo poscia ai casi particolari.

Le formole generali qui esposte si sarebbero potute stabilire direttamente; ma si è creduto non inutile di ottenerle invece generalizzando un caso particolare; e ciò si è fatto sia per comprendere anche i casi in cui l'emigrazione si fa in modo discontinuo, sia anche per mostrare la connessione che le formole hanno colla forma più semplice sotto la quale può presentarsi la questione.

Nel presente scritto la materia sarà svolta nell'ordine seguente:

Si svilupperanno le formole generali relative al caso che l'emigrazione abbia luogo in modo discontinuo; e da queste si passerà alle formole generali relative al caso che l'emigrazione si faccia in modo continuo.

Dalle formole generali si dedurranno, come casi particolari, varie formole speciali, tanto relative al caso di emigrazione discontinua, che di emigrazione continua; riproducendo così non solo le formole proposte dagli autori citati, ma ottenendo anche delle formole nuove.

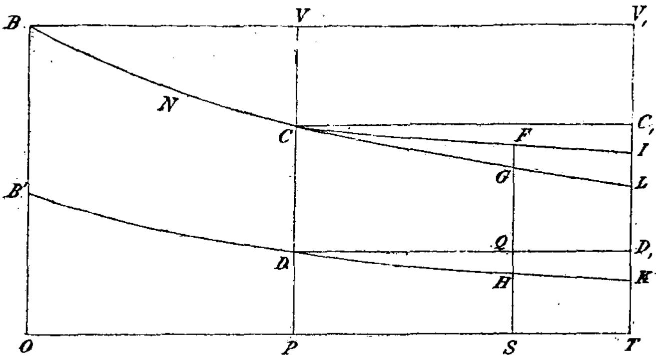
Si faranno poi alcuni confronti fra i valori dati dalle singole formole e si dedurranno delle formole approssimate.

Il breve lavoro si chiuderà con qualche esempio numerico e con alcune riflessioni dedotte dagli ottenuti risultati.

§ I.

Emigrazione discontinua.

Fig. 1



1. Rappresentiamo, nel modo solito, colle ascisse il tempo e colle ordinate la popolazione, e proponiamoci il seguente quesito (fig. 1):

La popolazione $O\,B = A$, composta tutta di persone aventi la stessa età, decrescendo per morti successive secondo la curva $B\,N\,C$, si riduce a $P\,C$, dopo decorso il tempo $O\,P = t$. Qui ha luogo l'emigrazione $C\,D = E$. La residua popolazione $P\,D$, decrescendo per ulteriori morti secondo la curva $D\,H\,K$, si riduce, alla fine del tempo $O\,T = 1$, al residuo $T\,K = V$.

Da questi dati, che supponiamo risultanti dall'osservazione diretta, trattasi di desumere la mortalità relativa all'intero periodo $O\,T$.

Limitando l'osservazione alla prima parte $O\,P$ dell'intero periodo, abbiamo il fatto che una popolazione $O\,B = A$ si è ridotta per morti avvenute a $P\,C$.

Il numero dunque di persone morte in questa prima parte del periodo è rappresentato in figura dalla $C\,V$, qualora s'intenda tirata la $B\,V$ parallela alla $O\,T$. Dunque, detta z_1 la mortalità relativa a questa prima parte del periodo, avremo:

(1) $$z_1 = \frac{C\,V}{O\,B}.$$

Considerando invece la sola seconda parte PT dell'intero periodo di tempo, abbiamo il fatto che una popolazione PD si è ridotta per morti avvenute al residuo TK. Tirata dunque la DD_1 parallela a PT, la KD_1 rappresenterà in figura il numero delle morti avvenute durante il tempo PT. Da questo fatto deriva che, chiamando z_2 la mortalità relativa alla seconda parte del periodo, avremo:

$$(2) \qquad z_2 = \frac{KD_1}{PD} .$$

Dedotte così dall'osservazione le mortalità z_1 e z_2 relative alle due parti del periodo OT, è facile calcolare la mortalità z, relativa all'intero periodo. Infatti, data una popolazione qualunque A_1 iniziale, essa si sarà ridotta ad $A_1 - z_1 A_1$, ossia a

$$A_1 (1 - z_1)$$

alla fine del tempo OP. E questa popolazione $A_1 (1 - z_1)$ si ridurrà analogamente ad

$$A_1 (1 - z_1) (1 - z_2)$$

alla fine del tempo OT. Il numero M_1 complessivo delle morti durante tutto il periodo OT sarà dunque espresso da

$$M_1 = A_1 - A_1 (1 - z_1) (1 - z_2) .$$

e quindi la cercata mortalità z sarà:

$$(3) \qquad z = \frac{M_1}{A_1} = 1 - (1 - z_1) (1 - z_2) = z_1 + (1 - z_1) z_2 .$$

Come si vede questa formola prescinde affatto da qualunque supposizione intorno alla legge con cui possono essere andati morendo gli emigrati CD dopo seguita l'emigrazione. Il valore di z da essa dato è basato sopra fatti realmente osservati entro i due periodi OP e PT separatamente, e non includendo alcuna supposizione riguardo a morti non osservate, non è quindi minimamente affetto da un'ipotesi qualsiasi relativa alle morti degli emigrati. Questo valore è dunque quello che ha per sè la probabilità massima in base alle fatte osservazioni (1).

(1) Vedi anche ZEUNER: *Abhandlungen*, pag. 6; e WITTSTEIN: *Math. Stat.*, pag. 14.

2. Nel caso ora considerato la popolazione iniziale A in seguito alle morti ed all'emigrazione si è ridotta, alla fine dell'intero periodo di tempo OT, al residuo $TK = V$. Supponendo ora che sia nota la legge secondo cui avvengono le morti, cioè sia nota la natura delle curve BNC e DHK, vediamo a quale residuo si sarèbbe ridotta la popolazione iniziale A, alla fine d'un tempo qualunque OS, compreso fra OP ed OT, se non avesse avuto luogo l'emigrazione E; e ciò nella supposizione che anche per le persone E, che ora più non emigrano, valga la stessa legge di mortalità che vale per le persone DP durante il periodo di tempo PT.

Sia CGL la curva secondo cui sarebbe diminuita la popolazione durante il tempo PT, se non avesse avuto luogo l'emigrazione. Tirata la CFI in modo che le sue ordinate siano eguali a quelle della DHK, aumentate della quantità E, si vede che, al tempo qualunque $OS = \omega$, una parte $HG = V'_\omega$ delle persone E sarà ancora in vita, mentre l'altra parte $GF = M'_\omega$ sarà morta. E si avrà sempre

$$V'_\omega + M'_\omega = E \,. \tag{4}$$

Suppongasi ora che, per la nota legge di mortalità, valida per il periodo PT, sopra una popolazione qualunque y vivente al tempo τ muoiano nell'unità di tempo un numero di persone

$$f(y, \tau) \,,$$

avremo allora per V'_ω persone viventi al tempo ω le morti nella unità di tempo indicate da

$$f(V'_\omega, \omega) \,.$$

Ma, essendo M'_ω una funzione di ω, le morti nell'unità di tempo sono anche espresse da

$$\frac{d\,M'_\omega}{d\,\omega} \,;$$

dunque avrà luogo l'equazione

$$\frac{d\,M'_\omega}{d\,\omega} = f(V'_\omega, \omega) \,,$$

e quindi per la (4):

$$\frac{d\,V'_\omega}{d\,\omega} + f(V'_\omega, \omega) = 0 \,. \tag{5}$$

Integrata quest'equazione in modo che per $\omega = t$ sia $V'_\omega = E$ si avrà:

$$V'_\omega = HG = F(E, t, \omega) \; . \tag{6}$$

Se dunque non avesse avuto luogo l'emigrazione la popolazione iniziale A si sarebbe ridotta alla fine del tempo OS al residuo

$$SH + F(E, t, \omega) \; ,$$

col che resta sciolto il proposto quesito, essendo per dato già nota la SH.

3. Fatto nella (6) $\omega = 1$ si avrà per la fine del tempo OT il numero a cui si sono ridotte le persone E. Indicato questo numero con V' sarà:

$$V' = F(E, t, 1) = KL \; , \tag{7}$$

e la popolazione iniziale A, se non avesse avuto luogo l'emigrazione, si sarebbe ridotta alla fine del tempo OT a

$$V + V' .$$

Il numero M'_ω dei morti relativi alle persone E al tempo ω si deduce dalla (4), che dà

$$M'_\omega = E - V'_\omega \; ,$$

ossia per la (6):

$$M'_\omega = E - F(E, t, \omega) \; , \tag{8}$$

ed alla fine del tempo OT, chiamando M' il numero dei morti relativi alle persone E, si avrà:

$$M' = E - F(E, t, 1) \; . \tag{9}$$

Nella figura, il numero M dei morti, direttamente osservati, quando abbia luogo l'emigrazione, è indicato da

$$M = CV + KD_1 \; . \tag{10}$$

Aggiungendo a questi morti gli M' si ha nell'espressione

$$M + M'$$

il numero totale dei morti per il caso che non abbia luogo l'emigrazione.

Analogamente al modo con cui si sono espresse le due parti $HG = V'_\omega$ e $GF = M'_\omega$ nelle quali si decompone al tempo OS il numero di persone E, si possono anche esprimere le due parti $SH = V_\omega$ ed $HQ = N_\omega$ nelle quali si decompone, allo stesso tempo OS, il numero di persone PD. Infatti le condizioni per le persone PD sono le stesse che per le persone E. Di queste persone PD sarà dunqne, ancora in vita, al tempo $OS = \omega$, un numero d'individui espresso da

$$(11) \qquad SH = V_\omega = F(PD, t, \omega)\ ,$$

i quali alla fine del periodo, cioè per $\omega = 1$, si ridurranno a

$$(12) \qquad TK = V = F(PD, t, 1)$$

i morti saranno al tempo OS

$$(13) \qquad HQ = N_\omega = PD - F(PD, t, \omega)\ ,$$

ed alla fine del periodo, detto N il valore a cui si riduce N_ω, si avrà

$$(14) \qquad KD_1 = N = PD - F(PD, t, 1)\ .$$

Che se la stessa legge di mortalità vale anche per il tratto OP, ossia se la funzione f resta la stessa anche per il tratto OP, dovrà aversi, ponendo $t = o$, $\omega = t$:

$$PC = F(A, o, t)\ ,$$

e quindi il numero CV dei morti entro il tempo OP sarà espresso da

$$(15) \qquad CV = A - F(A, o, t)\ ,$$

e la popolazione residua, appena seguita l'emigrazione, sarà

$$PD = PC - CD = F(A, o, t) - E\ ,$$

col qual valore le (11) e (13) diventano

$$(16) \qquad SH = V_\omega = F\{[F(A, o, t) - E], t, \omega\}\ ,$$

$$(17) \qquad HQ = N_\omega = F(A, o, t) - E - F\{[F(A, o, t) - E], t, \omega\}\ .$$

Detto M_ω il numero totale dei morti osservati (esclusi cioè quelli degli emigrati), sarà al tempo $OS = \omega$:

$$M_\omega = CV + HQ\ ,$$

cioè per la (15) e la (17):

$$(18)\qquad M_\omega = A - E - F\{[F(A, o, t) - E], t, \omega\}\,.$$

Alla fine del periodo V_ω, N_ω ed M_ω diventano rispettivamente V, N ed M; avremo dunque:

$$(19)\qquad V = F\{[F(A, o, t) - E], t, 1\}\,,$$

$$(20)\qquad N = F(A, o, t) - E - F\{[F(A, o, t) - E], t, 1\}\,,$$

$$(21)\qquad M = A - E - F\{[F(A, o, t) - E], t, 1\}\,.$$

La somma totale $M + M'$ dei morti alla fine del periodo sarà dunque, attesa la (9), espressa da

$$(22)\qquad M + M' = A - F\{[F(A, o, t) - E], t, 1\} - F(E, t, 1)\,.$$

4. Nello sviluppare le formole superiori siamo partiti dalla supposizione che fosse nota la legge di mortalità, ossia che fosse conosciuta la funzione f. Naturalmente non si può passare dalle formole ai valori numerici relativi ad un dato caso, se tale funzione non sia conosciuta.

Qualunque sia però la legge secondo la quale il numero delle persone va decrescendo per morti, dal concetto stesso di *mortalità*, il quale in queste ricerche è un rapporto numerico, si deduce necessariamente che, se entro un dato periodo di tempo ed in date condizioni sopra A_1 persone ne muoiono M_1, entro lo stesso periodo e nelle stesse condizioni sopra un numero $2A_1$ di persone ne morranno $2M_1$, ed in generale sopra nA_1 ne morranno nM_1, essendo n un numero qualunque.

Ciò significa in altre parole che la funzione

$$f(y, \tau)$$

esprimente il numero dei morti nell'unità di tempo per la popolazione y, deve necessariamente avere la forma

$$y\,\varphi(\tau)\,.$$

Ma al tempo τ, sopra una popolazione y, il numero dei morti nella unità di tempo è anche espresso da $-\frac{dy}{d\tau}$; dunque sarà:

$$-\frac{dy}{d\tau} = y\,\varphi(\tau)\,,$$

ossia

$$\frac{dy}{d\tau} + y\,\varphi(\tau) = 0 \;. \tag{23}$$

E questa è la forma generale sotto cui naturalmente si presenta l'equazione differenziale di qualunque curva di sopravvivenza. La diversità fra le diverse curve dipende allora unicamente dalla funzione φ, la quale stabilisce la parte aliquota di morti, che nella unità di tempo spettano all'unità di popolazione in una determinata età. Questa funzione φ dà quindi la misura dell'intensità con cui si manifesta la tendenza a morire.

Integrando l'equazione (23) in modo che all'origine del tempo la popolazione sia una qualunque A_1 si avrà in generale l'equazione finita della curva di sopravvivenza sotto la forma

$$y = A_1 e^{\int_\tau^o \varphi(\tau)\,d\tau} \tag{24}$$

la quale potrà coincidere con una data curva qualunque, la cui equazione sia della forma

$$y = A_1\,\xi(\tau)$$

colla condizione che la funzione $\xi(\tau)$ non contenga la A_1 e sia $\xi(o) = 1$.

Le varie curve che si ottengono dalla (24) col variare della A_1 costituiscono, come è facile dimostrare, un sistema di curve omologiche affini, essendo $O\,T$ l'asse d'affinità.

Ritenendo dunque per f la forma $y\,\varphi(\tau)$, la (5) diventa:

$$\frac{d\,V'_\omega}{d\,\omega} + V'_\omega\,\varphi(\omega) = 0 \;, \tag{25}$$

e quindi, eseguita l'integrazione in modo che per $\omega = t$ sia $V'_\omega = E$ si avrà:

$$V'_\omega = E\,e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\,d\omega} \;; \tag{26}$$

dunque la funzione F della formola (6) resta definita da

$$F(E, t, \omega) = E\,e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\,d\omega} \;,$$

e perciò sarà:

$$F(E,\, t,\, 1) = E\, e^{\int_{1}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\,,$$

$$F(A,\, o,\, t) = A\, e^{\int_{t}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega}\,,$$

coi quali valori le formole superiori (7), (8), (9), (16), (18), (19) e (21) diventano con facile riduzione

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
V' &= E\, e^{\int_{1}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega} = K L\,,\\
M'_{\omega} &= E\left(1 - e^{\int_{\omega}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) = E - V'_{\omega}\,,\\
M' &= E\left(1 - e^{\int_{1}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) = E - V' = L I\,,\\
V_{\omega} &= A\, e^{\int_{\omega}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega} - E\, e^{\int_{\omega}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\,,\\
V &= A\, e^{\int_{1}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega} - E\, e^{\int_{1}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\,,\\
M_{\omega} &= A\left(1 - e^{\int_{\omega}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - E\left(1 - e^{\int_{\omega}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\right),\\
M &= A\left(1 - e^{\int_{1}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - E\left(1 - e^{\int_{1}^{t} \varphi(\omega)\, d\omega}\right),
\end{aligned}\right.$$

e la 22 diventa

$$(28)\qquad M + M' = A\left(1 - e^{\int_{1}^{o} \varphi(\omega)\, d\omega}\right).$$

Fra le V_{ω}, M_{ω} ed E ha intanto luogo sempre la relazione

$$A = V_{\omega} + M_{\omega} + E\,,$$

ed alla fine del periodo la

$$(29)\qquad A = V + M + E\,.$$

5. Attesa la forma della funzione F, la (14) diventa

$$KD_1 = PD - PD \,.\, e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega},$$

cioè:

$$KD_1 = PD \left(1 - e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right).$$

Ma si è sopra trovato, formole (27):

$$M' = E \left(1 - e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right);$$

si avrà dunque:

$$M' : KD_1 = E : PD\,,$$

ossia, essendo nella figura la E rappresentata da DC

(30) $$M' = \frac{DC \times KD_1}{PD};$$

dalla quale risulta che anche senza conoscere la forma della φ si può calcolare il numero dei morti M', provenienti dai dati emigranti DC, qualora sia nota la popolazione PD ed il numero dei morti KD_1 a cui essa andò soggetta durante il periodo di tempo PT.

L'equazione (30) ci conduce facilmente ad una relazione semplice per la ricerca della mortalità nel caso che abbia avuto luogo emigrazione. Questa mortalità, data dalla formola (3), è infatti

$$z = z_1 + (1 - z_1)\, z_2\,.$$

Ora, sostituendo i valori di z_1 e z_2 dati dalle (1) e (2), si ha:

$$z = \frac{CV}{OB} + \left\{1 - \frac{CV}{OB}\right\} \times \frac{KD_1}{PD}\,.$$

Ma

$$\left(1 - \frac{CV}{OB}\right) \times \frac{KD_1}{PD} = \frac{PC \times KD_1}{OB \times PD} = \frac{(PD + DC) \times KD_1}{OB \times PD} =$$
$$\frac{KD_1}{OB} + \frac{DC \times KD_1}{OB \times PD},$$

dunque

$$(31) \qquad z = \frac{CV + KD_1 + \dfrac{DC \times KD_1}{PD}}{OB},$$

ossia, avuto riguardo alle (10) e (30) e ricordando essere $OB = A$,

$$(32) \qquad z = \frac{M + M_1}{A}.$$

Ossia in parole: il valore della mortalità, nel caso che abbia avuto luogo l'emigrazione, si ha supponendo che gli emigrati seguitino a morire colla stessa legge degli altri, ossia supponendo che l'emigrazione non abbia avuto luogo, e che i relativi individui, restati in paese, seguitino a morire colla stessa legge degli altri. Il valore cercato si ha allora aggiungendo i morti M' degli emigrati ai morti M degli altri, e dividendo la somma per la popolazione iniziale A. Sembra a primo aspetto che il valore di z, dato dalla (32) ed indicato dalla relazione ora esposta, dipenda da una ipotesi gratuita, quella cioè che gli emigrati seguitino a morire colla stessa legge degli altri. Sembrerebbe dunque che la maggiore o minore ammissibilità della formola (32) dipendesse dalla maggiore o minore ammissibilità della suddetta ipotesi. In realtà però non è così. Infatti il valore di z, dato dalla (32), è numericamente lo stesso del valore dato dalla (3), e quest'ultimo, come fu osservato al num. 1, è affatto indipendente da qualunque ipotesi riguardo alla legge secondo la quale vanno morendo gli emigrati. L'assumere dunque che gli emigrati seguitino a morire colla stessa legge degli altri, non è altro per la formola (32) che una modalità di calcolo per arrivare al valore (3), che è l'unico avente la massima probabilità.

6. La relazione espressa dall'equazione (32) resta convalidata anche dalla seguente considerazione. Quando non ha luogo l'emigrazione, la mortalità, che diremo z', per l'intero periodo OT, può aversi in due modi, sia prendendo (vedi figura):

$$z' = \frac{LV_1}{OB} = \frac{C_1V_1 + IC_1 + LI}{OB} = \frac{CV + KD_1 + LI}{OB} = \frac{M + M'}{A},$$

oppure anche supponendo diviso il periodo in due parti OP e PT, e calcolando a parte i coefficienti z_1 e z'_2 di queste due parti colle

$$z_1 = \frac{CV}{OB}, \qquad z'_2 = \frac{LC_1}{PC};$$

e facendo poi uso della formola

$$z' = z_1 + (1 - z_1)\, z'_2 .$$

Ma il z'_2 non differisce dal z_2 dato dalla (2). Infatti si ha:

$$z'_2 = \frac{LC_1}{PC} = \frac{KD_1 + LI}{PD + DC};$$

ma essendo per la (30)

$$\frac{KD_1}{PD} = \frac{LI}{DC},$$

sarà pure:

$$z'_2 = \frac{LC_1}{PC} = \frac{KD_1}{PD},$$

cioè $z'_2 = z_2$, e quindi anche

$$z' = \frac{M + M'}{A} = z .$$

Noteremo pure che la (31) può anche, come si rileva facilmente dalla figura, scriversi

$$z = \frac{CV + \frac{PC}{PD} \times KD_1}{OB},$$

oppure:

$$z = \frac{\frac{PD}{PC} \times CV + KD_1}{\frac{PD}{PC} \times OB}.$$

Confrontate queste formole colla

$$\frac{M}{A} = \frac{CV + KD_1}{OB},$$

la quale dà il rapporto fra i morti osservati e la popolazione iniziale, si vede che da tale rapporto si passa all'espressione della mortalità sia aumentando i morti KD_1 nella ragione $\frac{PC}{PD}$, sia diminuendo tanto i morti CV, che la popolazione iniziale nella ragione $\frac{PD}{PC}$. Quest'ultima forma corrisponde in figura ad un prolungamento della curva di sopravvivenza KHD fino ad incontrare in B' la OB; mentre allora sarà:

$$OB' = \frac{PD}{PC} \times OB\,;$$

col che il caso dato si riduce a quello di una popolazione iniziale OB', la quale senza emigrazioni diventa TK alla fine del tempo OT. Intanto confrontando la (32) colla (28) si ha:

$$z = 1 - e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\omega)\,d\omega}\,,$$

edi ndicando con x la probabilità di sopravvivenza ossia ponendo

$$x + z = 1$$

avremo:

$$x = e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\omega)\,d\omega}\,, \tag{33}$$

come può anche direttamente dedursi considerando l'equazione della curva di sopravvivenza data dalla (24). Infatti, secondo quell'equazione la popolazione iniziale A_1 alla fine del periodo OT si riduce ad

$$A_1\, e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\tau)\,d\tau}$$

e quindi il coefficiente x di sopravvivenza sarà espresso da

$$x = \frac{A_1\, e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\tau)\,d\tau}}{A_1} = e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\tau)\,d\tau}\,.$$

7. Se al tempo $OP = t$, invece di un'emigrazione avesse avuto luogo un'immigrazione di E persone aventi la stessa età delle PC, e si cercasse per questo caso la mortalità, il procedimento riescirebbe affatto analogo a quello svolto nei numeri precedenti, e si troverebbe che, continuando ad indicare con M il numero totale dei morti direttamente osservati, avrebbe luogo ancora la formola (32), purchè l'M', calcolato colla terza delle (27), si prenda negativo, ossia, in altre parole, purchè si prenda la E negativa.

Le formole sviluppate servono dunque tanto per il caso di emigrazione che per quello di immigrazione, purchè per il primo caso la E si consideri come positiva, per il secondo come negativa. Qualora al tempo t avesse luogo contemporaneamente un'emigrazione E ed un'immigrazione E', basterà considerare la differenza $E - E'$.

8. La relazione data al numero 5, relativa al valore della mortalità, si estende facilmente al caso che l'emigrazione E, anzichè aver luogo in totalità al tempo t, abbia luogo per parti in diversi tempi successivi. Se infatti di queste diverse emigrazioni parziali si consideri solamente l'ultima, si riconosce facilmente che essa si può riguardare come non avvenuta, purchè al numero M di morti osservati durante tutto il periodo $O\,T$, si aggiungano i morti M' relativi a quest'ultima emigrazione; i quali M' dovranno naturalmente essere calcolati per il tempo decorso dal momento in cui questa emigrazione ebbe luogo fino alla fine del periodo $O\,T$, e nella ipotesi che sussista la stessa legge di mortalità. Tolta così l'ultima emigrazione, si può estendere il ragionamento alla penultima, e poi successivamente alle altre.

Quando dunque le emigrazioni sono più d'una, basterà ai morti osservati M aggiungere quelli relativi alle singole emigrazioni, ammettendo che gli emigrati seguitino a morire colla stessa legge con cui muoiono i non emigrati. Il numero totale dei morti così ottenuto, diviso per il numero esprimente la popolazione iniziale, darà il valore della mortalità.

Ed anche qui ripetiamo ciò che fu osservato al numero 5, che cioè, l'ammettere che gli emigrati vadano morendo colla stessa legge dei non emigrati, non è un'ipotesi gratuita, dalla quale resti affievolita l'accettabilità del risultato. Questa ipotesi è anche qui da riguardarsi come un modo di esprimere l'andamento del calcolo, col quale si arriva a quello stesso valore della mortalità, che per altra via, e prescindendo da qualunque ipotesi, può pure raggiungersi. Così, per esempio, se le emigrazioni fossero due, il periodo totale di tempo $O\,T$ sarebbe diviso in tre parti, per le quali, come si fece al numero 1, si dovrebbero calcolare separatamente le mortalità z_1, z_2, z_3 e se ne dedurrebbe la mortalità z di tutto il periodo, così espressa:

$$z = 1 - (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) =$$
$$z_1 + (1 - z_1) z_2 + (1 - z_1)(1 - z_2) z_3 \,.$$

Ed a questo stesso risultato si giunge pure seguendo la regola sopra indicata (Vedi anche numero 15).

9. Le formole corrispondenti al caso che l'emigrazione E si faccia mediante alcune successive emigrazioni parziali, si deducono facilmente da quelle relative ad una sola emigrazione complessiva.

Siano $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ i numeri rappresentanti le singole emigrazioni parziali avvenute rispettivamente nei tempi

$$t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n \,.$$

Indicando con V'_ω e con V' il numero totale degli emigrati ancora viventi ai tempi $OS = \omega$, $OT = 1$ rispettivamente, avremo le formole analoghe alla (26) ed alla prima delle (27):

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} V'_\omega &= \sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i \, e^{\int_\omega^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega} \,, \\ V' &= \sum_{i=1}^{i=n} E_i \, e^{\int_1^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega} \,, \end{aligned} \right.$$

nella prima delle quali λ è l'indice dell'ultima emigrazione avvenuta entro il tempo OS.

Similmente indicando con M'_ω, M' il numero totale degli emigrati morti ai tempi $OS = \omega$, $OT = 1$, si avrà dalla seconda e terza delle (27):

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} M'_\omega &= \sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i \left(1 - e^{\int_\omega^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega} \right) = E_{(\lambda)} - V'_\omega \,, \\ M' &= \sum_{i=1}^{i=n} E_i \left(1 - e^{\int_1^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega} \right) = E \quad - V' \,; \end{aligned} \right.$$

dove con $E_{(\lambda)}$ si è indicata la somma di tutti gli emigrati fino alla emigrazione E_λ compresa, e con E la somma totale degli emigrati, cioè si è posto:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i = E_{(\lambda)}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} E_i = E.$$

Il numero V_ω e V delle persone ancora viventi e non emigrate al tempo ω ed alla fine del periodo $O\,T$, come pure il numero M_ω ed M dei morti osservati al tempo ω ed alla fine del periodo, si avranno analogamente dalle altre formole (27), le quali danno senz'altro

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
V_\omega &= A\, e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i\, e^{\int_\omega^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega}, \\
V &= A\, e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \sum_{i=1}^{i=n} E_i\, e^{\int_1^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega}, \\
M_\omega &= A\left(1 - e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - \sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i\left(1 - e^{\int_\omega^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) = \\
&\qquad A - E_{(\lambda)} - V_\omega, \\
M &= A\left(1 - e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - \sum_{i=1}^{i=n} E_i\left(1 - e^{\int_1^{t_i} \varphi(\omega)\, d\omega}\right) = \\
&\qquad A - E - V.
\end{aligned}\right.$$

Dunque il numero totale dei morti sarà alla fine del periodo

$$M + M' = A\left(1 - e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\right).$$

La mortalità z, espressa dalla

$$z = 1 - (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)\ldots\ldots(1 - z_n)(1 - z_{n+1}),$$

sarà data sempre da

$$z = \frac{M + M'}{A},$$

e quindi si avrà, avuto riguardo alle (29) e (35):

$$x = 1 - z = 1 - \frac{M + M'}{A} = \frac{A - M - M'}{A} = \frac{V + E - M'}{A} =$$

$$\frac{V + V'}{A} = e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}$$

come sopra, formola (33).

Che se avessero avuto luogo non solo delle emigrazioni, ma anche delle immigrazioni, si potrà sempre far uso delle stesse formole, purchè si considerino come negativi i valori di quelle E che si riferiscono alle immigrazioni, essendosi adottato il segno positivo per le emigrazioni.

§ II.

Emigrazione continua.

10. Dal caso precedente si passa facilmente a quello in cui l'emigrazione E abbia luogo in modo continuo. Basta supporre che le successive emigrazioni E_i, sopra considerate, diventino infinitesime, e che infinitesimi diventino pure gl'intervalli fra i successivi tempi

$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots,\ t_n\,.$$

Siccome in tal caso il numero totale degli emigrati dal principio del periodo fino al tempo qualunque t, diventa una funzione continua di t, così potremo indicare tale funzione con E_t e scrivere dE_t in luogo di E_i, diventata infinitesima, e porre dunque

$$dE_t = \psi(t)\, dt\,, \tag{37}$$

dove $\psi(t)$ rappresenterà per il tempo t il numero degli emigrati nell'unità di tempo.

Le formole (34) diventano allora senz'altro

$$\left\{\begin{aligned} V'_\omega &= \int_0^\omega \psi(t)\, e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt\,, \\ V' &= \int_0^1 \psi(t)\, e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt\,. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Quanto alle (35) si noti che le espressioni

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda} E_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} E_i$$

indicano nel caso nostro rispettivamente il numero totale degli emigrati dall'origine fino al tempo ω, e dall'origine fino alla fine del periodo $O\,T$. Se dunque indichiamo tali numeri rispettivamente con E_ω ed E, cioè se poniamo:

$$\text{(39)} \qquad E_\omega = \int_0^\omega \psi(t)\, dt\,, \qquad E = \int_0^1 \psi(t)\, dt\,,$$

le (35) diventano

$$\text{(40)} \quad \begin{cases} M'_\omega = \int_0^\omega \psi(t) \left(1 - e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right) dt = E_\omega - V'_\omega\,, \\ M' = \int_0^1 \psi(t) \left(1 - e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right) dt = E - V'\,, \end{cases}$$

e dalle (36) si avrà:

$$\text{(41)} \quad \begin{cases} V_\omega = A\, e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \int_0^\omega \psi(t)\, e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega} dt\,, \\ V = A\, e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \int_0^1 \psi(t)\, e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega} dt\,, \\ M_\omega = A\left(1 - e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - \int_0^\omega \psi(t) \left(1 - e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right) dt = \\ \qquad A - E_\omega - V_\omega\,, \\ M = A\left(1 - e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\right) - \int_0^1 \psi(t) \left(1 - e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\right) dt = \\ \qquad A - E - V\,. \end{cases}$$

Il numero dei vivi e dei morti relativi ai non emigrati si trova facilmente anche procedendo come segue. Per la legge di mortalità il numero dei morti nell'unità di tempo è espresso, al tempo ω, da $V_\omega \varphi(\omega)$ (num. 4); ma questo numero è espresso anche da $\frac{d M_\omega}{d \omega}$, dunque sarà:

(42) $$\frac{d M_\omega}{d \omega} = V_\omega \varphi(\omega) .$$

D'altra parte derivando la prima delle (39) rispetto ad ω si ha:

(43) $$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \psi(\omega) .$$

Ora, qualunque sia il tempo ω, si ha sempre, similmente alla (29):

(44) $$V_\omega + M_\omega + E_\omega = A ,$$

e quindi
$$\frac{d V_\omega}{d \omega} + \frac{d M_\omega}{d \omega} + \frac{d E_\omega}{d \omega} = 0 ,$$

cioè per le (42) e (43):

(45) $$\frac{d V_\omega}{d \omega} + V_\omega \varphi(\omega) + \psi(\omega) = 0 .$$

Integrata quest'ultima colla condizione che per $\omega = 0$ debba aversi $V_\omega = A$, si otterrà:

(46) $$V_\omega = \Phi(\omega) .$$

Sostituito questo valore nella (42) ed integratala in modo che per $\omega = 0$ sia $M_\omega = 0$, si avrà:

(47) $$M_\omega = \int_0^\omega V_\omega \varphi(\omega) \, d\omega = \Psi(\omega) .$$

Il valore di M_ω può aversi anche senza integrare la (42), purchè dalla (43) siasi trovato E_ω. Infatti la (44) dà

(48) $$M_\omega = A - V_\omega - E_\omega .$$

Per $\omega = 1$, ossia alla fine del tempo OT avremo:

(49) $$\begin{cases} V = \Phi(1) , \\ M = \Psi(1) . \end{cases}$$

L'accordo fra questo modo di determinare le V_ω ed M_ω ed il modo precedente si riconosce quando si osservi che il valore dato dalla prima delle (41) soddisfa alla (45) ed alla condizione $V_\omega = A$ per $\omega = 0$.

11. Con maggiore generalità si può supporre che l'emigrazione infinitesima, che ha luogo ad un dato tempo t qualunque del periodo, non solo dipenda dal tempo t, ma anche dalla complessiva popolazione V_t ancora vivente sul luogo a quel tempo.

In tal caso il numero degli emigrati nell'unità di tempo non si potrà esprimere semplicemente con $\psi(t)$, ma a questa funzione dovrà sostituirsi la $\psi(V_t, t)$, cosicchè la (43) diventerà:

$$\frac{d E_\omega}{d\omega} = \psi(V_\omega, \omega) \,. \tag{50}$$

Questa sostituzione sarà da farsi nelle formole (38), (39), (40) e (45). Il sistema di formole adunque relativo a questo caso più generale, potrà disporsi come segue.

Per il tempo qualunque ω hanno luogo le relazioni

$$\tag{51} \left\{ \begin{aligned} & \frac{d V_\omega}{d\omega} + V_\omega \varphi(\omega) + \psi(V_\omega, \omega) = 0 \,, \\ & M_\omega = \int_0^\omega V_\omega \varphi(\omega)\, d\omega = \Psi(\omega) \,, \\ & E_\omega = \int_0^\omega \psi(V_\omega, \omega)\, d\omega \,, \\ & V'_\omega = \int_0^\omega \psi(V_t, t)\, e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt \,, \\ & M'_\omega = E_\omega - V'_\omega \,. \end{aligned} \right.$$

La prima di queste formole dovrà integrarsi in modo che per $\omega = 0$ si abbia $V_\omega = A$, e darà:

$$V_\omega = \Phi(\omega) \,. \tag{52}$$

Questo valore di V_ω deve ridurre ad un'identità la prima delle (41), qualora alla $\psi(t)$ si sostituisca la $\psi(V_t, t)$. Deve aversi cioè identicamente

$$\Phi(\omega) = A\, e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \int_0^\omega \psi\,[\Phi(t), t]\, e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt\,.$$

Sarà pure:

$$V = A\, e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega} - \int_0^1 \psi(V_t, t)\, e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt\,. \tag{53}$$

Avuto V_ω in funzione di ω, si potrà procedere alle ulteriori integrazioni. Quanto ad M_ω, dopo trovati V_ω ed E_ω, lo si potrà, come sopra fu osservato, avere anche dalla (48).

Alla fine del periodo $O\,T$, posto $\omega = 1$, avremo:

$$(54)\quad \begin{cases} V = \Phi(1)\,, \\ M = \Psi(1)\,, \\ E = \int_0^1 \psi(V_\omega, \omega)\, d\omega\,, \\ V' = \int_0^1 \psi(V_t, t)\, e^{\int_1^t \varphi(\omega)\, d\omega}\, dt\,, \\ M' = E - V'. \end{cases}$$

Sarà poi

$$M + M' = A - E - V + M' = A - (V + V')$$

cioè, attesa la (53) e la quarta delle (54):

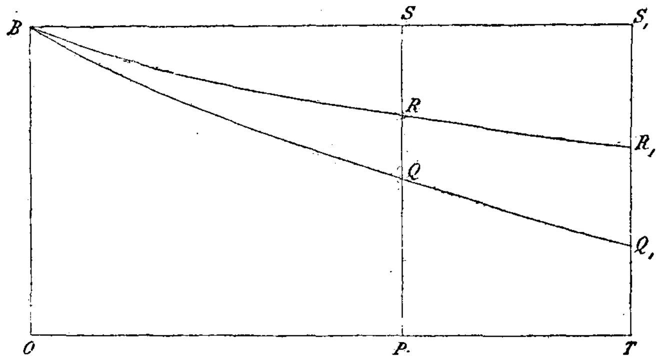
$$M + M' = A - A\, e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\,,$$

e quindi anche pel caso d'emigrazione continua

$$x = 1 - z = 1 - \frac{M + M'}{A} = \frac{V + V'}{A} = e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\, d\omega}\,. \tag{55}$$

L'andamento delle funzioni Φ e Ψ sopra trovate può graficamente rappresentarsi elevando per ogni ascissa $OP = t$ (figura 2) le ordinate $PQ = \Phi(t)$ e $PR = \Phi(t) + \Psi(t)$.

Fig. 2.



La figura indica allora come ad un tempo qualunque OP la primitiva popolazione $OB = PS$ siasi ridotta a PQ persone ancora viventi nel luogo, mentre QR sono morte nel luogo ed RS emigrate.

12. Nel caso che invece di una emigrazione continua, si avesse una immigrazione continua, le stesse formole possono servire. Basterà dare alla funzione $\psi(t)$, definita dall'equazione (37), o più generalmente alla $\psi(V_t, t)$ (numero 11), un valore negativo esprimente il numero degl'immigrati nell'unità di tempo, analogamente a quanto si fece per le immigrazioni discontinue (numero 9 in fine). Anche il caso che abbia luogo contemporaneamente emigrazione ed immigrazione in modo continuo resta compreso nelle formole superiori.

Se infatti siano nel tempo infinitesimo dt $\mu(V_t, t)\,dt$ gli emigrati e $\nu(V_t, t)\,dt$ gl'immigrati, essendo μ e ν due date funzioni, basterà porre

$$\psi = \mu - \nu,$$

e le stesse formole superiori serviranno all'uopo. Sotto il punto di vista della emigrazione e della immigrazione continua e contemporanea, le formole sviluppate, avuto il debito riguardo alla determinazione delle costanti in μ e ν, presentano adunque la stessa generalità di quelle esposte dal Wittstein e dallo Zeuner (Opere citate). Presso questi autori i numeri rappresentanti l'emigrazione e l'immigrazione non figurano che colla loro differenza, e possono quindi essere rappresentati da una sola lettera.

Per questo motivo noi possiamo in seguito parlare sempre di emigrazione senza togliere alcun che alla generalità dell'argomento.

§ III.

Formole particolari. Formole per emigrazione discontinua.

13. Se la legge di mortalità e quella con cui avvengono le emigrazioni non sono note, non si può procedere alla integrazione delle equazioni superiori, e non si può quindi determinare la mortalità z senza fare delle ipotesi.

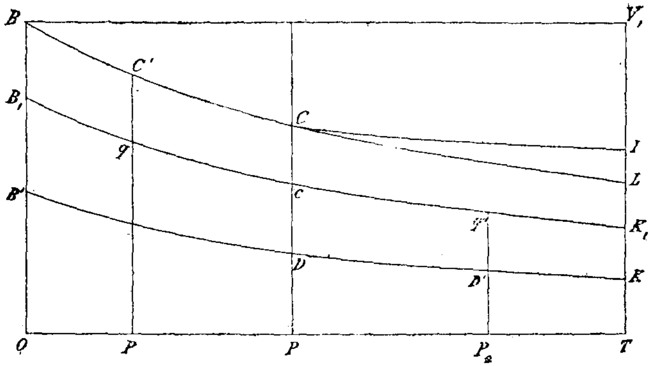
Questo caso si presenta realmente in pratica, e gli autori citati nell'introduzione se ne sono occupati; essi hanno supposto che si abbiano direttamente dall'osservazione le quantità A, V, M ed E, ma che non siano note le due funzioni φ e ψ, e facendo intorno a queste funzioni varie supposizioni, sono pervenuti a diverse espressioni della mortalità.

Noi dedurremo ora dalle formole generali superiori le formole trovate da quegli autori, per poterle poi assoggettare ad opportuno esame. Prima però osserveremo che quando intorno a φ e ψ si è ammessa una determinata ipotesi, si ottiene per z una funzione determinata dalle A, V, M, E, la quale è conseguenza di quella ipotesi. Ma la proposizione inversa non sussiste, cioè ad una data funzione di A, V, M ed E, esprimente il valore di z, non corrisponde in generale una determinata ipotesi di φ e ψ.

Se infatti si considera l'equazione (55), si vede che ponendo in essa, invece di z, una determinata funzione di A, V, M, E, si avranno infinite funzioni φ che vi soddisfano. Ed anche scelta la funzione φ, si vede dalla (53) che vi sono ancora infinite funzioni ψ che possono soddisfare alla (53) stessa; cioè vi sono infiniti modi di distribuzione della emigrazione od immigrazione. E questi infiniti modi non sono neppure subordinati alla condizione che la distribuzione debba aver luogo in modo continuo; essa può anche essere discontinua.

Un esempio semplice di distribuzioni diverse che conducono ad un medesimo valore di z può aversi ritornando al problema trattato al numero 1. In quel problema si era supposto che una emigrazione $CD=E$ (figura 3)

Fig. 3



avesse avuto luogo al tempo $OP=t$, ed in base a ciò si era dedotta la mortalità z per l'intero periodo di tempo OT. Ora si può facilmente, senza alterare il valore di z così ottenuto, sostituire due emigrazioni all'unica considerata, determinandole come segue:

Si tiri ad arbitrio una curva di sopravvivenza $B_1 c K_1$, la quale intersechi la CD nel punto c. Questa curva sarà omologica-affine alle BCL, $B'DK$ (numero 4); e siccome per tutte le curve di sopravvivenza le ordinate vanno decrescendo, così se il punto P_1 sia compreso fra i punti O e P, sarà:

$$P_1 C' - P_1 q > PC - Pc\,,$$

cioè

$$C' q > Cc\,.$$

Similmente, se P_2 sia compreso fra P e T, si avrà:

$$D' q' < Dc\,.$$

Si possono dunque in infinite maniere scegliere i punti P_1 e P_2 in modo che si abbia:

$$C' q + D' q' = Cc + Dc = CD = E\,.$$

Scelti due punti P_1 e P_2 che soddisfino a questa equazione, si potrà sempre all'unica emigrazione cD sostituire le due $C'q$ e $D'q'$, cosicchè il decremento della popolazione si faccia secondo la $B\,C'\,q\,q'\,D'\,K$, anzichè secondo la $B\,C\,D\,K$. Infatti, sostituendo quelle due emigrazioni, si mantengono inalterate le quantità

$$A = O\,B\,, \qquad V = T\,K\,, \qquad E = C'q + D'q',$$

e quindi per la (29) resterà inalterata pure la M. E siccome si mantiene inalterata anche la $V_1\,L$, che rappresenta il numero totale dei morti, cioè gli osservati più quelli relativi agli emigrati, così resterà inalterato anche il valore di z dato dalla (32).

Che poi nella formola (32), oltre ad M (numero dei morti osservato), si mantenga inalterato anche il numero dei morti relativi agli emigrati, può dimostrarsi direttamente come segue:

Dalla seconda delle (35) si ha, ponendo $O\,P_1 = t_1$, $O\,P_2 = t_2$,

$$M' = E - C'\,q\,e^{\int_t^{t_1} \varphi(\omega)\,d\omega} - D'\,q'\,e^{\int_t^{t_2} \varphi(\omega)\,d\omega}\,.$$

Ma

$$C'\,q = P_1\,C' - P_1\,q\,, \qquad D'\,q' = P_2\,q' - P_2\,D',$$

ed esprimendo le ordinate $P_1\,C'$, $P_1\,q$, $P_2\,q'$, $P_2\,D'$, mediante la (24), ossia ponendo

$$P_1\,C' = O\,B \times e^{\int_{t_1}^{0} \varphi(\tau)\,d\tau}\,, \qquad P_1\,q = O\,B_1\,e^{\int_{t_1}^{0} \varphi(\tau)\,d\tau}\,, \qquad \text{ecc.},$$

si ha con facile riduzione

$$M' = E - (O\,B - O\,B')\,e^{\int_t^{0} \varphi(\tau)\,d\tau} = E - (T\,L - T\,K) =$$

$$E - K\,L = L\,I\,.$$

Ora la $L\,I$ secondo la terza delle (27) rappresenta il numero dei morti relativo agli emigrati, qualora le E persone emigrino tutte insieme al tempo t; questo numero adunque rimane il medesimo anche se l'emigrazione si fa in due volte ai tempi t_1 e t_2.

Il Wittstein [1] ci dà un esempio di soluzione del problema inverso. Egli parte da un dato valore di z, cioè:

$$z = \frac{M}{A - \frac{1}{2}E},$$

e cerca in qual modo debba distribuirsi l'emigrazione per arrivare a quel valore [Vedi più innanzi formola (70)].

14. Veniamo ora alla deduzione di alcune formole particolari, supponendo date dall'osservazione le A, V, M ed E, e facendo riguardo alla φ e ψ delle supposizioni sufficienti allo sviluppo ulteriore delle formole generali.

Considereremo come incognita per le diverse ipotesi o la mortalità z, oppure, come usano molti, il coefficiente di sopravvivenza x, cioè la quantità $1 - z$, essendo sempre

(56) $$x + z = 1,$$

come fu sopra osservato (numero 6).

Cominciamo dal caso che l'emigrazione si faccia in modo discontinuo, e supponiamo che siano noti i tempi

$$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n,$$

in cui ebbero luogo le emigrazioni parziali

$$E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_n,$$

le quali insieme prese costituiscono l'emigrazione totale E.

Supponiamo inoltre che la legge di sopravvivenza entro il tempo OT che si considera, sia rappresentata da una linea retta. Da quest'ultima supposizione deriva che l'equazione della curva di sopravvivenza espressa in generale dalla (24) avrà la forma

$$y = \gamma\tau + \delta,$$

essendo γ e δ due costanti, e quindi sarà:

$$\frac{dy}{d\tau} = \gamma,$$

[1] *Grunert's Archiv*, 39, pag. 77 e seguenti.

coi quali valori la (23) diventa

$$\gamma + (\gamma\,\tau + \delta)\,\varphi(\tau) = 0\,;$$

e perciò

$$\varphi(\tau) = -\frac{\gamma}{\gamma\,\tau + \delta}\,,$$

ossia ponendo

$$\alpha = -\frac{\gamma}{\delta}\,,$$

sarà:

$$\varphi(\tau) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\,\tau}\,, \tag{57}$$

equazione che definisce la forma della funzione φ per il caso che la curva di sopravvivenza sia una linea retta.

Mediante questo valore della φ si ha dalle equazioni (34), (35) e (36) per un tempo qualunque ω:

$$\left\{\begin{aligned}
V'_\omega &= (1 - \alpha\,\omega) \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{E_i}{1 - \alpha\,t_i}\,,\\
M'_\omega &= \alpha \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{(\omega - t_i)\,E_i}{1 - \alpha\,t_i}\,,\\
V_\omega &= (1 - \alpha\,\omega)\left(A - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{E_i}{1 - \alpha\,t_i}\right),\\
M_\omega &= \alpha\left(A\,\omega - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{(\omega - t_i)\,E_i}{1 - \alpha\,t_i}\right),
\end{aligned}\right. \tag{58}$$

e per la fine del periodo $O\,T$:

$$\left\{\begin{aligned}
V' &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1 - \alpha\,t_i}\,,\\
M' &= \alpha \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(1 - t_i)\,E_i}{1 - \alpha\,t_i}\,,\\
V &= (1 - \alpha)\left(A - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1 - \alpha\,t_i}\right),\\
M &= \alpha\left(A - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(1 - t_i)\,E_i}{1 - \alpha\,t_i}\right),
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

e dalla (33) si ha:

$$x = 1 - z = 1 - \alpha ,$$

cioè:

(60) $$z = \alpha .$$

Per determinare le due quantità z ed α servirà dunque la (60) combinata coll'ultima o colla penultima delle (59). Combinandola colla penultima si ha per la determinazione della mortalità z l'equazione

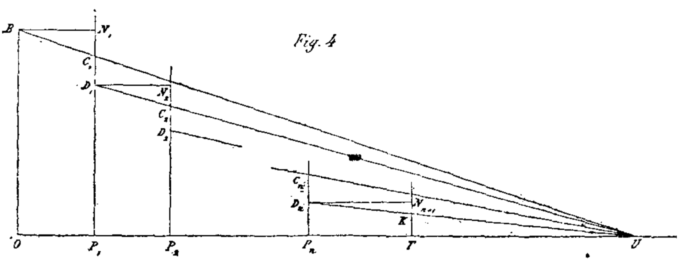
(61) $$A = \frac{V}{1-z} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1-z\,t_i},$$

e volendo determinare la x, l'equazione

$$A = \frac{V}{x} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1-(1-x)\,t_i}.$$

15. A questa equazione si può giungere anche direttamente come segue:

Siano $C_1 D_1 = E_1$, $C_2 D_2 = E_2$, ..., $C_n D_n = E_n$ (fig. 4)



le successive emigrazioni parziali, le quali abbiano luogo ai tempi $O P_1 = t_1$, $O P_2 = t_2$, ..., $O P_n = t_n$ rispettivamente; e sieno $B C_1$, $D_1 C_2$, ..., $D_n K$ le linee rette secondo le quali la popolazione decresce per morti fra le successive emigrazioni.

Queste rette, dovendo essere fra loro omologiche-affini (num. 4) ed essendo $O T$ l'asse di affinità, passeranno tutte per un punto U collocato sull'asse $O T$. Avremo dunque:

$$\frac{O B}{O U} = \frac{P_1 C_1}{P_1 U}, \quad \frac{P_1 D_1}{P_1 U} = \frac{P_2 C_2}{P_2 U}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{P_n D_n}{P_n U} = \frac{T K}{T U},$$

ossia, ponendo

$$OB = A, \quad P_1 C_1 = V_1, \quad P_2 C_2 = V_2, \quad \ldots\ldots, \quad P_n C_n = V_n,$$
$$TK = V, \quad OT = 1 \quad \text{ed} \quad OU = u,$$

$$(62) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A}{u} = \dfrac{V_1}{u - t_1}, \\[2mm] \dfrac{V_1 - E_1}{u - t_1} = \dfrac{V_2}{u - t_2}, \\[2mm] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2mm] \dfrac{V_n - E_n}{u - t_n} = \dfrac{V}{u - 1}, \end{array} \right.$$

le quali equazioni si possono anche scrivere

$$\frac{A}{u} = \frac{V_1}{u - t_1},$$
$$\frac{V_1}{u - t_1} = \frac{V_2}{u - t_2} + \frac{E_1}{u - t_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{V_n}{u - t_n} = \frac{V}{u - 1} + \frac{E_n}{u - t_n},$$

ed eguagliando la somma dei primi membri a quella dei secondi, tolti i termini comuni, si ottiene la relazione

$$(63) \qquad \frac{A}{u} = \frac{V}{u - 1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{u - t_i}.$$

D'altra parte, chiamando z_1, z_2, ..., z_{n+1} le mortalità relative ai singoli intervalli OP_1, $P_1 P_2$, ..., $P_n T$, determinati dalle successive emigrazioni, si ha:

$$z_1 \quad = \frac{C_1 N_1}{OB} = \frac{A - V_1}{A} = 1 - \frac{V_1}{A},$$
$$z_2 \quad = \frac{C_2 N_2}{P_1 D_1} = \frac{V_1 - E_1 - V_2}{V_1 - E_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1 - E_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_{n+1} = \frac{K N_{n+1}}{P_n D_n} = \frac{V_n - E_n - V}{V_n - E_n} = 1 - \frac{V}{V_n - E_n}.$$

Ma la mortalità relativa all'intero periodo OT è espressa da (numero 9):

$$z = 1 - (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) \ldots (1 - z_n)(1 - z_{n+1});$$

dunque, per le precedenti equazioni, si avrà:

$$z = 1 - \frac{V_1}{A} \cdot \frac{V_2}{V_1 - E_1} \cdots\cdots \frac{V}{V_n - E_n}.$$

Ma le (62) danno

$$\frac{V_1}{A} = \frac{u - t_1}{u}, \quad \frac{V_2}{V_1 - E_1} = \frac{u - t_2}{u - t_1}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{V}{V_n - E_n} = \frac{u - 1}{u - t_n},$$

e quindi

$$z = 1 - \frac{u - 1}{u} = \frac{1}{u}, \qquad \text{cioè} \qquad u = \frac{1}{z},$$

col qual valore la (63) si trasforma nella (61).

16. Come casi particolari della formola (61) considereremo i seguenti:

Se tutta l'emigrazione E ha luogo in una sola volta al tempo t porremo:

$$E_1 = E, \quad t_1 = t, \qquad \text{ed} \qquad E_2 = E_3 = \ldots\ldots = 0.$$

Con ciò la formola diventa

$$A = \frac{V}{1 - z} + \frac{E}{1 - zt}, \tag{64}$$

e serve a determinare la mortalità z per questo caso.

Che se nella (64) si fa successivamente $t = 0$, $t = 1$, ossia se si suppone che l'emigrazione abbia luogo tutta al principio o tutta alla fine del periodo di tempo OT, si ottiene per il primo caso

$$A = \frac{V}{1 - z} + E$$

e per il secondo

$$A = \frac{V + E}{1 - z}.$$

Nel caso dunque che l'emigrazione abbia luogo tutta al principio del periodo di tempo, la mortalità z è espressa, attesa la (29), da

$$(65) \qquad z = \frac{M}{A-E} = \frac{M}{M+V},$$

e si avrà pure per questo caso

$$(66) \qquad x = \frac{V}{A-E} = \frac{V}{V+M}.$$

Nel caso invece che l'emigrazione abbia luogo tutta alla fine del periodo, si avrà:

$$(67) \qquad z = \frac{M}{A},$$

e quindi anche

$$(68) \qquad x = \frac{A-M}{A} = \frac{V+E}{A}.$$

Il calcolo della mortalità in base al concetto espresso dalla formola (65) fu proposto e difeso dal Körösi [1]: però da lui stesso poi riconosciuto erroneo ed abbandonato [2].

Prendendo i due valori di x dati dalle (66) e (68), cioè:

$$x = \frac{V}{A-E} \qquad \text{ed} \qquad x = \frac{V+E}{A},$$

e confrontandoli col valore

$$x = \frac{V}{A},$$

che vale per il caso che non vi sia emigrazione alcuna, si vede che se le E persone emigrano appena cominciato il periodo OT, basta toglierle dalla popolazione iniziale e supporre che questa popolazione iniziale sia $A-E$ invece di A. Se invece le E persone emigrano immediatamente prima della fine del periodo, basta aggiungerle ai vivi V, e supporre che questi vivi siano $V+E$ invece di V. È facile comprendere, anche senza calcoli di sorta, la ragionevolezza di questo procedere.

Ritornando alla formola (61) supponiamo che l'emigrazione E si faccia in due volte: la prima volta di E_1 individui al tempo t_1,

(1) *Congrès*, pag. 115 e 125.

(2) *Mittheilungen*, pag. 13.

la seconda di E_2 individui al tempo t_2. In tal caso per determinare la mortalità z avremo l'equazione:

$$A = \frac{V}{1-z} + \frac{E_1}{1-z t_1} + \frac{E_2}{1-z t_2},$$

e se $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, sarà

$$A - E_1 = \frac{V+E_2}{1-z} \quad \text{ed} \quad 1 - z = x = \frac{V+E_2}{A-E_1},$$

e se inoltre $E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E$ si ha:

(69) $$x = \frac{V + \frac{1}{2} E}{A - \frac{1}{2} E},$$

e quindi

(70) $$z = \frac{M}{A - \frac{1}{2} E},$$

le quali due ultime formole valgono adunque quando metà della emigrazione si fa al principio e metà alla fine del periodo OT. E qui ripeteremo in particolare quanto fu sopra osservato in generale (numero 13), che cioè alle formole (69) e (70) si arriva anche adottando altri sistemi di emigrazione opportunamente scelti. Vi si arriva, per esempio, supponendo che l'emigrazione sia continua ed uniforme, e scegliendo la curva di mortalità o di sopravvivenza in modo conveniente (Vedi numero 23).

La formola (70) o, ciò che è lo stesso, la (69) trovasi proposta e raccomandata da vari autori. Nel volume XXXIX del *Grunert's Archiv*, già citato, e che è dell'anno 1862, il Wittstein (a pagine 75 e 77) dà questa formola come valore approssimativo di formole più esatte da lui dedotte.

Lo stesso Wittstein la deduce nuovamente nell'opuscolo citato: *Mathematische Statistik*, Hannover 1867, pag. 17, formola (17). Lo Zeuner nelle *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*, Leipzig 1869, pag. 108, riportando la stessa formola, la (20_b), come approssimativa di una di quelle del Wittstein, fa osservare che essa fu pure data dal Lazarus nel *Journal des Collegiums für Lebens-Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 1, Heft. 2; Berlin 1869.

Il Körösi nelle *Mittheilungen über individuale Mortalitäts-Beobachtungen*, Budapest 1876, a pag. 13, attribuisce tale formola al Dienger, e, rigettata la (65), l'accetta sotto la forma

$$z = \frac{M}{V + M + \frac{1}{2}E},$$

che, avuto riguardo alle (29), non differisce dalla (70). Però è da notare che i lavori del Dienger, citati dal Körösi, non precedono il 1874 e non contengono la formola che il Körösi gli attribuisce.

Anche il Becker (1), dietro sue considerazioni, giunge alla formola (70); ed il Lewin pure la riporta, attribuendola al Becker, e rilevando le ipotesi dalle quali il Becker vi fu condotto (2).

Il Lewin del resto osserva (3) che volendo rinunciare al calcolo più semplice, si potrebbero con vantaggio sostituire alla formola (70) quelle di Heym, o di Wittstein, o di Zeuner, le quali ora saranno qui sviluppate.

§ IV.

Formole per emigrazione continua.

17. Veniamo ora ad alcune formole particolari dedotte da varie ipotesi, le quali suppongono che l'emigrazione abbia luogo in modo continuo.

Le ipotesi che si fanno riguardano, come fu sopra osservato, le funzioni φ e ψ, e possono essere variamente stabilite.

Si possonò cioè assumere determinate forme delle funzioni φ e ψ, oppure si possono assumere certe condizioni da soddisfare; condizioni le quali indirettamente stabiliscono la forma che le φ e ψ devono avere. Naturalmente le ipotesi, e ciò valga per tutti i casi seguenti, sono relative al periodo di tempo OT.

Il Heym assume le due seguenti:

1ª che le morti M, direttamente osservate, siano uniformemente distribuite durante il periodo di tempo OT;

(1) *Congrès*, pag. 223 (anno 1876).

(2) *Idem*, pag. 342 e seguenti (formola 4).

(3) *Idem*, pag. 360.

2ª che anche l'emigrazione E sia uniformemente distribuita durante lo stesso periodo. Ciò equivale analiticamente ad assumere che qualunque sia il tempo ω debba essere

$$\frac{d\,M_\omega}{d\,\omega} = \alpha\,, \qquad \frac{d\,E_\omega}{d\,\omega} = \beta\,;$$

essendo α e β due costanti. Con questa supposizione le (42) e (50) diventano

(71) $$V_\omega\,\varphi(\omega) = \alpha\,, \qquad \psi(V_\omega\,,\,\omega) = \beta\,;$$

la seconda delle quali determina la forma della funzione ψ. Intanto con queste posizioni la prima delle (51) diventa

$$\frac{d\,V_\omega}{d\,\omega} + \alpha + \beta = 0\,,$$

la quale, integrata in modo che per $\omega = 0$ sia $V_\omega = A$, darà:

(72) $$V_\omega = A - (\alpha + \beta)\,\omega\,,$$

e quindi dalla prima delle (71):

$$\varphi(\omega) = \frac{\alpha}{A - (\alpha + \beta)\,\omega}\,,$$

dalla quale resta determinata anche la forma della funzione φ.

Le costanti α e β, che entrano nelle φ e ψ, si determinano pure facilmente. Infatti la seconda e terza delle (51) danno:

$$M_\omega = \alpha\,\omega\,, \qquad E_\omega = \beta\,\omega\,,$$

ed alla fine del periodo

$$M = \alpha\,, \qquad E = \beta\,;$$

con che le α e β sono determinate. Si ha dunque

$$\varphi(\omega) = \frac{M}{A - (M + E)\,\omega}\,, \qquad \psi(V_\omega\,,\,\omega) = E\,,$$

e quindi anche

$$\psi(V_t\,,\,t) = E\,.$$

Con questi valori la penultima delle (51) dà

$$V'_\omega = [A-(M+E)\,\omega]^{\frac{M}{M+E}} \left(A^{\frac{E}{M+E}} - [A-(M+E)\,\omega]^{\frac{E}{M+E}} \right)$$

e per $\omega = 1$, attesa la (29):

$$V' = \sqrt[M+E]{A^E\,V^M} - V\,,$$

per cui, essendo per la (55) $x = \dfrac{V+V'}{A}$, si ha:

$$x = \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}}. \tag{73}$$

Non volendo conoscere V'_ω, V', M', si ha più direttamente dalla (55) stessa

$$x = e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\,d\omega} = \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}}.$$

Questa è l'espressione trovata dal Heym e dedotta pure dallo Zeuner (1). È facile poi determinare quale sia la forma che prende l'equazione della curva di sopravvivenza in base all'ipotesi del Heym. Mediante il valore di $\varphi(\omega)$ sopra trovato, la (24) diventa

$$y = A_1 \left(1 - \frac{(M+E)\,\tau}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}},$$

ponendo dunque $\dfrac{M+E}{A} = a$, $\dfrac{M}{M+E} = b$, l'equazione cercata ha la forma

$$y = A_1\,(1 - a\,\tau)^b\,,$$

dove a e b sono costanti. Intanto essendo

$$V_\omega = \Phi(\omega) = A - (M+E)\,\omega\,, \qquad M_\omega = \Psi(\omega) = M\omega\,,$$

si vede che nell'ipotesi del Heym le BQQ_1, BRR_1 della fig. 2 sono linee rette; ciò che d'altronde era evidente, mentre tanto le morti che l'emigrazione crescono in ragione semplice diretta dal tempo.

(1) *Abhandlungen*, pag. 114.

18. Al Wittstein sono dovute due formole diverse. Per ottenere una di esse egli assume le seguenti ipotesi:

1ª che la curva di sopravvivenza sia una linea retta;

2ª che l'emigrazione E sia uniformemente distribuita durante il periodo di tempo OT.

Da queste condizioni si può facilmente dedurre la forma delle funzioni φ e ψ. La prima ipotesi determina la forma della φ, e per questo caso abbiamo sopra trovato la (57)

$$\varphi = \frac{\alpha}{1 - \alpha \tau},$$

dove α è una costante.

La seconda ipotesi darà, come nel caso precedente:

$$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \psi (V_\omega, \omega) = \beta,$$

essendo β una costante.

Con queste funzioni la prima delle (51) diventa

$$\frac{d V_\omega}{d \omega} + \frac{\alpha V_\omega}{1 - \alpha \omega} + \beta = 0.$$

la quale integrata in modo che per $\omega = 0$, ossia $V_\omega = A$, darà:

$$V_\omega = \Phi (\omega) = (1 - \alpha \omega) \left(A + \frac{\beta}{\alpha} \log. (1 - \alpha \omega) \right).$$

Le altre equazioni (51) daranno con facile calcolo

$$M_\omega = \Psi (\omega) = \alpha A \omega - \frac{\beta}{\alpha} [\alpha \omega + (1 - \alpha \omega) \log. (1 - \alpha \omega)],$$

$$E_\omega = \beta \omega,$$

$$V'_\omega = \frac{\beta (1 - \alpha \omega)}{\alpha} \log. \frac{1}{1 - \alpha \omega},$$

$$M'_\omega = \beta \left(\omega - \frac{1 - \alpha \omega}{\alpha} \log. \frac{1}{1 - \alpha \omega} \right).$$

Per $\omega = 1$, cioè alla fine del periodo, avremo dunque:

$$(74)\quad \begin{cases} V = \Phi(1) = (1-\alpha)\left(A + \dfrac{\beta}{\alpha}\log.(1-\alpha)\right), \\ M = \alpha A - \dfrac{\beta}{\alpha}[\alpha + (1-\alpha)\log.(1-\alpha)], \\ E = \beta, \\ V' = \dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}\log.\dfrac{1}{1-\alpha}; \\ M' = \beta\left(1 - \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\log.\dfrac{1}{1-\alpha}\right). \end{cases}$$

E la (55) diverrà:

$$(75)\qquad x = 1 - z = e^{\int_1^0 \varphi(\omega)\,d\omega} = 1 - \alpha .$$

Le tre prime delle (74), soddisfacendo alla (29), non costituiscono che due equazioni distinte rispetto ad α e β, e servono quindi a determinare queste due costanti, poichè le V, M, E sono date dall'osservazione. Le altre due equazioni danno poi i vivi ed i morti V' ed M' relativi all'emigrazione.

Ritenendo intanto per incognita la x ed eliminando la α fra la prima delle (74) e la (75), si arriva facilmente alla relazione

$$(76)\qquad V = Ax + \frac{Ex\log.x}{1-x},$$

che è una delle formole trovate dal Wittstein [1] e riprodotta dallo Zeuner [2], in base alle fatte ipotesi; formola che deve servire alla determinazione di x.

19. L'altra formola del Vittstein si ha dalle ipotesi seguenti:

1ª la curva di sopravvivenza è tale che le morti nell'unità di tempo per un istante qualunque mantengono una proporzione costante coi viventi in quell'istante;

2ª l'emigrazione E è uniformemente distribuita durante il periodo di tempo OT.

Cerchiamo in base a queste condizioni la forma delle funzioni φ e ψ. Nella curva di sopravvivenza i morti nell'unità di tempo

(1) *Grunert's Archiv*, Th. XXXIX, pag. 74, formola (17).

(2) *Abhandlungen*, pag. 107.

sono espressi da $y\,\varphi(\tau)$ ed i viventi da y (vedi numero 4). Dunque per la prima condizione avremo:

$$\frac{y\,\varphi(\tau)}{y}=\alpha\,, \quad \text{cioè:} \quad \varphi(\tau)=\alpha\,;$$

e per la seconda, come nei due casi precedenti:

$$\frac{d\,E_\omega}{d\,\omega}=\Psi\,(V_\omega\,,\,\omega)=\beta\,,$$

essendo α e β due costanti.

Con queste funzioni la prima delle (51) diventa

$$\frac{d\,V_\omega}{d\,\omega}+\alpha\,V_\omega+\beta=0\,,$$

la quale, integrata in modo che per $\omega=0$ sia $V_\omega=A$, darà:

$$V_\omega=\Phi\,(\omega)=\left(A+\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha\omega}-\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Si avrà poi, analogamente ai casi precedenti:

$$\begin{aligned}
M_\omega &=\Psi\,(\omega)=\left(A+\frac{\beta}{\alpha}\right)(1-e^{-\alpha\omega})-\beta\,\omega\,,\\
E_\omega &=\beta\,\omega\,,\\
V'_\omega &=\frac{\beta}{\alpha}\,(1-e^{-\alpha\omega})\,,\\
M'_\omega &=\beta\left(\omega-\frac{1-e^{-\alpha\omega}}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Le quali equazioni alla fine del periodo $O\,T$ diventano

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned}
V &=\Phi\,(1)=\left(A+\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\,,\\
M &=\Psi\,(1)=\left(A+\frac{\beta}{\alpha}\right)(1-e^{-\alpha})-\beta\,,\\
E &=\beta\,,\\
V' &=\frac{\beta}{\alpha}\,(1-e^{-\alpha})\,,\\
M' &=\beta\left(1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right),
\end{aligned}\right.$$

e la (55) darà:

$$x = e^{-\alpha} . \tag{78}$$

Le tre prime delle (77) equivalgono anche qui, per la (29), a due sole equazioni rispetto alle costanti α e β, e servono a determinarle: le due ultime determinano poi le V' ed M'. Se fra la (78) e la prima e terza delle (77) si eliminano α e β si ha la relazione

$$V = A x + \frac{E(1-x)}{\log . x} , \tag{79}$$

che è l'altra formola trovata dal Wittstein (1), riprodotta pure dallo Zeuner (2), e che dovrebbe servire al calcolo della x.

20. Nell'opera citata lo Zeuner, dopo di avere riprodotte le formole del Wittstein e del Heym, ne propone una sua propria, basata sull'ipotesi che il numero degli emigrati nell'unità di tempo, sia semplicemente proporzionale in ogni istante all'ordinata della curva di sopravvivenza corrispondente a quell'istante. Con questa ipotesi si può, anche senza formularne una ulteriore relativa alla curva di sopravvivenza, sviluppare fino ad un certo punto le relative formole. Indicata con y l'ordinata della curva di sopravvivenza, l'ipotesi dello Zeuner analiticamente si esprime, intendendo con α una costante, colla relazione

$$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \Psi (V_\omega , \omega) = \alpha y ,$$

ossia, per la (24), essendo in generale

$$y = A_1 e^{\int_\tau^0 \psi(\tau) d\tau} , \qquad \psi (V_\omega , \omega) = \alpha A_1 e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega) d\omega} ,$$

col che resta stabilito un legame fra le funzioni φ e ψ. Intanto la prima delle (51) diventa

(1) *Grunert's Archiv*, Th. XXXIX, pag. 77, formola (25).

(2) *Abhandlungen*, pag. 110, dove però, avuto riguardo al significato delle lettere, per errore si è data la formola (22), cioè:

$$V = x \left(A + \frac{E(1-x)}{\log . x} \right) ,$$

che non coincide con quella del WITTSTEIN.

$$\frac{d\,V_\omega}{d\,\omega} + V_\omega\,\varphi(\omega) + \alpha\,A_1\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega} = 0\,,$$

la quale, integrata al solito in modo che per $\omega = 0$ si abbia $V_\omega = A$, darà:

$$(80)\qquad V_\omega = \Phi(\omega) = (A - \alpha\,A_1\,\omega)\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}\,.$$

Inoltre si avrà:

$$(81)\qquad E_\omega = \int_0^\omega \alpha\,A_1\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}\,d\omega = \alpha \int_0^\omega y\,d\omega\,.$$

Ma $\int_0^\omega y\,d\omega$ rappresenta l'area della curva di sopravvivenza corrispondente all'ascissa ω; posto dunque per brevità:

$$F_\omega = \int_0^\omega y\,d\omega\,,$$

avremo

$$E_\omega = \alpha\,F_\omega\,,$$

e quindi dalla (48):

$$(82)\quad M_\omega = \Psi(\omega) = A - \alpha\,F_\omega - (A - \alpha\,A_1\,\omega)\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}\,.$$

Sarà poi

$$V'_\omega = \int_0^\omega \alpha\,A_1\,e^{\int_t^0 \varphi(\tau)\,d\tau}\,.\,e^{\int_\omega^t \varphi(\omega)\,d\omega}\,dt\,,$$

cioè:

$$(83)\qquad V'_\omega = \int_0^\omega \alpha\,A_1\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}\,dt = \alpha\,A_1\,\omega\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}$$

ed

$$(84)\qquad M'_\omega = \alpha\left(F_\omega - A_1\,\omega\,e^{\int_\omega^0 \varphi(\omega)\,d\omega}\right).$$

Per $\omega = 1$, cioè alla fine del periodo OT, chiamando y_1 l'ordinata della curva di sopravvivenza corrispondente all'ascissa $= 1$ ed F_1 la relativa superficie, ponendo dunque

$$y_1 = A_1 e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\tau)\, d\tau}, \tag{85}$$

le formole superiori diventano

$$\left\{\begin{aligned} V &= (A - \alpha A_1) \frac{y_1}{A_1} \\ M &= A - \alpha F_1 - (A - \alpha A_1) \frac{y_1}{A_1}, \\ E &= \alpha F_1, \\ V' &= \alpha y_1, \\ M' &= E - \alpha y_1 = \alpha (F_1 - y_1). \end{aligned}\right. \tag{86}$$

Le tre prime, soddisfacendo alla (29), stabiliscono due sole relazioni distinte fra le α, A_1, y_1, F_1, e non bastano quindi a determinarle; le due ultime determinano V' ed M', qualora sia noto il prodotto αy_1. Intanto la (55) dà, attesa la (85):

$$x = e^{\int_{\mathrm{I}}^{0} \varphi(\omega)\, d\omega} = \frac{y_1}{A_1}; \tag{87}$$

il che è del resto evidente, dovendo la probabilità di vivere essere espressa dal rapporto fra l'ultima e la prima ordinata della curva di sopravvivenza. Posto il valore di x nella prima delle (86), ed eliminate α mediante la terza, si ottiene

$$V = x\left(A - \frac{A_1 E}{F_1}\right). \tag{88}$$

Se collo stesso Zeuner si suppone che la curva di sopravvivenza sia una linea retta, sarà:

$$F_1 = \frac{A_1 + y_1}{2} = \frac{1}{2} A_1 (1 + x), \tag{89}$$

e quindi

$$V = x\left(A - \frac{2E}{1+x}\right). \tag{90}$$

Le formole (88) e (90) sono quelle ottenute dallo Zeuner [1].

[1] *Abhandlungen*, pag. 118, formole (28) e (VI).

21. Ritenuta la relazione (89), se si pone

$$\alpha A_1 = u , \tag{91}$$

le tre prime delle (86) diventano

$$V = (A - u) x ,$$

$$M = \left(A - \frac{1}{2} u\right)(1 - x) ,$$

$$E = \frac{1}{2} u (1 + x) ;$$

le quali costituendo, attesa la (29), due sole relazioni distinte rispetto ad u ed x, servono a determinare queste due quantità.

Determinate u ed x, dalla (87) combinata colla (91) si ha:

$$\alpha y_1 = u x ,$$

e quindi V' ed M' dalle due ultime delle (86). Quanto alle quattro quantità α, A_1, y_1, F_1, dopo trovati u ed x, esse restano legate solamente dalle tre equazioni (87), (89) e (91); una di esse è quindi arbitraria.

Del resto, note le u ed x, si può seguire per tutto il periodo OT il movimento della popolazione. Infatti, essendo rettilinea la curva di sopravvivenza, si avrà, secondo la (57):

$$\varphi(\tau) = \frac{\beta}{1 - \beta \tau} ,$$

dove β è una costante. Con ciò la (24) diventa

$$y = A_1 (1 - \beta \tau) ,$$

e per $\tau = 1$

$$y_1 = A_1 (1 - \beta) ,$$

da cui

$$\beta = 1 - \frac{y_1}{A_1} = 1 - x = z .$$

Nel nostro caso la φ è dunque così definita:

$$\varphi(\tau) = \frac{z}{1 - z \tau} ,$$

e con questo valore le (80) ..... (84) diventano

$$V_\omega = \Phi(\omega) = (A - u\omega)(1 - z\omega) ,$$

$$E_\omega = u\omega\left(1 - \frac{1}{2} z\omega\right) ,$$

$$M_\omega = \Psi(\omega) = z\omega\left(A - \frac{1}{2} u\omega\right) ,$$

$$V'_\omega = u\omega(1 - z\omega) ,$$

$$M'_\omega = \frac{1}{2} u z \omega^2 .$$

Nell'ipotesi dello Zeuner le due curve BQQ_1, BRR_1 (fig. 2) sono dunque due parabole, e può notarsi che i morti dovuti agli emigrati crescono in ragione del quadrato del tempo.

22. Il Dienger (vedi le citazioni nell'introduzione) dietro alcune sue particolari considerazioni e seguendo un metodo di calcolo elementare, ed affatto diverso da quello seguito dallo Zeuner, ha pure sviluppata una formola per il calcolo della mortalità. Questa formola però, esaminata da vicino, si palesa per la formola (90) sopra dedotta e dovuta allo Zeuner. La diversità d'aspetto della formola del Dienger e la diversità di processo nel dedurla furono certo causa che il Dienger, pubblicandola alcuni anni dopo che lo Zeuner aveva pubblicato la sua, non abbia egli stesso avvertito di avere riprodotta la formola dello Zeuner.

Il Lewin [1], mentre trova meritevoli di particolare attenzione l'ipotesi e quindi la formola dello Zeuner, dichiara falsa la formola del Dienger, senza quindi essersi avveduto che essa non differiva da quella dello Zeuner. Non si può però disconoscere che i concetti emessi dal Dienger siano un po' oscuri, ed il Lewin trova a ragione singolare l'idea dei *predestinati all'emigrazione* emessa dal Dienger.

Non sembra intanto inutile dimostrare qui che la formola del Dienger non è che quella dello Zeuner, ciò che faremo senza riprodurre i calcoli del Dienger, ma solo riportandone il risultato finale.

[1] *Congrès*, pag. 360 e 361.

Conserveremo in questa dimostrazione alle lettere A, V ed M il significato che esse hanno nella formola (29); indicheremo invece con z' la mortalità e con x' la probabilità di vivere, cosicchè sarà

$$x' + z' = 1 .$$

Ciò premesso, ecco la regola del Dienger: si calcoli una quantità ausiliare b colla

$$\textbf{(92)} \quad b = \frac{1}{2}(A + V) - \frac{1}{2}\sqrt{(A+V)^2 - 4M(A - M - V)} ,$$

e poi si calcolino le v, y, u ed x colle

$$\textbf{(93)} \quad \begin{cases} v = 2b , & y = A - M - V + b , \\ u = M - b , & x = M + V - b . \end{cases}$$

La mortalità z' sarà allora espressa da $z' = \frac{u}{x}$, oppure da $z' = \frac{v}{y}$, poichè nella ipotesi del Dienger

$$\textbf{(94)} \quad \frac{u}{x} = \frac{v}{y} .$$

Esposta così la regola del Dienger, dimostriamo che essa conduce allo stesso valore numerico della formola (90) dello Zeuner. Se ha luogo la (94) sarà anche

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{u+v}{x+y} = z' ;$$

e quindi

$$x' = 1 - z' = 1 - \frac{u+v}{x+y} = \frac{x+y-u-v}{x+y} ,$$

ossia per le (93):

$$x' = \frac{A - M - b}{A} ,$$

e sostituendo il valore di b dato dalla (92):

$$x' = \frac{A - M - \frac{1}{2}(A+V) + \frac{1}{2}\sqrt{(A+V)^2 - 4M(A-M-V)}}{A} .$$

Ponendo in questa invece di M il suo valore

$$M = A - V - E$$

dato dalla (29), si ottiene:

$$(95)\quad x' = \frac{V + 2E - A + \sqrt{(A+V)^2 - 4(A-V-E)E}}{2A}$$

e liberando il radicale ed elevando a quadrato

$$(2Ax' + A - V - 2E)^2 = (A+V)^2 - 4(A-V-E)E\,,$$

ossia, sviluppando e riducendo

$$Ax'^2 + x'(A - V - 2E) = V\,,$$

cioè:

$$Ax'(1+x') - V(1+x') - 2Ex' = 0\,;$$

da cui

$$V = x'\left(A - \frac{2E}{1+x'}\right),$$

che coincide colla formola (90). Dunque il valore di x', dedotto dalla regola del Dienger, è identico al valore di x dato dalla formola dello Zeuner.

23. Facciamo per ultimo le seguenti ipotesi: 1ª La curva di sopravvivenza è tale che le persone viventi al tempo τ hanno una probabilità di morire prima del termine del periodo OT, espressa da $\alpha(1-\tau)$, essendo α una costante; ossia la loro probabilità di morire è proporzionale al tempo che ancora manca per finire il periodo; 2ª L'emigrazione si fa in modo continuo ed uniforme.

Secondo l'equazione generica (24) della curva di sopravvivenza le persone y viventi al tempo τ sono date da

$$y = A_1 e^{\int_\tau^0 \varphi(\tau)\,d\tau}\,,$$

e per $\tau = 1$, ossia alla fine del periodo, esse si riducono a

$$y_1 = A_1 e^{\int_1^0 \varphi(\tau)\,d\tau}\,.$$

Sono dunque morte nel frattempo le persone $y - y_1$; ossia la probabilità di morire in quel frattempo è, per le persone y, espressa da

$$\frac{y - y_1}{y} .$$

Per la prima ipotesi avremo dunque:

$$\frac{y - y_1}{y} = \alpha (1 - \tau) .$$

Sostituendo per y ed y_1 i loro valori si ha con facile riduzione:

$$1 - e^{\int_1^\tau \varphi(\tau) d\tau} = \alpha (1 - \tau) ;$$

da cui

$$e^{\int_1^\tau \varphi(\tau) d\tau} = 1 - \alpha (1 - \tau) .$$

Prendendo i logaritmi e differenziando rispetto a τ si ha:

$$\varphi(\tau) = \frac{\alpha}{1 - \alpha (1 - \tau)} ,$$

la quale stabilisce la forma della funzione φ.

Dalla seconda ipotesi abbiamo

$$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \beta ,$$

ossia per la (50):

$$\psi (V_\omega , \omega) = \beta ;$$

essendo β una costante. Con questi valori di φ e ψ la prima delle (51) diventa

$$\frac{d V_\omega}{d \omega} + \frac{\alpha V_\omega}{1 - \alpha (1 - \omega)} + \beta = 0 ,$$

che integrata in modo che per $\omega = 0$ sia $V_\omega = A$, darà:

$$V_\omega = \frac{(1 - \alpha)(A - \beta \omega) - \frac{1}{2} \alpha \beta \omega^2}{1 - \alpha (1 - \omega)} .$$

Senza occuparci delle altre equazioni (51), posto in quest'ultima $\omega = 1$, si avrà:

$$V = (1-\alpha)(A-\beta) - \frac{1}{2}\alpha\beta\,,$$

e dalla terza delle (54)

$$E = \beta\,.$$

La (55) diventa poi

$$x = 1 - \alpha\,.$$

Eliminando da queste ultime tre equazioni le costanti α e β si ha:

$$x = \frac{V + \frac{1}{2}E}{A - \frac{1}{2}E}\,,$$

che coincide colla (69).

L'equazione (24) diventa intanto per il caso attuale

$$y = \frac{A_1(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\tau)}\,,$$

cioè la curva di sopravvivenza è in questo caso un arco d'iperbola (¹).

§ V.

Considerazioni sulle formole precedenti e nuova formola.

24. Quando dall'osservazione siano date direttamente le quantità A, V, M ed E, e non si abbia alcun dato nè alcun indizio intorno al modo con cui l'emigrazione e l'immigrazione vanno distribuite entro il periodo di tempo che si considera, sembra più naturale l'ammettere che esse abbiano avuto luogo in modo continuo, anzichè discontinuo; e può allora domandarsi quale delle ipotesi sopra esposte, e relative ad emigrazione ed immigrazione continua, sia più accettabile; o se anche non si possano fare altre ipotesi più probabili ancora.

Da questo punto di vista rileveremo anzitutto che la formola (73) del Heym e le (76) e (79) del Wittstein suppongono che la

(¹) Vedi sullo stesso argomento WITTSTEIN, *Grunert's Archiv*, volume XXXIX, pag. 78 e seguenti, e *Mathematische Statistik*, pag. 16 e 17.

emigrazione ed immigrazione si facciano uniformemente durante il periodo di tempo OT; mentre le formole (88) e (90) dello Zeuner suppongono che esse vadano decrescendo proporzionalmente alle ordinate della curva di sopravvivenza. Lo Zeuner osservò giustamente ([1]) che l'uniformità dell'emigrazione non è la più naturale.

Egli, immaginando una grande società composta d'individui di varie età in mezzo ad un gran paese, ove pur vivono persone di varie età, e classificando tutti i viventi appunto secondo le età, osservò che, almeno per le età medie della vita, le classi più giovani danno un contingente maggiore tanto d'immigrati che d'emigrati, e si attenne quindi all'ipotesi che, tanto l'immigrazione che l'emigrazione entro il periodo OT si distribuiscano proporzionalmente alle ordinate della curva di sopravvivenza relativa a quel periodo. Mentre adunque per le formole (73), (76) e (79) vale l'ipotesi

$$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \text{Costante} ;$$

per le (88) e (90) vale invece l'altra ipotesi

$$\frac{d E_\omega}{d \omega} = \alpha y ,$$

essendo α un coefficiente di proporzionalità ed y l'ordinata della curva di sopravvivenza.

25. Allo scopo di giudicare di queste ipotesi e delle formole che ne derivano, crediamo opportuno di fare le seguenti considerazioni:

a) Quanto al tener conto non solo degli emigrati, ma anche degl'immigrati, è da notare che computando nelle morti osservate M anche quelle derivanti dagli immigrati, si rende meno accettabile il valore della mortalità, poichè questi immigrati, avendo vissuto prima di aggiungersi alla popolazione iniziale e stabile A in altro ambiente e sotto altre condizioni, turbano l'andamento normale della popolazione stabile A riguardo al suo successivo estinguersi.

A questo riguardo sono in massima certo giuste le osservazioni del Körösi ([2]) per quanto riguarda gl'immigrati che egli vorrebbe

([1]) *Abhandlungen*, pag. 116.
([2]) *Congrès*, pag. 111 e 125.

esclusi dall'osservazione, non però per quanto riguarda gli emigrati. Del resto, riguardo a questi ultimi il Körösi stesso riconobbe poi l'opportunità di tenerne conto [1].

Per calcolare la mortalità in modo più accettabile, dovrebbe dunque bensì tenersi conto degli emigrati, ma possibilmente escludere l'influenza di quell'immigrazione, che è eterogenea, e ciò col non tener conto dei morti provenienti da questa fonte.

b) La rappresentazione accennata dello Zeuner di una grande società in mezzo ad un gran paese, dovrebbe, per il caso che si considera nella trattazione matematica, essere alcun poco modificata in questo senso, che la grande società è composta d'individui aventi la stessa età e non d'individui di varie età. Bisognerebbe dunque presentare la cosa così: Una grande società composta di A individui, aventi la stessa età, trovasi in mezzo ad un gran paese, nel quale vivono persone di varie età.

Con quale legge è probabile che si facciano le emigrazioni e le immigrazioni qualora per queste ultime si ritenga che non debbano immigrare che individui della stessa età degli A? Per le immigrazioni l'ipotesi dello Zeuner si presenta come la più probabile, poichè esse provengono da una popolazione, da un ambiente, in cui le diverse classi di età sono appunto rappresentate prossimamente dalle ordinate y della curva di sopravvivenza ed è ragionevole che la immigrazione sia maggiore o minore secondo che maggiori o minori sono quelle ordinate. Ma per le emigrazioni la cosa è diversa; esse provengono unicamente da quegli A individui che ad un tempo qualunque ω del periodo OT sonosi ridotti a V_ω.

Sembra dunque egualmente ragionevole che l'emigrazione sia invece proporzionale a V_ω come l'immigrazione è proporzionale ad y. Anzi, se si volesse anche tener conto della circostanza che le persone più avanti in età emigrano generalmente meno delle più giovani, bisognerebbe che la emigrazione decrescesse con ragione più rapida che non decresce la V_ω. Vedremo più avanti (num. 37) in che modo si possa tener conto grossolanamente di questa circostanza, e riteniamo per ora che l'emigrazione si faccia proporzionalmente a V_ω. Si dovrebbe dunque porre (vedi numero 12):

$$\mu(V_\omega, \omega) = \alpha' V_\omega, \qquad \nu(V_\omega, \omega) = \alpha'' y,$$

[1] *Mittheilungen*, pag. 13.

dove α' e α'' sono coefficienti di proporzionalità, e quindi

$$\psi(V_\omega, \omega) = \alpha' V_\omega - \alpha'' A_1 e^{\int_\omega^0 \varphi(\tau)\, d\tau} .$$

Da quanto precede risulta che qualora si prescinda, come dovrebbe farsi, dalla immigrazione eterogenea, l'ipotesi seguita dallo Zeuner è preferibile alle ipotesi che servirono di base alle formole di Heym e di Wittstein. Ma più naturale ancora sembra l'ipotesi che l'emigrazione sia proporzionale a V_ω anzichè ad y.

c) Per ultimo osserveremo che l'applicazione numerica delle diverse formole prova, come vedremo, che qualora la differenza fra emigrazione ed immigrazione non sia grande rispetto alla popolazione iniziale A, la diversità delle varie ipotesi non ha un'influenza molto sensibile nel valore di x. Quando quella differenza cresce, cresce pure l'influenza delle ipotesi, ed il valore di x diventa per ciò stesso tanto meno accettabile.

26. Volendo ora ricercare una nuova formola che corrisponda alle idee sopra esposte, noi riterremo: 1° che fra i casi a cui devono applicarsi le formole, siano molto più frequenti quelli in cui la differenza fra emigrazione ed immigrazione non sia molto grande rispetto alla primitiva popolazione A; 2° che l'immigrazione sia stata eliminata, od almeno sia anch'essa piuttosto piccola rispetto alla popolazione iniziale A. Con tali premesse si potrà ritenere che anche l'immigrazione ai diversi istanti del periodo OT sia proporzionale a V_ω invece che ad y e porre

$$\nu(V_\omega, \omega) = \alpha'' V_\omega ;$$

per cui

$$\psi(V_\omega, \omega) = \alpha' V_\omega - \alpha'' V_\omega = (\alpha' - \alpha'') V_\omega ,$$

ossia, ponendo $\alpha' - \alpha'' = \beta$:

(96) $$\psi(V_\omega, \omega) = \beta V_\omega .$$

Se inoltre entro il periodo OT si suppone rettilinea la curva di sopravvivenza, avremo dalla (57):

$$\varphi(\tau) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\tau} .$$

Mediante questi valori di ψ e φ si può procedere al calcolo delle (51) e si trova facilmente

$$
(97) \quad \left\{
\begin{aligned}
V_\omega &= \Phi(\omega) = A(1-\alpha\omega)\, e^{-\beta\omega} , \\
M_\omega &= \Psi(\omega) = \frac{A\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta\omega}\right) , \\
E_\omega &= A\left\{\alpha\omega\, e^{-\beta\omega} + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1-e^{-\beta\omega}\right)\right\} , \\
V'_\omega &= A(1-\alpha\omega)\left(1-e^{-\beta\omega}\right) , \\
M'_\omega &= \frac{A\alpha}{\beta}\left(\beta\omega + e^{-\beta\omega} - 1\right) .
\end{aligned}
\right.
$$

Le quali formole per $\omega = 1$, ossia alla fine del periodo $O\,T$, diventano:

$$
(98) \quad \left\{
\begin{aligned}
V &= \Phi(1) = A(1-\alpha)\, e^{-\beta} , \\
M &= \Psi(1) = \frac{A\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta}\right) , \\
E &= A\left\{\alpha\, e^{-\beta} + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1-e^{-\beta}\right)\right\} , \\
V' &= A(1-\alpha)\left(1-e^{-\beta}\right) , \\
M' &= \frac{A\alpha}{\beta}\left(\beta + e^{-\beta} - 1\right) .
\end{aligned}
\right.
$$

Di queste le tre prime determinano al solito le costanti α e β, e le due ultime le V' ed M'. Intanto si ha dalla (55):

$$
(99) \qquad x = 1 - \alpha ,
$$

ed eliminando le costanti α e β fra le due prime delle (98) e la (99), si ha per la determinazione della x l'equazione

$$
(100) \qquad V = A\,x - \frac{M\,x \log . \dfrac{A\,x}{V}}{1-x} ,
$$

la quale si presenta sotto un aspetto simile a quello delle equazioni (76) e (79) dovute al Wittstein.

§ VI.

Confronti fra le diverse formole.

27. Raccogliamo ora le principali formole superiormente sviluppate per la determinazione del coefficiente di sopravvivenza x. Esse possono così presentarsi:

		Numero nel quale furono dedotte
(101)	$x = \frac{V}{A - E}$	
(102)	$x = \frac{V + E}{A}$	16.
(103)	$x = \frac{V + \frac{1}{2} E}{A - \frac{1}{2} E}$	
(104)	$A = \frac{V}{x} + \sum_{i=1}^{i=n} \cdot \frac{E_i}{1 - (1 - x) t_i}$	14.
(105)	$x = \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}}$	17.
(106)	$A = \frac{V}{x} - \frac{E \log. x}{1 - x}$	18.
(107)	$A = \frac{V}{x} - \frac{E(1 - x)}{x \log. x}$	19.
(108)	$A = \frac{V}{x} + \frac{2E}{1 + x}$	20.
(109)	$A = \frac{V}{x} + \frac{M \log. \frac{Ax}{V}}{1 - x}$	26.

Come si vede le formole (101), (102), (103) e (105) sono equazioni di primo grado rispetto alla x, e danno senz'altro il valore di quest'incognita. La (108) è invece un'equazione di secondo grado, la (104) è in generale del grado $n + 1$, e le (106), (107) e (109) sono trascendenti. Prima di occuparci della risoluzione delle superiori equazioni, gioverà premettere alcuni confronti fra le medesime e fra i valori che danno per la x.

Dalla formola (104), la quale suppone che la emigrazione sia discontinua, si passa al caso che sia continua supponendo la E_i infinitesima e ponendo quindi

$$E_i = \psi(t)\, dt ,$$

colla condizione

(110) $$\int_0^1 \psi(t)\, dt = E ,$$

dove E rappresenta al solito l'emigrazione totale. La (104) diventa allora

(111) $$A = \frac{V}{x} + \int_0^1 \frac{\psi(t)\, dt}{1-(1-x)t} ,$$

e si avranno formole diverse secondo la diversa ipotesi che si farà intorno alla ψ. Ponendo

$$\psi = \alpha = \text{Costante} ,$$

si ha dalla (110) $\alpha = E$, e quindi

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)\, dt}{1-(1-x)t} = -\frac{E \log. x}{1-x} ,$$

per cui la (111), ossia la (104), diventa

$$A = \frac{V}{x} - \frac{E \log. x}{1-x} ,$$

che è la (106). Si è dunque ottenuto per altra via quella delle formole del Wittstein, che suppone la curva della sopravvivenza rappresentata da una linea retta.

Prendendo per ψ una funzione lineare

$$\psi = \alpha + \beta t ,$$

dove β sia differente da zero, si avrà per la (110):

$$(112) \qquad \alpha + \frac{1}{2}\beta = E\,,$$

e se la retta dell'equazione

$$y = \alpha + \beta t$$

passi inoltre per il punto U (figura 4), ossia, in altre parole, se l'emigrazione avviene proporzionalmente alle ordinate della curva di sopravvivenza, dovrà pure aversi

$$\alpha + \beta u = 0\,,$$

essendo $u = O\,U$. Ma $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-x}$ (num. 15 in fine), dunque

$$(113) \qquad \alpha + \frac{\beta}{1-x} = 0\,.$$

Le (112) e (113) danno

$$\alpha = \frac{2\,E}{1+x}\,, \qquad \beta = -\,\frac{2\,E\,(1-x)}{1+x}\,,$$

e quindi

$$\alpha + \beta\,t = \frac{2\,E - 2\,E\,(1-x)\,t}{1+x} = 2\,E \times \frac{1-(1-x)\,t}{1+x}\,,$$

coi quali valori si ha:

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)\,dt}{1-(1-x)\,t} = \int_0^1 \frac{(\alpha+\beta t)\,dt}{1-(1-x)\,t} = \frac{2\,E}{1+x}\,.\int_0^1 dt = \frac{2\,E}{1+x}\,,$$

e la (111) diventa

$$A = \frac{V}{x} + \frac{2\,E}{1+x}\,,$$

che è la (108) data dallo Zeuner.

28. Nella formola (104) siano le E_i tutte positive, cioè vere emigrazioni, e supponiamo che per una di esse, per esempio, per la E_i diventi variabile il rispettivo tempo t_i, mentre i tempi in cui hanno luogo le altre emigrazioni parziali E_1, E_2, ... restano inalterati.

Considerando adunque nella (104) la x come funzione solamente di t_i, e differenziando si trova con facile calcolo

$$\frac{d\,x}{d\,t_i}\left(\frac{V}{x^2}+\frac{E_i\,t_i}{[1-(1-x)\,t_i]^2}\right)=\frac{E_i\,(1-x)}{[1-(1-x)\,t_i]^2}\,,$$

e siccome in ogni caso $x<1$ (vedi numero 29), così si ha sempre:

$$\frac{d\,x}{d\,t_i}>0\,,$$

ossia col crescere della t_i cresce pure la x.

Dunque col ritardare l'emigrazione parziale E_i si aumenta il coefficiente di sopravvivenza x, e siccome ciò vale per qualunque emigrazione parziale, così in generale si può dire che, col ritardare le emigrazioni parziali, si aumenta il valore della x, mentre coll'anticiparle quel valore diminuisce.

Dunque una distribuzione delle emigrazioni E_1, E_2, ... tale che i tempi delle singole emigrazioni siano maggiori dei tempi di un'altra distribuzione data, nella quale le E_i restano le medesime, darà per x un valore maggiore di quello della data distribuzione.

Questo ragionamento sussiste naturalmente anche se le successive emigrazioni E_i siano infinitesime, e potremo dunque dire che quando trattasi di emigrazione continua, il valore della x, a parità di emigrazione totale, sarà tanto maggiore quanto più le emigrazioni saranno prevalenti verso la fine del periodo $O\,T$, e viceversa.

Ciò premesso, le formole (106), (108) e (109) sono tutte e tre dedotte dall'ipotesi che la curva di sopravvivenza sia rettilinea, e non differiscono se non per il modo con cui è distribuita l'emigrazione. Infatti la (106) suppone l'emigrazione uniforme, la (108) la suppone decrescente proporzionalmente alle ordinate della curva di sopravvivenza, e finalmente la (109) la suppone decrescente ancor più rapidamente, cioè in proporzione della popolazione locale effettivamente residua. Ne viene, per quanto sopra si è detto, che chiamando X_w, X_z ed X le radici rispettive delle tre suddette equazioni si avrà sempre $X<X_z<X_w$, ossia per dati valori di A, V, M ed E la formola (106) del Wittstein dà un valore maggiore per la x della formola (108) dello Zeuner, e questa un valore maggiore della formola (109) sopra trovata.

Le formole (101) e (102) suppongono che l'emigrazione si faccia tutta in principio o tutta in fine del periodo OT; e siccome queste formole sono indipendenti dalla legge di sopravvivenza, ne viene che esse danno rispettivamente il valore minimo ed il valore massimo della x rispetto a tutte le altre formole.

Possiamo dunque indicare con $X_{\text{min.}}$ e con $X_{\text{max.}}$ i valori dati rispettivamente dalla (101) e dalla (102).

29. Meno facile è il determinare come stiano quanto a grandezza, le radici date dalle (105) e (107) rispetto a quelle date dalle altre formole. Premettiamo che, in generale, qualunque sia la formola, la relativa radice è sempre compresa fra certi limiti che ora vogliamo ricercare. Nelle (29) e (32), cioè nelle

$$A = V + M + E$$

ed

$$1 - x = z = \frac{M + M'}{A}$$

le quantità A, V ed M sono essenzialmente positive.

Ciò premesso, si osservi che per $E > 0$, sarà anche $M' > 0$ ed $M' < E$, e quindi $M + M' < M + E$; ma $M + E = A - V$, dunque $M + M' < A - V$ ed

$$\frac{M + M'}{A} < 1 - \frac{V}{A}, \quad \text{cioè} \quad x > \frac{V}{A}.$$

D'altra parte $A > A - M - M'$, cioè

$$1 > 1 - \frac{M + M'}{A},$$

ossia $1 > 1 - z$ ed $x < 1$.

Per $E < 0$ tanto V' che M' sono negative, ma ciascuna numericamente minore di E, avendosi

$$V' + M' = E.$$

Dunque in questo caso si ha algebricamente $M' > E$, e quindi $M + M' > M + E$, cioè $M + M' > A - V$, da cui segue

$$x < \frac{V}{A}.$$

D'altra parte $E < 0$ significa che prevale l'immigrazione. Il numero totale V dei vivi esistenti alla fine del periodo si comporrà dunque dei vivi provenienti dalla primitiva popolazione A, più i vivi provenienti dagli immigrati. Tenuto dunque conto del segno inerente a V' avremo:

$$V > -V', \qquad \text{ossia} \qquad A - M - E > -V',$$

e quindi

$$A > M + (E - V'), \qquad \text{cioè} \qquad A > M + M'$$

ed

$$1 - \frac{M + M'}{A} > 0, \qquad \text{ossia} \qquad 1 - z > 0,$$

e finalmente
$$x > 0.$$

Riassumendo adunque diremo, che qualunque siano le formole che si adoperano, se $E > 0$, cioè se prevale l'emigrazione, il valore di x soddisfa alle

$$\frac{V}{A} < x < 1;$$

se invece prevale l'immigrazione, esso soddisferà alle

$$0 < x < \frac{V}{A}.$$

Se non ha luogo nè emigrazione nè immigrazione, si ha evidentemente

$$x = \frac{V}{A}.$$

30. Ciò premesso, e limitandoci al caso in cui prevale l'emigrazione, riprendiamo l'esame delle radici. Ponendo per brevità

$$\frac{V}{A} = v, \qquad \frac{M}{A} = m, \qquad \frac{E}{A} = p,$$

notiamo che le formole (106) ..... (109) possono anche scriversi

$$x - v = -\frac{p\,x \log. x}{1 - x}, \qquad x - v = -\frac{p(1 - x)}{\log. x},$$

$$x - v = \frac{2\,p\,x}{1 + x}, \qquad x - v = \frac{m\,x \log. \frac{x}{v}}{1 - x}.$$

Le radici di queste equazioni possono dunque riguardarsi (figura 5) come le ascisse dei punti d'intersezione della retta.

$$y = x - v \tag{114}$$

colle quattro curve

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= -\frac{p\,x \log. x}{1-x}, \\ y_2 &= -\frac{p\,(1-x)}{\log. x}, \\ y_3 &= \frac{2\,p\,x}{1+x}, \\ y_4 &= \frac{m\,x \log. \frac{x}{v}}{1-x}, \end{aligned}\right. \tag{115}$$

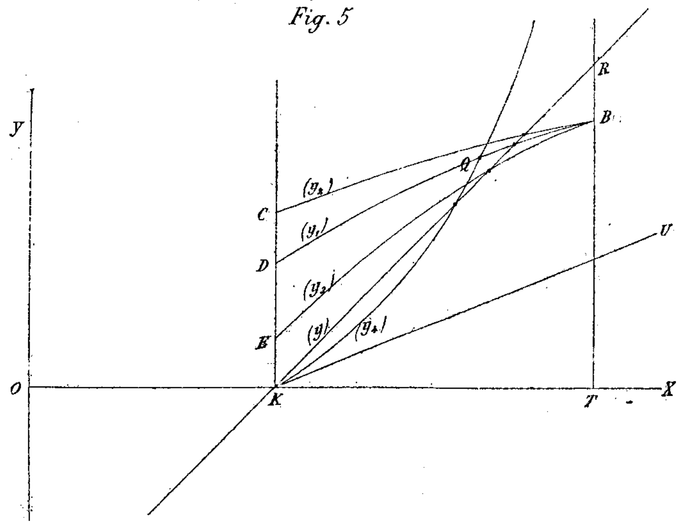
delle quali la terza è un'iperbola, le altre sono trascendenti. Nel seguito indicheremo per brevità la retta e le quattro curve scrivendo (y), (y_1), (y_2), (y_3), (y_4).

Esaminiamo ora l'andamento di queste quattro curve per valori di x soggetti alla condizione

$$v \leqq x \leqq 1 ,$$

la quale è verificata sempre dalle radici per $E > 0$.

Fig. 5



Per $x=v=OK$ si ha

$$y=0\,,\qquad y_1=-\frac{p\,v\log.v}{1-v}\,,\qquad y_2=-\frac{p\,(1-v)}{\log.v}\,,$$

$$y_3=-\frac{2\,p\,v}{1+v}\,,\qquad y_4=0\,.$$

Mentre dunque la y e la y_4 si annullano, le y_1, y_2, y_3 prendono dei valori finiti e positivi, poichè essendo $v<1$, sarà $\log.v<0$, e quindi $y_1>0$, $y_2>0$. Per $x=v$ abbiamo dunque

$$y_1>y\,,\qquad y_2>y\,,\qquad y_3>y\,.$$

Per x compreso fra v e $+1$, le ordinate della retta e delle quattro curve sono positive, come è facile a dimostrare. Quando x si avvicina indefinitamente a $+1$, cioè ad OT, si trova con facile calcolo

$$y=1-v\,,\qquad y_1=y_2=y_3=p=TB\,,\qquad y_4=+\infty.$$

E siccome $A=V+M+E$, cioè

(116) $$1=v+m+p$$

sarà $1>v+p$, cioè $1-v>p$. Per $x=+1$ abbiamo adunque

$$y_1<y\,,\qquad y_2<y\,,\qquad y_3<y\,,\qquad y_4>y\,.$$

Questo confronto delle ordinate per $x=v$ e per $x=+1$ dimostra intanto che ciascuna delle tre curve (y_1), (y_2) ed (y_3) interseca fra $x=v$ ed $x=+1$ la retta (y) un numero dispari di volte.

Quanto alla curva (y_4), la cui ordinata per $x=v$ è nulla, come quella della retta (y), si trova facilmente

$$\frac{d\,y_4}{d\,x}=\frac{m\left(1-x+\log.\dfrac{x}{v}\right)}{(1-x)^2}\,,$$

e per $x=v$

$$\left(\frac{d\,y_4}{d\,x}\right)_v=\frac{m}{1-v}\,.$$

Ma dalla $1=v+m+p$ si ha

$$1>v+m\,,\qquad \text{cioè}\qquad \frac{m}{1-v}<1\,;$$

dunque
$$\left(\frac{d\,y_4}{d\,x}\right)_v < 1\,,$$

ossia la tangente KU alla curva (y_4) nel punto K ha sull'asse OT un'inclinazione minore di 45°, mentre la retta (y) ha sullo stesso asse l'inclinazione di 45°.

Esistono dunque necessariamente sull'asse OT dei punti compresi fra K e T ed abbastanza vicini a K, per i quali l'ordinata della curva (y_4) è minore dell'ordinata corrispondente della retta KR. E siccome in prossimità del punto T ha luogo l'opposto, poichè le ordinate della curva crescendo indefinitamente si mantengono positive, così anche la curva (y_4) intersecherà fra $x=v$ ed $x=+1$ la retta KR un numero dispari di volte.

Si trova inoltre facilmente

$$(117)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{d\,x}=\dfrac{p\,(x-1-\log.x)}{(1-x)^2}\,, \\[2ex] \dfrac{d\,y_2}{d\,x}=\dfrac{p\,(1-x+x\log.x)}{x\log.^2 x}\,, \\[2ex] \dfrac{d\,y_3}{d\,x}=\dfrac{2\,p}{(1+x)^2}\,, \end{cases}$$

a cui aggiungeremo la già trovata

$$\frac{d\,y_4}{d\,x}=\frac{m\left(1-x+\log.\dfrac{x}{v}\right)}{(1-x)^2}\,.$$

Ora, entro i limiti assegnati alla x, si ha

$$\log.x=-\left((1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{3}(1-x)^3+\ldots\ldots\right),$$

dunque

$$x-1-\log.x=\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{3}(1-x)^3+\ldots\ldots,$$

cioè:

$$(118)\qquad x-1-\log.x>0\,;$$

dunque anche
$$\frac{d\,y_1}{d\,x}>0\,.$$

Si ha inoltre

$$\textbf{(119)} \qquad \frac{\log. x}{1-x} = -\left(1 + \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^2 + \ldots\ldots\right),$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\log. x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(1-x) + \ldots\ldots,$$

cioè $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log. x}{1-x}\right) > 0$, e quindi $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-x}{\log. x}\right) < 0$.

Ma $\quad \dfrac{d\,y_2}{dx} = -p\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-x}{\log. x}\right)$, dunque $\dfrac{d\,y_2}{dx} > 0$,

che confrontata colla seconda delle (117) dà la relazione

$$\textbf{(120)} \qquad x - 1 - x \log. x < 0$$

analoga alla (118). Si ha poi senz'altro

$$\frac{d\,y_3}{dx} > 0 .$$

Quanto a $\dfrac{d\,y_4}{dx}$ si noti che è $v < 1$, e che quindi per x compreso fra v e $+1$ si ha

$$\frac{x}{v} > 1, \quad \text{dunque} \quad \log. \frac{x}{v} > 0,$$

e quindi anche

$$1 - x + \log. \frac{x}{v} > 0, \quad \text{e perciò} \quad \frac{d\,y_4}{dx} > 0,$$

Essendo dunque entro il dato intervallo le

$$\frac{d\,y_1}{dx}, \quad \frac{d\,y_2}{dx}, \quad \frac{d\,y_3}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d\,y_4}{dx}$$

tutte positive, ne viene che le ordinate delle quattro curve (115) vanno sempre crescendo da $x = v$ ad $x = +1$. Per $x = 1$ si trova

$$\frac{d\,y_1}{dx} = \frac{d\,y_2}{dx} = \frac{d\,y_3}{dx} = \frac{p}{2},$$

cioè le curve (y_1), (y_2) ed (y_3) si toccano nel punto B.

Passando alle derivate seconde si ottiene con facile calcolo

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{d x^2} &= -p \,.\, \frac{1+2x\log.x-x^2}{x(1-x)^3}\,,\\ \frac{d^2 y_2}{d x^2} &= -p \,.\, \frac{2(1-x)+(1+x)\log.x}{x^2\log.^3 x}\,,\\ \frac{d^2 y_3}{d x^2} &= -\quad \frac{4p}{(1+x)^3}\,,\\ \frac{d^2 y_4}{d x^2} &= \quad m \,.\, \frac{1-x^2+2x\log.\frac{x}{v}}{x(1-x)^3}\,. \end{aligned}\right.$$

Sviluppando il numeratore di $\frac{d^2 y_1}{d x^2}$ in serie per potenze crescenti di $1-x$, si trova

$$1+2x\log.x-x^2=2\left(\frac{(1-x)^3}{2.3}+\frac{(1-x)^4}{3.4}+\ldots\ldots\right)$$

con legge manifesta. Dunque

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2}<0\,.$$

Inoltre, posto $\frac{1-x}{1+x}=u$, si ha

$$\log.x=\log.(1-u)-\log.(1+u)=-2\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\ldots\ldots\right)$$

e

$$\frac{\log.x}{u}=\frac{1+x}{1-x}\log.x=-2-2\left(\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}\ldots\ldots\right),$$

cioè

$$2(1-x)+(1+x)\log.x=-2(1-x)\left(\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}\ldots\ldots\right),$$

dunque

$$(122)\qquad 2(1-x)+(1+x)\log.x<0\,,$$

e quindi, per essere $\log.^3 x<0$,

$$\frac{d^2 y_2}{d x^2}<0\,.$$

Si ha in seguito evidentemente

$$\frac{d^2 y_3}{d x^2} < 0 .$$

E finalmente, avendosi $1 - x^2 > 0$, $\log . \frac{x}{v} > 0$,

$$\frac{d^2 y_4}{d x^2} > 0 .$$

Le quattro curve adunque entro i limiti considerati non hanno flessi; la (y_4) rivolge la sua convessità verso l'asse delle x, mentre le altre tre vi rivolgono la concavità.

Da quanto precede intanto risulta che ciascuna delle quattro curve, entro i limiti considerati, intersecherà la retta (y) una volta sola. Ossia, in altre parole, ciascuna delle quattro equazioni (106)...(109) possiede una sola radice reale compresa fra $x = v$ ed $x = +1$.

31. Si consideri ora la funzione

$$\xi = x \left(\frac{\log . x}{1 - x} \right)^2$$

e si avrà con facile calcolo

$$\frac{d \xi}{d x} = \frac{[2(1 - x) + (1 + x) \log . x] \log . x}{(1 - x)^3} .$$

Ma si ha $\log . x < 0$, dunque per la (122)

$$\frac{d \xi}{d x} > 0 ,$$

cioè la ξ va crescendo da $x = v$ ad $x = +1$. E siccome per $x = 1$ si ha $\xi = 1$, così per x compreso fra v e $+1$ sarà

$$\xi < 1 , \qquad \text{cioè} \qquad x \left(\frac{\log . x}{1 - x} \right)^2 < 1 .$$

Da questa si ha, atteso il segno di $\log . x$,

$$\frac{x \log . x}{1 - x} > \frac{1 - x}{\log . x} , \qquad \text{ossia} \qquad y_1 < y_2 .$$

Dalla $\frac{1+x}{1-x}\log.x = -2-2\left(\frac{u^2}{3}+\ldots\ldots\right)$, sopra trovata, si ha poi

$$-\frac{1+x}{1-x}\log.x > 2\ ;$$

da cui facilmente

$$\frac{-px\log.x}{1-x} > \frac{2px}{1+x}, \qquad \text{cioè} \qquad y_3 < y_1\ .$$

Dunque, entro l'intervallo KT (fig. 5) le ordinate della curva (y_1) sono minori delle rispettive della curva (y_2), e quelle della (y_3) minori delle rispettive della (y_1). Ora, essendo queste tre curve intersecate una sola volta dalla retta KR entro lo stesso intervallo, e ciò nel modo sopra esposto, ne viene che l'intersezione colla (y_3) avrà un'ascissa minore dell'intersezione colla (y_1), e l'intersezione colla (y_1) avrà un'ascissa minore dell'intersezione colla (y_2).

Dette dunque X_z, X_w ed $X_{w'}$ le radici delle equazioni (108), (106) e (107) rispettivamente, sarà:

$$X_z < X_w < X_{w'}\ .$$

L'ascissa del punto Q d'intersezione della (y_1) colla (y_4) si avrà ponendo $y_1 = y_4$, cioè

$$-\frac{px\log.x}{1-x} = \frac{mx\log.\frac{x}{v}}{1-x},$$

e chiamando X_h il valore cercato, si avrà:

$$(123) \qquad X_h = v^{\frac{m}{m+p}} = \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}},$$

che è il valore dato dalla formola del Heym (105).

Chiamiamo $y_1^{(h)}$ l'ordinata del punto Q d'intersezione, ed $y^{(h)}$ l'ordinata della retta (y) corrispondente all'ascissa X_h e cerchiamo se la differenza

$$\Delta = y_1^{(h)} - y^{(h)}$$

sia positiva o negativa. Avremo a tal fine dalla prima delle (115) e dalla (114)

$$y_1^{(h)} = -p\,.\,\frac{X_h\log.X_h}{1-X_h}, \qquad y^{(h)} = X_h - v\ ,$$

e quindi

$$\Delta = v - X_h - p \,.\, \frac{X_h \log. X_h}{1 - X_h} \,.$$

Ma ponendo per brevità

(124)
$$\frac{m}{m+p} = \frac{M}{M+E} = \delta \,,$$

si ha dalla (123)

(125)
$$X_h = v^{\delta} \,,$$

e quindi

$$\Delta = v - v^{\delta} - p \,.\, \frac{v^{\delta} \log. v^{\delta}}{1 - v^{\delta}} = p\, v^{\delta} \left(\frac{v^{1-\delta} - 1}{p} - \frac{\log. v^{\delta}}{1 - v^{\delta}} \right) .$$

Ma eliminando la m fra la (116) e la (124) si trova

$$p = (1 - \delta)\,(1 - v) \,,$$

e perciò

(126)
$$\Delta = (1 - \delta)\,(1 - v)\, v^{\delta} \left(\frac{v^{1-\delta} - 1}{(1 - \delta)\,(1 - v)} - \frac{\log. v^{\delta}}{1 - v^{\delta}} \right) .$$

Ora si ha con serie convergente

$$v^{1-\delta} =$$

$$\left[1 - (1 - v)\right]^{1-\delta} = 1 - (1 - \delta)\,(1 - v) - \frac{(1 - \delta)\,\delta}{2}\,(1 - v)^2 - \ldots$$

e quindi

(127)
$$\frac{v^{1-\delta} - 1}{(1 - \delta)\,(1 - v)} =$$

$$-\left(1 + \frac{\delta}{2}\,(1 - v) + \frac{\delta\,(\delta + 1)}{2.3}\,(1 - v)^2 + \frac{\delta\,(\delta + 1)\,(\delta + 2)}{2.3.4}\,(1 - v)^3 + \ldots\right)$$

Si ha pure similmente

$$\log. v^{\delta} = \log. \left[1 - \left(1 - v^{\delta}\right)\right] = -\left[\left(1 - v^{\delta}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - v^{\delta}\right)^2 + \ldots\right] ,$$

e perciò

$$\frac{\log. v^{\delta}}{1 - v^{\delta}} = -\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 - v^{\delta}\right) + \frac{1}{3}\,\left(1 - v^{\delta}\right)^2 + \ldots\right) .$$

Se in questa serie si sostituisce a v^δ il valore

$$v^\delta = \left[1-(1-v)\right]^\delta = 1-\delta\,(1-v) - \frac{\delta\,(1-\delta)}{2}\,(1-v)^2 - \ldots$$

e si ordina il risultato per le potenze crescenti di $1-v$, si trova

(128)
$$\frac{\log.v^\delta}{1-v^\delta} =$$
$$-\left(1+\frac{\delta}{2}(1-v)+\frac{\delta}{12}(3+\delta)(1-v)^2+\frac{\delta}{12}(2+\delta)(1-v)^3+\ldots\right).$$

Sostituiti i valori (127) e (128) nella (126) si ha

$$\Delta = \frac{\delta\,(1-\delta)^2\,(1-v)^3\,v^\delta}{12}\left(1+\frac{1}{2}(2+\delta)(1-v)+\ldots\right),$$

nella quale $1-v$ è generalmente una piccola frazione. Essendo dunque $1-\delta > 0$, $1-v > 0$, sarà pure

$$\Delta > 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad y_1^{(h)} > y^{(h)}\,,$$

ossia il punto Q trovasi superiormente alla retta KR. Ne viene, atteso l'andamento sopra studiato delle curve (y_1) ed (y_4), che l'ascissa X_h del punto Q è maggiore di X e minore di X_w; si ha cioè

$$X < X_h < X_w\,.$$

In altre parole: il valore di x dato dalla formola (105) del Heym è intermedio fra il valore dato dalla (109) e quello dato dalla (106).

32. Ma sopra (numero 28) abbiamo riconosciuto che anche il valore X_z dato dalla formola dello Zeuner era intermedio fra X ed X_w. Resta dunque da confrontare il valore X_h del Heym col valore X_z dello Zeuner.

Quando il numero M dei morti constatati eguaglia il numero E degli emigrati, la formola del Heym dà per l'incognita x lo stesso valore che è dato dalla formola dello Zeuner. Infatti se $M=E$ si ha

$$\frac{M}{M+E} = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi dalla (105)

$$X_h = \sqrt{\frac{V}{A}} .$$

Ma per la data condizione si ha pure

$$A = V + M + E = V + 2E , \qquad \text{cioè} \qquad 2E = A - V .$$

Con questo valore la (108) diventa

$$A = \frac{V}{x} + \frac{A - V}{1 + x} , \qquad \text{cioè} \qquad A x^2 = V ,$$

e quindi

$$X_z = \sqrt{\frac{V}{A}} = X_h .$$

Quando il numero dei morti non è eguale a quello degli emigrati, la formola dello Zeuner dà un valore maggiore o minore della formola del Heym; e precisamente lo dà maggiore, se il numero degli emigrati è maggiore di quello dei morti e viceversa.

Cerchiamo infatti in generale la differenza

$$\Delta_1 = X_z - X_h .$$

Ritenute le posizioni $v = \frac{V}{A}$, $p = \frac{E}{A}$, la (108) diventa

$$1 = \frac{v}{x} + \frac{2p}{1 + x}$$

e dà, avuto riguardo alla (116),

(129) $$X_z = \frac{p - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{p - m}{2}\right)^2 + v} ;$$

dunque, avuto riguardo alla (125),

$$\Delta_1 = \frac{p - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{p - m}{2}\right)^2 + v} - v^\delta .$$

Ma le (116) e (124) danno

$$\frac{p - m}{2} = \frac{1 - 2\delta}{2} (1 - v) ,$$

e potendosi scrivere $1-(1-v)$ in luogo di v e $[1-(1-v)]^{\delta}$ in luogo di v^{δ}, il valore di Δ_1 potrà scriversi

$$\Delta_1=\frac{1-2\delta}{2}(1-v)+\sqrt{\left(\frac{(1-2\delta)^2}{4}(1-v)^2+1-(1-v)\right)}$$
$$-[1-(1-v)]^{\delta},$$

e svilupparsi quindi per potenze crescenti di $(1-v)$. Operando si trova

$$\Delta_1=\frac{\delta(1-\delta)(1-2\delta)(1-v)^3}{12}\left(1+(3-2\delta)\frac{1-v}{2}+\ldots\right).$$

Osservando che è sempre $\delta<1$, si deduce da questo valore di Δ_1 che ai tre casi

$$1-2\delta>0\,,\qquad 1-2\delta=0\,,\qquad 1-2\delta<0$$

corrispondono i tre

$$\Delta_1>0\,,\qquad \Delta_1=0\,,\qquad \Delta_1<0\,;$$

ossia: ai tre casi

$$E>M\,,\qquad E=M\,,\qquad E<M\,,$$

corrispondono i tre

$$X_z>X_h\,,\qquad X_z=X_h\,,\qquad X_z<X_h\,.$$

33. Consideriamo per ultimo il valore dato dalla formola (103), valore che chiameremo X_g, cosicchè sarà:

$$X_g=\frac{V+\frac{1}{2}E}{A-\frac{1}{2}E}\,, \tag{130}$$

e confrontiamolo col valore $X_{w'}$ dato dalla (107). Essendo la $X_{w'}$ radice dell'equazione (107), avremo:

$$A=\frac{V}{X_{w'}}-\frac{E(1-X_{w'})}{X_{w'}\log.X_{w'}}\,,$$

e quindi anche

$$\textbf{(131)} \qquad A X_{w'} - V = -E . \frac{1 - X_{w'}}{\log . X_{w'}} .$$

Ma

$$-\log . X_{w'} = (1 - X_{w'}) + \frac{1}{2}(1 - X_{w'})^2 + \ldots$$

e

$$-\frac{\log . X_{w'}}{1 - X_{w'}} = 1 + \frac{1}{2}(1 - X_{w'}) + \frac{1}{3}(1 - X_{w'})^2 + \ldots ;$$

da cui facilmente si ha

$$-\frac{1 - X_{w'}}{\log . X_{w'}} = 1 - \frac{1}{2}(1 - X_{w'}) - \frac{1}{12}(1 - X_{w'})^2 - \frac{1}{24}(1 - X_{w'})^3 - \ldots$$

Ponendo dunque per brevità

$$Z = \frac{1}{12}(1 - X_{w'})^2 + \frac{1}{24}(1 - X_{w'})^3 + \ldots$$

sarà $Z > 0$, e si avrà

$$-\frac{1 - X_{w'}}{\log . X_{w'}} = 1 - \frac{1}{2}(1 - X_{w'}) - Z ,$$

cioè

$$-\frac{1 - X_{w'}}{\log . X_{w'}} = \frac{1 + X_{w'}}{2} - Z ;$$

col che la (131) diventa

$$A X_{w'} - V = \frac{E (1 + X_{w'})}{2} - E Z ,$$

ossia, cavando il valore di $X_{w'}$,

$$X_{w'} = \frac{V + \frac{1}{2} E}{A - \frac{1}{2} E} - \frac{E Z}{A - \frac{1}{2} E} ,$$

e quindi per la (130)

$$X_{w'} = X_g - \frac{E Z}{A - \frac{1}{2} E} .$$

Dunque, essendo Z una quantità positiva,

$$X_{w'} < X_g .$$

Quanto al valore di x dato dalla (104), avuto riguardo ai diversi valori che possano avere le t_1, t_2, ecc., esso può naturalmente essere maggiore o minore di uno qualunque di quelli dati dalle altre formole, ad eccezione dei valori massimo e minimo dati dalle (101) e (102).

Riassumendo i risultati di questo paragrafo relativamente ai valori del coefficiente di sopravvivenza x, dati dalle varie formole considerate, noi possiamo dire: il massimo valore è dato dalla formola (102); poi vengono, con ordine decrescente, i valori:

X_g dato dalla (103);

$X_{w'}$ » (107), dovuta al Wittstein;

X_w » (106), id. ;

X_h ed X_z dati dalle (105) e (108), dovute rispettivamente al Heym ed allo Zeuner;

X dato dalla (109), superiormente dedotta;

e finalmente il valore minimo dato dalla (101).

Quanto ai due valori X_h ed X_z dovuti al Heym ed allo Zeuner, quello del Heym è maggiore, eguale o minore di quello dello Zeuner, secondochè il numero dei morti osservati è rispettivamente maggiore, eguale o minore del numero degli emigrati.

§ VII.

Formole pratiche.

34. La bontà di una formola, per il calcolo della mortalità nel caso che qui consideriamo, può giudicarsi dal punto di vista intrinseco, in quanto cioè le ipotesi sulle quali la formola è appoggiata, corrispondano più o meno al modo in cui l'emigrazione e le morti sono realmente avvenute; e questo è certo il punto di vista essenziale. Ma può anche considerarsi dal punto di vista della facilità con cui la formola si può numericamente applicare; la quale cosa ha pure un gran valore quando il calcolo della formola debba eseguirsi molte volte di seguito.

Intorno al primo punto di vista si sono esposte sopra alcune considerazioni (numeri 24 e 25). Soggiungeremo soltanto come la formola (104) meriti specialmente di essere considerata per tutti quei casi nei quali l'andamento della emigrazione sia noto e sia troppo discordante dalle ipotesi che hanno dato origine alle altre formole. Con quella formola si può infatti approssimarsi, fino a quel grado che meglio si crede, all'andamento vero della emigrazione e dedurre quindi con molta maggiore precisione il coefficiente di mortalità. Di questa formola, come delle altre, daremo in fine un esempio numerico.

Esaminando le formole (101) ... (109) sotto il secondo punto di vista, quello cioè della maggiore o minore facilità del calcolo numerico, si vede senz'altro che le formole (101), (102) e (103) sono di facilissima applicazione numerica; ed anche la (105), dovuta al Heym, sebbene non così semplice come le precedenti, si presta facilmente al calcolo logaritmico. Tutte queste formole si possono dunque ritenere per adatte al calcolo numerico.

La (108), dovuta allo Zeuner, implica la risoluzione di una equazione di 2° grado; la (104) la risoluzione di un'equazione di grado $n+1$; finalmente le (106) e (107), dovute al Wittstein, e la (109), superiormente dedotta, la risoluzione d'una equazione trascendente. In generale adunque queste formole sono meno adatte al calcolo numerico.

Ma siccome le ipotesi da cui furono dedotte possono essere giudicate più corrispondenti alla realtà dei fatti, così conviene esaminare come si possano abbastanza speditamente avere i valori dati da queste formole, sia sostituendovi delle formole approssimate, sufficienti in pratica, sia indicando qualche procedimento facile di successiva approssimazione.

Lo Zeuner [1] parlando delle formole (106) e (107) del Wittstein osserva che esse sono disadatte al calcolo diretto della x. Questa osservazione però perde in pratica il suo valore quando si riesca (come fece il Wittstein) a sostituirvi delle formole approssimate, le quali, mentre conservano il carattere speciale dell'ipotesi su cui sono fondate, danno d'altra parte per la x un valore abbastanza esatto per la pratica.

Lo Zeuner stesso è entrato in questo concetto dell'approssimazione, poichè, oltre a dare il valore esatto della sua formola, ne dà dei valori approssimati. Il valore esatto è dato dalla (129); chiamandolo X_z, come sopra si è fatto, sarà:

[1] *Abhandlungen*, pag. 110.

$$(\mathbf{132}) \qquad X_z = \frac{E-M}{2A} + \sqrt{\left(\frac{E-M}{2A}\right)^2 + \frac{V}{A}} \text{ [1]}.$$

Egli dà inoltre due valori approssimati, di cui l'uno, che diremo X'_z, si ottiene come segue: si sviluppi il quadrato sotto il radicale, dopo aver posto $M = A - V - E$, e si avrà:

$$\left(\frac{E-M}{2A}\right)^2 + \frac{V}{A} = \frac{(E-M)^2 + 4AV}{4A^2} =$$

$$\frac{(A+V)^2 - 4E(A-V-E)}{4A^2} = \frac{(A+V)^2 - 4EM}{4A^2},$$

e quindi

$$X_z = \frac{E-M}{2A} + \frac{A+V}{2A} \cdot \sqrt{1 - \frac{4EM}{(A+V)^2}}.$$

Ritenendo ora i primi due termini dello sviluppo del radicale, fatte alcune riduzioni, si arriva alla formola approssimata

$$(\mathbf{133}) \qquad X'_z = \frac{V}{A} + \frac{E}{A} \cdot \frac{2V+E}{A+V}.$$

Lo Zeuner ottiene poi l'altro valore approssimato, che diremo X''_z, trascurando nella (132) il quadrato $\left(\frac{E-M}{2A}\right)^2$, col che si ha

$$(\mathbf{134}) \qquad X''_z = \frac{E-M}{2A} + \sqrt{\frac{V}{A}}.$$

Il valore X'_z è un po' maggiore del valore esatto, poichè vi si trascurano dei termini negativi.

Delle due formole approssimate lo Zeuner ritiene in generale preferibile la prima. Egli dà anche un metodo [2] per calcolare la X_z mediante successive approssimazioni, anzichè mediante la (132).

Quanto al processo di calcolo proposto dal Dienger, esso conduce, come abbiamo sopra osservato (numero 22), allo stesso valore numerico dato dallo Zeuner; ma vi conduce per una via più lunga, e quindi da non seguirsi. Il Dienger poi non dà alcuna formola approssimata.

[1] *Abhandlungen*, pag. 122, formola (36*a*).

[2] *Idem*, pag. 123.

35. Veniamo ora alla risoluzione della (104). Se in essa si pone $z = 1 - x$ si ha:

$$(135) \qquad A = \frac{V}{1-z} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1 - z t_i},$$

e quando le E_i siano positive, essa possiede $n+1$ radici reali comprese fra i limiti

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{t_n}, \quad \frac{1}{t_{n-1}}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{t_1},$$

come è facile dimostrare. Se alcune delle E_i sono negative, l'equazione può avere delle radici immaginarie.

La radice che fa al caso nostro è quella compresa fra 0 ed 1 (numero 29). In generale le E_i sono piccole rispetto a V, e quindi si potrà convenientemente determinare la radice cercata calcolando il termine

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1 - z t_i}$$

con un valore approssimato di z, per esempio, con

$$z_0 = \frac{M}{A - \frac{1}{2} E}$$

dato dalla (70). Si avrà così

$$(136) \qquad \sigma_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_i}{1 - z_0 t_i},$$

e quindi

$$A = \frac{V}{1-z} + \sigma_0,$$

da cui un primo valore

$$(137) \qquad x_1 = 1 - z_1 = \frac{V}{A - \sigma_0},$$

col quale si potrà procedere ad ulteriori approssimazioni.

Più rapidamente si giungerà alla determinazione della radice cercata, stabilendo il valore approssimato z_0 nella supposizione che tutte le emigrazioni E_i abbiano avuto luogo ad un tempo T intermedio ai tempi t_1, t_2, ..., t_n, e determinato dall'equazione

$$(138)\qquad T=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} E_i t_i}{\sum_{i=1}^{i=n} E_i}$$

analoga a quella che serve a determinare la posizione del centro di gravità. Per determinare z_0 si avrà allora l'equazione

$$(139)\qquad A=\frac{V}{1-z_0}+\frac{E}{1-z_0 T},$$

da cui

$$(140)\qquad z_0=\alpha_0-\sqrt{\alpha_0^2-\frac{M}{AT}},$$

dove

$$(141)\qquad \alpha_0=\frac{T(A-V)+A-E}{2AT}.$$

Con questo valore di z_0 si procederà poi come sopra.

I valori di σ_0 e di T possono esprimersi anche come segue: si ha

$$\frac{E_i}{1-z_0 t_i}=E_i\,(1+z_0 t_i+z_0^2 t_i^2+\ldots\ldots).$$

Ponendo dunque

$$(142)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} E_i \quad =E\,,\\ &\sum_{i=1}^{i=n} E_i t_i=\beta_1\,,\\ &\sum_{i=1}^{i=n} E_i t_i^2=\beta_2\,,\\ &\text{ecc.}\,,\end{aligned}\right.$$

si avrà:

$$(143)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_0=E+\beta_1 z_0+\beta_2 z_0^2+\ldots\ldots,\\ &T=\frac{\beta_1}{E}\,.\end{aligned}\right.$$

Osserviamo intanto che se l'emigrazione diventa uniforme per tutto il periodo di tempo, la (104) si trasforma nella (106), come abbiamo sopra osservato (numero 27). In tal caso la (138) diventa

$$T = \frac{\int_0^1 E t\, dt}{E} = \frac{1}{2},$$

e la (139)

$$A = \frac{V}{1 - z_0} + \frac{E}{1 - \frac{1}{2} z_0},$$

ossia, ponendo $z_0 = 1 - x_0$,

$$A = \frac{V}{x_0} + \frac{2E}{1 + x_0},$$

che è la formola dello Zeuner.

Da questo punto di vista si può dunque dire che il valore dato dalla formola dello Zeuner è un valore approssimato della formola (106) del Wittstein.

36. Anche il Wittstein ha dato, in sostituzione delle formole (106) e (107) a lui dovute, delle formole approssimate [1] che ora dedurremo. Si è sopra trovato (119)

$$\frac{\log . x}{1 - x} = -\left(1 + \frac{1}{2}(1 - x) + \frac{1}{3}(1 - x)^2 + \ldots\ldots\right),$$

da cui facilmente

$$\frac{1 - x}{\log . x} = -\left(1 - \frac{1}{2}(1 - x) - \frac{1}{12}(1 - x)^2 - \ldots\ldots\right).$$

Si avrà inoltre

$$\frac{x \log . x}{1 - x} = \frac{[1 - (1 - x)] \log . x}{1 - x} = -\left(1 - \frac{1}{2}(1 - x) - \frac{1}{6}(1 - x)^2 - \ldots\right).$$

Con ciò le (106) e (107) diventano, tenendo conto dei soli primi tre termini della serie

$$Ax = V + E\left(1 - \frac{1}{2}(1 - x) - \frac{1}{6}(1 - x)^2\right) = V + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}Ex - \frac{E}{6}(1 - x)^2,$$

$$Ax = V + E\left(1 - \frac{1}{2}(1 - x) - \frac{1}{12}(1 - x)^2\right) = V + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}Ex - \frac{E}{12}(1 - x)^2,$$

[1] *Grunert's Archiv*, XXXIX Theil, pag. 75 e 77, formole (22) e (28).

e da queste si ottiene

$$x = \frac{V + \frac{1}{2}E}{A - \frac{1}{2}E} - \frac{\frac{1}{6}E(1-x)^2}{A - \frac{1}{2}E}, \qquad x = \frac{V + \frac{1}{2}E}{A - \frac{1}{2}E} - \frac{\frac{1}{12}E(1-x)^2}{A - \frac{1}{2}E}.$$

Ritenendo come prima approssimazione

$$X_g = \frac{V + \frac{1}{2}E}{A - \frac{1}{2}E}, \tag{144}$$

e sostituendo questo valore nel secondo membro in luogo di x, e chiamando rispettivamente X'_w ed $X'_{w'}$ i valori che si ottengono, si ha come formola approssimata della (106)

$$X'_w = X_g - \frac{EM^2}{6\left(A - \frac{1}{2}E\right)^3}, \tag{145}$$

e come formola approssimata della (107)

$$X'_{w'} = X_g - \frac{EM^2}{12\left(A - \frac{1}{2}E\right)^3}. \tag{146}$$

Il Wittstein, che dà queste formole, opina del resto che nel caso di assicurazione sulla vita, la formola (144) dia già un valore abbastanza approssimato. La (144) non è altro che la (130), ossia la (103), sopra trovata per altra via.

37. Anche alla formola (109) si possono sostituire delle formole più semplici per giungere a conoscere il valore di x con sufficiente approssimazione nei casi della pratica. Ritenute le abbreviazioni

$$\frac{V}{A} = v, \qquad \frac{M}{A} = m,$$

la (109) può scriversi

$$(1-x)(x-v) - m\,x \log.\frac{x}{v} = 0.$$

Considerando la curva

$$(147) \qquad y=(1-x)(x-v)-m\,x\log.\frac{x}{v}$$

si vede (figura 6)

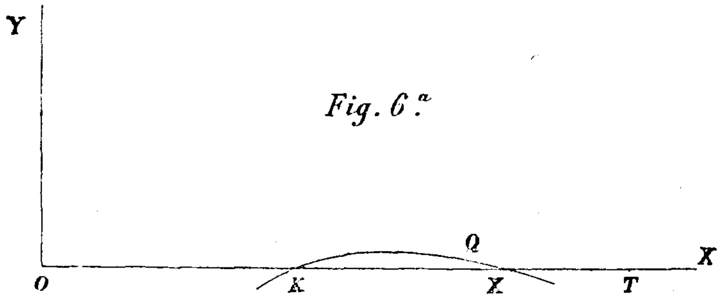


Fig. 6.ª

che essa interseca l'asse delle x per $x=v$; e si tratterà dunque di trovare per quale altra ascissa, compresa fra v ed 1, la curva intersechi ancora l'asse delle x. Si ha intanto

$$\frac{dy}{dx}=p-2(x-v)-m\log.\frac{x}{v}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-2-\frac{m}{x},$$

dalla seconda delle quali si desume che la curva non ha flessi.

Seguendo adunque un procedimento analogo a quello esposto in altro lavoro [1], potremo prendere una parabola coll'asse parallelo all'asse delle y, la quale passi per il punto K ed abbia in esso punto colle curva (147) comuni il $\frac{dy}{dx}$ ed il $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'equazione generale di tale parabola è

$$(148) \qquad \alpha-y_1=\beta(\gamma-x_1)^2$$

ed avremo

$$\frac{dy_1}{dx_1}=2\beta(\gamma-x_1), \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2}=-2\beta.$$

[1] *De quaestione radicum realium cuiuslibet aequationis numericae unius incognitae* - Giornale di matematiche, volume XIII. Napoli.

Le α, β e γ sono costanti da determinarsi. Dovendo la parabola passare per il punto K dovrà essere $y_1=0$ per $x_1=v$, cioè sarà:

$$\alpha=\beta(\gamma-v)^2. \tag{149}$$

Dovendo essa in secondo luogo avere nel punto K la tangente comune colla curva (147), sarà

$$p=2\beta(\gamma-v)\,, \tag{150}$$

e dovendo finalmente aver comune in esso punto il $\frac{d^2y}{dx^2}$, sarà

$$-2-\frac{m}{v}=-2\beta\,. \tag{151}$$

Le (149), (150) e (151) determinano le costanti α, β e γ. Ma la parabola interseca l'asse delle x nei punti determinati dalle ascisse

$$X'=\gamma+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,,\qquad X''=\gamma-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,.$$

Ora per la (149) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\gamma-v$, dunque

$$X'=2\gamma-v\,,\qquad X''=v\,.$$

Lasciando dunque la X'', che non fa per noi, avremo il valore approssimato X', il quale, posto per 2γ il valore ottenuto dalle (150) e (151), diventa, dopo facili riduzioni,

$$X'=\frac{V\left(A-\frac{1}{2}M\right)}{A\left(V+\frac{1}{2}M\right)}\,. \tag{152}$$

Siccome il $\frac{d^2y}{dx^2}$ procedendo da K verso T va diminuendo numericamente per la curva (147) mentre resta costante per la parabola, ne viene che l'ascissa X' è minore della vera radice X dell'equazione (109).

Questo risultato è dunque favorevole, quando si voglia tener conto della circostanza che i vecchi in generale emigrano meno dei giovani (vedi numero 25). Infatti il rapporto

$$\frac{\psi(V_\omega, \omega)}{V_\omega} = \beta$$

dato dalla (96), e che fu ritenuto costante nella deduzione della formola (109), in realtà va alcun poco diminuendo durante il periodo considerato; ossia, in altre parole, l'emigrazione E prevale sensibilmente verso il principio del periodo più di quello che sarebbe indicato dalla costanza di quel rapporto. Ora, per ciò che si è veduto al numero 28, questa preponderanza dell'emigrazione al principio del periodo tende a diminuire il valore della x, ed a ciò corrisponde appunto la trovata formola di approssimazione.

Qualora si desiderasse avere con maggiore precisione la vera radice dell'equazione (109), si potrebbe procedere vantaggiosamente come segue:

All'ascissa X' data dalla (152) corrisponderà nella curva (147) un punto Q che avrà l'ordinata

$$y_0 = (1 - X')(X' - v) - m X' \log. \frac{X'}{v} \tag{153}$$

e la tangente

$$t_0 = p - 2(X' - v) - m \log. \frac{X'}{v}. \tag{154}$$

Si determinino ora le costanti α, β e γ della parabola (148) in modo ch'essa passi per Q, ed abbia in Q comuni colla curva (147) tanto $\frac{dy}{dx}$, che $\frac{d^2y}{dx^2}$. Si avrà allora per la determinazione di queste costanti

$$\alpha - y_0 = \beta(\gamma - X')^2, \quad t_0 = 2\beta(\gamma - X'), \quad -2 - \frac{m}{X'} = -2\beta,$$

Questa parabola interseca l'asse delle x all'ascissa

$$X'_1 = \gamma + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

ossia si ha come secondo valore approssimato

$$X'_1 = X' + \frac{1}{\lambda}\left(t_0 + \sqrt{t_0^2 + 2\lambda y_0}\right). \tag{155}$$

dove

(156) $$\lambda = 2 + \frac{m}{X'} .$$

Mediante la X'_1 si potrebbe passare ad un successivo valore approssimato X'_2; ma nei casi ordinari non occorrerà spingere tant'oltre l'approssimazione (vedi esempio al numero 41).

Alla vera radice della (109) si può anche rapidamente accostarsi procedendo come segue:

Posta l'equazione sotto la forma

$$1 = x + \frac{m\,x \log. \frac{x}{v}}{x - v} ,$$

si ponga $x = v\,(1 + \varepsilon)$, essendo ε in generale una piccola quantità, e si sviluppi il secondo membro secondo le potenze crescenti di ε, e si avrà per determinare la ε l'equazione

$$1 = v + m + \left(v + \frac{1}{2}\,m\right)\varepsilon - m\left(\frac{\varepsilon^2}{2\,.\,3} - \frac{\varepsilon^3}{3\,.\,4} + \frac{\varepsilon^4}{4\,.\,5} - \ldots\ldots\right),$$

cioè ponendo

(157) $$S = m\,\varepsilon^2\left(\frac{1}{2\,.\,3} - \frac{\varepsilon}{3\,.\,4} + \frac{\varepsilon^2}{4\,.\,5} - \ldots\ldots\right),$$

e ricordando essere $1 = v + m + p$

$$\varepsilon = \frac{p + S}{v + \frac{1}{2}\,m} .$$

La S sarà in generale una quantità assai piccola. Trascurandola, si avrà un primo valore di ε:

(158) $$\varepsilon_0 = \frac{p}{v + \frac{1}{2}\,m} = \frac{E}{V + \frac{1}{2}\,M} ,$$

col quale, calcolata la S, se ne avrà un secondo più approssimato, e così di seguito. Ritenendo per ε il primo valore ε_0 si ha

$$X' = v\,(1 + \varepsilon_0) = v\left(1 + \frac{p}{v + \frac{1}{2}\,m}\right),$$

che facilmente si riduce ad

$$X' = \frac{V\left(A - \frac{1}{2} M\right)}{A\left(V + \frac{1}{2} M\right)},$$

valore sopra trovato per altra via.

Se si prende $S = \frac{1}{6} m \varepsilon_0^2$, si ha il valore

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\frac{1}{6} m \varepsilon_0^2}{v + \frac{1}{2} m},$$

e quindi

$$(159) \qquad X'_1 = v(1 + \varepsilon_1) = X' + \frac{\frac{1}{6} m \varepsilon_0^2 v}{v + \frac{1}{2} m},$$

che nei casi ordinari della pratica si avvicinerà sufficientemente a vero valore X.

38. Riassumendo i risultati di questo paragrafo, raccogliamo qui le formole pratiche sviluppate per servire al calcolo della x.

Prescindendo dalle due

$$(160) \qquad X_{max.} = \frac{V + E}{A} \quad \text{ed} \quad X_{min.} = \frac{V}{A - E},$$

che danno i limiti estremi del valore di x, esse sono:

$$(161) \qquad X_g = \frac{V + \frac{1}{2} E}{A - \frac{1}{2} E}$$ proposta da vari autori;

$$(162) \qquad X_h = \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{M}{M+E}}$$ proposta dal Heym;

$$(163) \qquad X'_w = \frac{V + \frac{1}{2} E}{A - \frac{1}{2} E} - \frac{\frac{1}{6} E M^2}{\left(A - \frac{1}{2} E\right)^3}$$ proposta dal Wittstein;

$$(164)\qquad X'_{(5)} = \frac{V+\frac{1}{2}E}{A+\frac{1}{2}E} - \frac{\frac{1}{12}EM^2}{\left(A-\frac{1}{2}E\right)^3}$$ proposta dal Wittstein;

$$(165)\qquad X_z = \frac{E-M}{2A} + \sqrt{\left(\frac{E-M}{2A}\right)^2 + \frac{V}{A}}$$

$$(166)\qquad X'_z = \frac{V}{A} + \frac{E}{A}\cdot\frac{2V+E}{A+V}$$

proposte dallo Zeuner;

$$(167)\qquad X' = \frac{V\left(A-\frac{1}{2}M\right)}{A\left(V+\frac{1}{2}M\right)}$$ proposta nella presente Memoria.

Le formole che si prestano ad un calcolo numerico più rapido sono evidentemente per ordine le (161), (167) e (166), cioè quelle che conducono ai tre valori X_g, X' ed X'_z. Le altre non esigono certo calcoli difficili, ma ad ogni modo più lunghi; e quindi l'uso di quelle formole non potrebbe giustificarsi se non in quei casi nei quali le ipotesi su cui sono fondate si riguardino come meglio corrispondenti alla realtà.

Gioverà intanto, prima di fare altre considerazioni intorno alle formole superiori, farne qualche applicazione numerica, nella quale però non daremo i valori risultanti dalle formole del Wittstein, limitandoci ad osservare che essi, come sopra fu dimostrato (numero 33), sono sempre compresi fra il valore X_g ed i valori del Heym e dello Zeuner. Siccome poi i valori X_z ed X'_z permettono il confronto fra il valore esatto ed il valore approssimato della formola (108) dello Zeuner, così anche per la formola (109) daremo negli esempi il valore esatto X e l'approssimato X'.

§ VIII.

Esempi e conclusioni.

39. Premettiamo agli esempi numerici due osservazioni. In primo luogo la semplice ispezione delle varie formole sopra sviluppate per il calcolo della mortalità z o del coefficiente di sopravvi-

venza x, fa vedere che il valore di queste quantità non dipende dal valore assoluto delle quattro quantità

$$A\,,\quad V\,,\quad M\,,\quad E\,,$$

che s'incontrano nelle formole, ma solamente dai rapporti fra esse quantità. E siccome d'altra parte quelle quattro quantità sono collegate dalla (29), cioè dalla

$$A = V + M + E\,,$$

ne viene che per determinare la z oppure la x basta conoscere due dei rapporti fra quelle quattro quantità. Se, per esempio, per un dato caso si sapesse che il numero dei morti osservati fu la decima parte della popolazione primitiva, e che l'emigrazione ascese a due terzi della cifra dei morti, si avrebbe quanto basta per il calcolo della z e della x.

Noteremo in secondo luogo, riferendoci a quanto fu già osservato dal Wittstein ([1]), che lo spingere il calcolo della z o della x oltre la quarta o tutt'al più la quinta decimale, è in generale cosa illusoria, poichè i dati statistici, su cui quel calcolo è basato, difficilmente raggiungono tale grado di esattezza. Inoltre, riguardo alla supposizione che l'emigrazione sia continua (nel caso matematico), è pure da osservare che essa non può esser mai assolutamente esatta; poichè meno d'un individuo alla volta non può emigrare. Simile osservazione vale per la mortalità. Anche per questa ragione lo spingere il calcolo oltre la quinta cifra diventa in generale una precisione illusoria.

Negli esempi seguenti però, allo scopo di meglio confrontare fra loro i risultati delle formole, noi spingeremo generalmente oltre la quinta cifra il calcolo della x.

40. Ciò premesso, prendiamo per primo esempio quello trattato dal Heym, e poi anche dallo Zeuner ([2]), nel quale si ha

$$A = 10000\,,\qquad M = 92,8\,,$$
$$V = 9761,3\,,\qquad E = 145,9\,.$$

([1]) *Grunert's Archiv*, Th. XXXIX, pag. 76.
([2]) *Abhandlungen*, pag. 123.

Mediante le formole superiori si trova

$$X_g = 0,9906519\,, \qquad X'_z = 0,9906515\,,$$
$$X_h = 0,9906516\,, \qquad X = 0,9906513\,,$$
$$X_z = 0,9906518\,, \qquad X' = 0,9906510\,.$$

Il calcolo si è qui spinto fino alla settima decimale per rendere sensibile l'influenza delle varie formole. Il massimo ed il minimo sarebbero

$$X_{max.} = 0,9907200\,, \qquad X_{min.} = 0,9905825\,.$$

Come si vede, i valori trovati coincidono fra loro fino alla sesta decimale inclusiva, e ciò mostra che quando il numero dei morti e degli emigrati non arriva che a due o tre centesimi della popolazione primitiva, è indifferente l'adoperare una formola piuttosto che l'altra, mentre l'influenza delle varie ipotesi, su cui le formole sono basate, svanisce entro i limiti di approssimazione a cui ragionevolmente si può spingere il calcolo (1).

Dai risultati di questo esempio lo Zeuner trova argomento di abbandonare la formola del Heym. Ma quei risultati possono invocarsi egualmente bene per abbandonare le formole dello Zeuner ed attenersi alla (161), che è la più semplice di tutte. L'esempio dunque non si presta affatto per decidere sulla rispettiva bontà delle formole. Esso prova solamente che in condizioni simili a quelle dell'esempio, qualunque delle formole proposte può egualmente servire.

41. Ma veniamo ad un esempio nel quale il numero dei morti e degli emigrati sia più sensibile rispetto alla popolazione primitiva. Abbiasi

$$A = 10000\,, \qquad M = 1500\,,$$
$$V = 7300\,, \qquad E = 1200\,.$$

Calcolando a sei cifre decimali si trova

$$X_g = 0,840425\,, \qquad X'_z = 0,839595\,,$$
$$X_h = 0,839592\,, \qquad X = 0,839290\,,$$
$$X_z = 0,839532\,, \qquad X' = 0,838820\,.$$

(1) Il WITTSTEIN fa una simile osservazione rispetto alle proprie ipotesi. *Grunert's Archiv*, Th. XXXIX, pag. 72.

I valori estremi sono

$$X_{\text{max.}} = 0,\ 850000\ , \qquad X_{\text{min.}} = 0,\ 829545\ .$$

Si vede che in questo esempio la formola del Heym e quella approssimata dello Zeuner non danno differenza sensibile nei risultati. Invece i due valori X_g ed X', basati su ipotesi differenti, si allontanano sensibilmente in senso inverso da quelli di Heym e di Zeuner.

In questo esempio per calcolare la X si è fatto uso della formola (155). Dalle (153), (154) e (156) si ha

$$\begin{aligned} y_0 &= 0,\ 0000559\ , \\ t_0 &= -0,\ 1184827\ , \\ \lambda &= 2,\ 178826\ , \end{aligned}$$

e quindi la correzione da farsi ad X'

$$\frac{1}{\lambda}\left(t_0 + \sqrt{t_0^2 + 2\lambda\, y_0}\right) = +\,0,\ 000470\ .$$

Il valore $X = 0,\ 839290$ così ottenuto è inferiore di sole tre unità circa nell'ultima cifra alla vera radice, come risulta da un'ulteriore approssimazione.

42. Facciamo ora un esempio in cui prevalga la immigrazione, cioè la E sia negativa, e prendiamo:

$$\begin{aligned} A &= 10000\ , \qquad & M &= 2200\ , \\ V &= 9000\ , \qquad & E &= -1200\ . \end{aligned}$$

Calcolando a sei decimali si troverà

$$\begin{aligned} X_g &= 0,\ 792453\ , \qquad & X'_z &= 0,\ 793\cdot 95\ , \\ X_h &= 0,\ 793110\ , \qquad & X\ &= 0,\ 793530\ , \\ X_z &= 0,\ 793795\ , \qquad & X'\ &= 0,\ 793069\ . \end{aligned}$$

Il massimo ed il minimo si ottengono ancora dalle formole (101) e (102), ma essendo qui la E negativa, i valori restano permutati. Infatti la (101) dà

$$X_{\text{max.}} = 0,\ 803571\ .$$

e la (102)

$$X_{\text{min.}} = 0,\ 780000\ .$$

La X fu qui calcolata mediante le formole (158) e (159), le quali danno

$$\varepsilon_0 = -0,118812 ,$$

e quindi la correzione da farsi ad X'

$$\frac{\frac{1}{6} m \varepsilon_0^2 v}{v + \frac{1}{2} m} = +0,000461 .$$

Si ha dunque $X = 0,793530$. Con un'ulteriore approssimazione si ottiene più esattamente $X = 0,793555$.

43. Trattiamo per ultimo un esempio nel quale l'emigrazione abbia avuto luogo in modo discontinuo, e siano note le epoche in cui le successive emigrazioni parziali ebbero luogo.

Da una popolazione iniziale, che al principio dell'anno era di 10000 persone, tutte della stessa età, emigrarono 500 persone alla fine di febbraio, 1200 alla fine di marzo, 400 alla fine di luglio. Alla fine di ottobre ripatriarono poi 300 emigrati. Compiuto l'anno le morti avveratesi in patria sommarono a 156. Domandasi la mortalità relativa a questo caso.

Dovremo far uso delle formole (137)...(143). Preso l'anno per unità di tempo, dovremo porre

$$\begin{array}{llll} A = & 10000 , & & \\ E_1 = & 500 , & t_1 = \frac{2}{12} , \\ E_2 = & 1200 , & t_2 = \frac{3}{12} , \\ E_3 = & 400 , & t_3 = \frac{7}{12} , \\ E_4 = & -300 , & t_4 = \frac{10}{12} , \\ M = & 156 . & \end{array}$$

Avremo dunque

$$\Sigma E_i = E = 1800 ,$$

e per la $A = V + M + E$ sarà:

$$V = 8044.$$

Dalle (142) si avrà inoltre

$$\beta_1 = 366,\ 667\ , \qquad \beta_2 = 16,\ 667\ .$$

La seconda delle (143) dà circa

$$T = 0,\ 2\ ;$$

col qual valore le (141) e (140) danno

$$z_o = 0,\ 018\ .$$

Con questo valore approssimato la prima delle (143) darà

$$\sigma_o = 1806,\ 605\ ,$$

e quindi la (137) darà un primo valore di x, cioè

$$x_1 = 0,\ 981766\ .$$

Da questo si ottiene

$$z_1 = 1 - x_1 = 0,\ 018234\ ;$$

col qual valore ricalcolando la σ_o si ha

$$\sigma_1 = 1806,\ 691\ ,$$

e quindi dalla (137) si avrà un secondo valore di x, cioè

$$x_2 = 0,\ 981777\ ,$$

che poco differisce dal precedente ed al quale quindi potremo arrestarci.

Se l'esempio presente si fosse trattato colle formole dell'emigrazione continua, senza tener conto dei tempi t_1, t_2, ..., cioè ponendo in esse formole

$$A = 10000\ , \qquad V = 8044\ , \qquad M = 156\ , \qquad E = 1800\ ,$$

si sarebbe trovato

$$X_g = 0,\ 982857\ , \qquad X'_2 = 0,\ 982844\ ,$$

$$X_h = 0,\ 982791\ , \qquad X' = 0,\ 982671\ ,$$

i quali, come si vede, superano tutti sensibilmente il valore sopra trovato.

44. Da quanto precede noi possiamo conchiudere che:

1° Quando il numero dei morti e degli emigrati non supera i due o tre centesimi della popolazione iniziale, le varie formole proposte conducono a risultati numerici quasi identici, e quindi sono preferibili le formole (161) oppure (167), che sono le più semplici;

2° Quando il numero dei morti e degli emigrati sia più sensibile, fino al quindici o venti per cento della popolazione primitiva, le varie formole danno risultati numerici sensibilmente diversi; ed in tal caso, quando nulla si sappia intorno al modo con cui fu distribuita l'emigrazione, la formola (167) ci sembra preferibile, mentre non solo presenta una grande semplicità per il calcolo numerico, ma è basata sopra un'ipotesi per la quale militano varie considerazioni (vedi numero 25). La formola (161), come risulta dalla fatta discussione (numero 33) e dagli esempi numerici, dà in generale per la probabilità x un valore troppo elevato;

3° Qualora il numero dei morti e degli emigrati sia abbastanza sensibile da escludere il caso 1°, e si sappia con più o meno sicurezza il modo con cui fu distribuita l'emigrazione, gioverà meglio ricorrere alla formola (104), anzichè ad altre formole basate sopra ipotesi che non corrispondano al noto andamento dell'emigrazione. Il calcolo della formola (104) però è necessariamente meno spedito di quello delle altre, come può vedersi dal numero 35 e dall'esempio al numero 43;

4° Bisogna per ultimo avvertire che quando il numero dei morti e degli emigrati supera il venticinque o trenta per cento della popolazione primitiva, e poco o nulla si sappia del modo con cui fu distribuita l'emigrazione, il risultato sarà sempre mal sicuro, qualunque sia la formola che si adopera, attesa la possibile discordanza fra l'ipotesi a cui si appoggia la formola e la realtà.

45. Faremo per ultimo un brevissimo cenno di una questione che si collega con quella finora trattata, perchè essa pure dipende dalla scelta che si fa della formola per la valutazione della mortalità.

Il concetto superiormente attribuito alla quantità E, cioè di un certo numero di persone che emigrano dalla patria, può generalizzarsi in vari modi. Considerando, per esempio, le persone A come lavoratori, per E possono intendersi quelli fra questi lavoratori che entro un dato periodo di tempo diventano inabili al lavoro. Considerando le persone A come ragazze, con E possono intendersi quelle di esse che si maritano entro un certo periodo di tempo [1].

Il Wittstein e lo Zeuner applicano rispettivamente le formole (144) e (108) da loro trovate a questi casi, senza discutere se a questi casi possano convenire.

Per decidere se tale applicazione sia senz'altro permessa, bisogna esaminare se nei casi ai quali le formole si vogliono estendere la legge con cui, entro il periodo considerato, si effettua l'emigrazione E (la legge cioè secondo la quale gli operai diventano successivamente invalidi, e simili) corrisponda o meno all'ipotesi fatta nel trovare la formola. Ora il Wittstein suppone un'emigrazione uniforme durante tutto il periodo di tempo; lo Zeuner invece suppone che l'emigrazione abbondi al principio del periodo, e vada poi decrescendo verso la fine.

Limitandoci al caso dell'inabilità al lavoro, si può dunque fare la seguente domanda: L'inabilità successiva degli operai al lavoro si effettua essa secondo le leggi supposte dal Wittstein e dallo Zeuner per l'emigrazione? Esaminando la tabella data dallo stesso Zeuner [2], si deduce il contrario. Coll'aumentare del tempo (diventando dunque gli operai più vecchi) i casi d'inabilità al lavoro aumentano lentamente in principio, poi sempre più rapidamente. L'emigrazione dunque per questo caso è lenta al principio del periodo di tempo e diventa sempre più sensibile verso la fine. Con questa legge di emigrazione le formole del Wittstein non si presentano come opportune per il caso d'inabilità qui considerato, e meno ancora la formola dello Zeuner.

È ben vero però che quando il periodo di tempo si limita ad un anno, e quando la probabilità di diventare invalido entro quell'anno è assai piccola, allora le varie formole danno risultati sensibilmente uguali (numero 40). Tuttavia può domandarsi se fra le formole raccolte al numero 38 non ve ne sia alcuna che si presti al caso dell'inabilità qui considerato meglio delle formole del Wittstein e dello Zeuner.

(1) Vedi Wittstein, *Grunert's Archiv*, Theil XXXIX, pag. 90 e seguenti; e Zeuner, *Abhandlungen*, pag. 129 e seguenti, e pag. 149 e seguenti.

(2) *Abhandlungen*, *Anhang*.

Si è veduto al numero 23 che la formola (161) può ottenersi supponendo una curva di sopravvivenza iperbolica ed una emigrazione uniforme. Ma la curva di sopravvivenza iperbolica non è plausibile, come osserva lo stesso Wittstein [1]. Se per curva di sopravvivenza, entro il breve periodo di tempo, si prende una retta, e si voglia pur giungere alla stessa formola (161), bisognerà che l'emigrazione sia lenta al principio del periodo e vada crescendo verso la fine (numero 28). La formola (161) risponde dunque, meglio che un'altra qualunque di quelle esposte al numero 38, al caso dell'inabilità al lavoro, e dovrebbe essere perciò preferita.

In questo caso dell'inabilità al lavoro possono considerarsi le seguenti diverse probabilità [2]:

$\frac{E}{A} = p =$ probabilità di diventare invalido entro il periodo di tempo considerato;

$\frac{V'}{A} = v' =$ probabilità di diventare invalido e di non morire entro il detto periodo;

$\frac{M'}{A} = m' =$ probabilità di diventare invalido e di morire entro il periodo;

$\frac{V}{A} = v =$ probabilità di vivere, senza diventare invalido, fino alla fine del periodo;

$\frac{M}{A} = m =$ probabilità di morire entro il periodo senza essere prima diventato invalido;

$\frac{V+V'}{A} = x =$ probabilità di vivere fino alla fine del periodo, invalido o no;

$\frac{M+M'}{A} = z =$ probabilità di morire entro il periodo, invalido o no.

Fra queste diverse probabilità, attese le note relazioni

$$E = V' + M', \qquad A = V + M + E ,$$

e l'espressione dei valori di x e di z, hanno luogo le seguenti relazioni (qualora si possa ammettere che la mortalità per gl'invalidi sia la stessa che per quelli che sono ancora abili al lavoro):

(1) *Grunert's Archiv*, Theil XXXIX, pag. 80.

(2) Zeuner, *Abbandlungen*, pag. 130 e seguenti.

$$p = v' + m' , \qquad x = v + v' ,$$
$$1 = v + m + p , \qquad z = m + m' .$$

A queste relazioni (o ad altre equivalenti) lo Zeuner aggiunge la sua formola (108).

Se invece, come crediamo più giusto, si fa uso della formola (161), si dovrà aggiungere la relazione

$$x = \frac{2v + p}{2 - p} .$$

Qualora poi si tratti di ragazze che si maritano, la formola (161) non sembra più opportuna per tutte le età. Avuto riguardo all'andamento delle tabelle riportate dal Wittstein e dallo Zeuner [1], si potrà adottare la formola (161) solamente fino all'età di anni 28, e ricorrere invece alla formola (108) dello Zeuner od alla (167) per età maggiori.

Crediamo perciò che le tabelle portate dai suddetti autori, tanto per l'invalidità che per i matrimoni, dovrebbero essere opportunamente modificate.

Roma, decembre 1882.

[1] WITTSTEIN: *Grunert's Archiv*, Theil XXXIX, pag. 92. — ZEUNER: *Abhandlungen*, *Anhang*.

NUOVE APPLICAZIONI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

ALLO STUDIO DEI FENOMENI STATISTICI

E DISTRIBUZIONE DEI MEDESIMI SECONDO L'ETÀ DEGLI SPOSI

Memoria dell'ingegnere LUIGI PEROZZO (*).

I.

§ 1. Recenti studi iniziati per cura della Direzione Generale della statistica del regno, sulla distribuzione dei matrimoni secondo le età degli sposi, e sulla classificazione degli impiegati nelle amministrazioni governative per anni di età ed anni di servizio, hanno dimostrato potersi fare un'applicazione del calcolo delle probabilità allo studio dei fenomeni statistici molto più estesa di quella fatta finora. Diremo brevemente del metodo delle nuove applicazioni, indi esporremo i risultati delle indagini eseguite sulla distribuzione dei matrimoni.

Ricordiamo anzitutto le precedenti ricerche attinenti alla statistica demografica, il principio su cui si fondavano ed i limiti della loro estensione. Quetelet dimostrava per il primo come la distribuzione dei fenomeni statistici intorno ad una media, quando fosse puramente dovuta a cause accidentali, dovesse coincidere con quella degli errori casuali e fortuiti nelle osservazioni sperimentali (1). Quindi rinveniva nella ripartizione dei giovani, chiamati alle leve militari, classificati secondo la statura, la compiuta realizzazione

(*) Questa Memoria fu inserita negli Atti dell'Accademia dei Lincei (anno CCLXXIX, 1881-1882). In questa ristampa si introducono alcune lievi modificazioni.

(1) *Sur l'homme et le développement des ses facultés, ou Essai de physique sociale* (Paris, Bachelier, 1835).

delle sue previsioni. Donde quelle estese ed accurate misurazioni fatte poi in diversi Stati, e da 8 anni in Italia, le quali hanno sempre confermato la verità della legge.

Da Quetelet in poi altri hanno recato notevoli contribuzioni alla statistica matematica; citiamo fra i più noti, il Lexis, il Knapp e lo Zeuner. Il Lexis dava un nuovo esempio di distribuzione di un fenomeno demografico secondo la legge degli errori accidentali, nella ripartizione dei morti per età dal 70° anno, circa, in poi (1). Il Knapp porgeva una compiuta e rigorosa trattazione, col calcolo infinitesimale, delle classi di viventi e di morti, distinti per età, per anni di nascita, e tempo di osservazione, e dei metodi di calcolo della mortalità (2). E lo Zeuner suggeriva le rappresentazioni dei fenomeni statistici coi metodi della geometria analitica a tre dimensioni (3).

Mentre prendeva tali svolgimenti la statistica matematica, altre scienze pure ed applicate si giovavano dei recenti progressi del calcolo delle probabilità. Son noti, per la balistica, i lavori di Didion (4), di Wuich (5) e di Sciacci (6) sulla distribuzione areale dei proiettili cadenti su di un piano, e per la teoria cinetica dei gas gli studi di Maxwell, riassunti chiaramente nell'opera di Oskar Emil Meyer (7).

Importa notare che nell'uso sinora fatto del calcolo delle probabilità per la statistica, e specialmente per la demografia, si sono considerati quei fenomeni che variano per rispetto ad un solo parametro, come ad esempio il numero dei misurati per rispetto alla statura. E quindi non si aveva da considerare che la linea di probabile ripartizione, identica alla curva degli errori accidentali.

(1) *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft.* (Freiburg i. B. Fr. Wagners'sche Buchhandlung, 1877).

(2) *Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit* (Leipzig, Hinrich'sche Buchhandlung, 1868). — *Theorie des Bevölkerungs-Wechsels* (Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1874).

(3) *Abhandlungen zur mathematischen Statistik* (Leipzig, Arthur Felix, 1869).

(4) *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles* (Paris, J. Dumaine, 1858).

(5) *Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung in Gebiete des Schiesswesens* (I e II. Lieferung. Vienna, Seidel et Sohn, 1877 e 1879).

(6) *Sugli assi delle rose di tiro,* giornale d'artiglieria e genio, 2a parte, 1883.

(7) *Die Kinetische Theorie der Gase* (Breslau, Maruschke et Berendt, 1877)

Mentre, per converso, nella distribuzione areale dei proiettili si considerano due spostamenti secondo due direzioni perpendicolari nel piano, donde la rappresentazione del numero dei proiettili cadenti sui diversi punti di un piano, secondo una superficie di probabilità. Le curve di egual numero di proiettili sono allora le sezioni orizzantali di questa superficie e risultano, teoricamente, ellissi concentriche e simili.

Nella teoria cinetica dei gas si considerano le traiettorie dell'atomo della molecola gassosa in tutte le direzioni possibili dello spazio, le quali vengono riferite a tre assi perpendicolari, donde la considerazione della probabilità per rispetto a tre parametri indipendenti, e lo spazio di distribuzione probabile. Le superficie di egual numero di molecole o di eguali velocità sono elissoidi concentrici e simili.

Orbene, applicazioni analoghe sono perfettamente possibili nello studio dei fenomeni statistici. La comune opinione che le previsioni statistiche non possano essere sicure, si fonda sulla convinzione che nelle osservazioni fatte di fenomeni consimili non sia stato tenuto calcolo di tutti quegli elementi di varia natura che potevano agire sul fenomeno. Per dare maggiore sicurezza alle deduzioni della statistica occorre quindi che le osservazioni registrino per ogni fenomeno il maggior numero di elementi numericamente valutabili e di diversa indole. E poichè, così procedendo, il materiale di cifre cresce in modo considerevole, è maggiore la necessità di coordinarlo razionalmente, ed indagarlo colla scorta degli sviluppi più estesi dell'analisi delle probabilità.

§ 2. La distribuzione dei matrimoni per età dei coniugi dipende per sua natura da due parametri: l'età del marito e quella della moglie. Tutte le pubblicazioni statistiche italiane ed estere, riguardanti il movimento dello stato civile, presentano tavole a doppia entrata dei matrimoni avvenuti in un periodo di tempo per intervalli di età procedenti ordinariamente di cinque in cinque anni. Nel 1878 e nel 1879, in omaggio al voto espresso nel 1878 dal Congresso internazionale di demografia a Parigi, vennero classificati i matrimoni avvenuti nel regno d'Italia, secondo le età degli sposi, di anno in anno; si aumentò così il lavoro nella ragione di uno al quadrato di cinque; ma furono possibili più accurati studi.

Dalle stesse tavole numeriche, alcune delle quali sono riprodotte in questa Memoria, si rilevano taluni criteri generali sulla distribuzione dei matrimoni nel regno e nelle varie regioni. Il numero dei matrimoni è massimo intorno alla combinazione di quelle età dei coniugi che sono corrispondenti o prossimi alle età medie dello sposo, e della sposa. Per le singole regioni questo massimo si scerne limpidamente; per il complesso del regno si hanno più massimi relativi, assai prossimi e corrispondenti a quelli delle regioni più popolose. Intorno al massimo, od al nucleo di massimi, il numero dei matrimoni scema con una crescente rapidità, ed è facile segnare nelle tavole numeriche, il contorno delle curve orizzontali, corrispondenti all'indicazione di un egual numero di matrimoni per tutte le combinazioni di età degli sposi e delle spose.

L'insieme delle varie curve, disegnate quindi in opportune scale, in base ai dati delle osservazioni ed ai risultati del calcolo, presenta un andamento regolare ed uniforme. Le curve sono chiuse a due absidi e con un asse di simmetria comune. Sembrano assai prossime ad ellissi simili con foco comune. E quindi la superficie, formata dall'elevazione di ordinate sul piano del quadro numerico, proporzionali alle cifre segnate al loro piede, si può figurare in un colle il quale abbia un piano verticale di simmetria, il vertice corrispondente o prossimo alle età medie dei coniugi, e che sia molto ripido per le età più giovani, e di più dolce pendio per le età più avanzate.

Confrontando questa distribuzione con quella dei proiettili attorno ad un centro di mira, si riscontrano notevoli somiglianze. In ambedue i casi le curve di livello sono ellissi ad assi maggiori comuni, od almeno curve assai somiglianti ad ellissi, la superficie di distribuzione ha un massimo ed un piano di simmetria nel senso dell'asse comune all'ellissi o curve di livello. Ma pei proiettili le ellissi sono per di più concentriche, quindi ad asse minore comune, e la superficie di distribuzione ha un secondo piano di simmetria. È però rimarchevole la direzione dell'asse maggiore comune delle curve di egual numero di matrimoni. Quest'asse passa per il massimo dei matrimoni osservati e procede a 45° coi due assi delle età dei due sposi, ciò che vuol dire che esso passa per tutte le combinazioni di età, in cui la differenza fra le età degli sposi e delle spose è costante ed eguale a quella che intercede fra le età medie al momento del matrimonio.

La composizione della popolazione per età indica un maggior numero di giovani che di vecchi, si è perciò riferito il numero dei matrimoni osservati tra sposi di determinate età, a quello degli individui dell'uno e dell'altro sesso e delle rispettive età in condizioni di maritarsi. Con ciò si aveva la parziale probabilità di matrimonio per uomini o donne delle varie età, che può dirsi coefficiente di *nuzialità* seguendo la dizione proposta dall'illustre dottore Adolfo Bertillon. Dal prodotto delle probabilità semplici per i due sessi si è ricavata la probabilità composta del matrimonio per le diverse classi di età; cioè la probabilità corrispondente ad una coppia di determinate età Si sono pure studiati questi coefficienti di probabilità composta in modo analogo al numero assoluto dei matrimoni osservati. La loro superficie di distribuzione è affatto simile a quella del numero assoluto dei matrimoni. Lo studio della nuova superficie ha però un maggiore interesse, ed i suoi risultati hanno un carattere di generalità assai più largo che nol consenta quello della precedente.

Riassumendo il fin qui detto, possiamo enunciare la seguente proposizione:

La distribuzione dei matrimoni secondo l'età degli sposi, sia nel regno che in ciascuna delle sue regioni, per qualunque combinazione di stato civile degli sposi, come pure per il loro complesso, presenta carattere di uniformità assai generale, e si manifesta conforme alle leggi teoriche di distribuzione della probabilità per rapporto a due parametri.

§ 3. Ciò che fu fatto pei matrimoni può praticarsi per molti altri fenomeni statistici. È una nuova via e feconda, che si apre alle indagini rigorose di fatti sociali. La mortalità dei bambini coetanei per rapporto all'età del padre e della madre — la distribuzione delle stature in correlazione alle dimensioni del torace od altra principale — la distribuzione dei crani per rapporto a due diametri principali — la distribuzione del numero delle spedizioni di merci omogenee sulle reti ferroviarie, rispetto al numero dei chilometri percorsi ed al peso di ciascuna spedizione — ecco i soggetti affini d'indagine che ci si presentano alla mente. Altri più utili e più importanti per le scienze sociali si offriranno certamente in seguito.

E ricerche con somigliante metodo si potrebbero seguire, per studiare i fenomeni statistici a tre parametri indipendenti. Tra i quali fenomeni citeremo la mortalità dei bambini coetanei, per rapporto all'età del padre, a quella della madre ed al numero di anni del matrimonio dei genitori all'epoca della loro nascita — la distribuzione dei crani per rispetto a due diametri principali orizzontali ed al verticale — la ripartizione dei contribuenti alle imposte dirette per ammontare d'imposta, per età del contribuente e per il numero degli anni da che egli gode il reddito per cui è gravato, ciò che permetterebbe di calcolare con sicure basi, anno per anno, il preventivo dalla tassa di sucessione.

II.

Illustrazione del materiale statistico, relativo alla distribuzione dei matrimoni per età degli sposi, al momento del matrimonio.

§ 1. *Tavole numeriche.* — La prima tavola contiene i numeri dei matrimoni contratti in tutto il regno d'Italia fra *celibi* o *vedovi* e *nubili* o *vedove* nel biennio 1878-79, distinti secondo l'età dei coniugi. In questa tavola non si considerano che le età degli sposi, al momento del matrimonio, inferiori a 45 anni; poichè i matrimoni di sposi in età maggiori a questa sono scarsi e distribuiti poco regolarmente.

Per potere studiare a fondo la distribuzione dei matrimoni nel regno, giova indagarla nelle singole regioni, e rispetto a ciascuna combinazione di stato civile degli sposi pel complesso degli sposi, senza distinzione del loro stato civile prima del matrimonio. A questo scopo diamo due prospetti. Nel primo sono indicate le età degli sposi e delle spose a cui corrisponde il numero massimo, sia assoluto che relativo, di matrimoni nelle varie regioni e nel regno. E nel secondo indichiamo le età dei coniugi, classificati per stato civile, nelle quali si hanno i numeri massimi, assoluti e relativi, dei matrimoni in tutto il regno.

PROSPETTO I. — Distribuzione dei numeri massimi (assoluti e relativi) dei matrimoni avvenuti nel biennio 1878-1879 nel Regno, nelle regioni e nei principali compartimenti rispetto alle età dei coniugi (1).

Età della sposa	Età dello sposo 24-25	25-26	26-27	27-28
20-21	Italia meridionale *Alta Italia* Regno *Italia insulare* *Piemonte* Lombardia, *Sicilia*	Sardegna	Piemonte Alta Italia Italia centrale Veneto, Toscana Marche ed Umbria	
21-22		Sicilia *Lombardia* *Veneto* Emilia	Sicilia	
22-23	Italia meridionale Italia centrale Regno Toscana, Marche ed Umbria Sardegna		*Italia meridionale* *Italia centrale* *Regno* Italia insulare Piemonte, *Toscana* *Emilia*, Sicilia *Marche ed Umbria*	*Sardegna*

PROSPETTO II. — Distribuzione dei numeri massimi (assoluti e relativi) dei matrimoni avvenuti nel biennio 1878-1879 nel Regno, per le diverse combinazioni dello stato civile, rispetto alle età dei coniugi (1).

Età della sposa	Età dello sposo 24-25	25-26	26-27	27-28	32-33	34-35	42-43	43-44
20-21	Celibi con Nubili							
22-23	Celibi con Nubili		*Celibi con Nubili*		Vedovi con Nubili	Vedovi con Nubili		
24-25						*Vedovi con Nubili*		
28-29		*Celibi con Vedove*		Celibi con Vedove				
30-31				Celibi con Vedove				
32-33							Vedovi con Vedove	
35-36								*Vedovi con Vedove*

(1) Sono in carattere corsivo od ordinario i nomi delle Regioni, dei Compartimenti e delle combinazioni di stato civile nelle caselle delle età che corrispondono ai massimi assoluti o relativi.

Dai precedenti prospetti rileviamo i seguenti fatti notevoli:

I numeri massimi, assoluti e relativi, di matrimoni avvenuti nella regione dell'Italia settentrionale corrispondono ad età dei coniugi più giovani che quelli dell'Italia meridionale. Le età corrispondenti al numero massimo assoluto dei matrimoni avvenuti nella Sardegna sono maggiori delle relative età per gli altri compartimenti del regno. La differenza delle età degli sposi riferentesi ai numeri massimi assoluti della Sicilia e della Sardegna è di 3 anni, e quella delle età delle spose di 2. Tutti i numeri massimi, siano assoluti o relativi, del regno cadono sulle medesime età dei massimi di matrimoni contratti fra celibi e nubili. L'età di un vedovo o di una vedova al momento del matrimonio è notevolmente superiore a quella corrispondente di un celibe o d'una nubile. I matrimoni tra celibi e vedove, tra vedovi e nubili, tra vedovi e vedove, che sono in numero scarso relativamente a quello dei matrimoni contratti tra celibi e nubili, influiscono poco sulla distribuzione dei matrimoni rispetto alle età dei coniugi. Ci limitiamo in questo studio all'espressione dei risultati dell'osservazione, senza entrare nell'apprezzamento delle cause di svariata natura che possono darne ragione.

Essendo il tempo d'osservazione breve, era cosa naturale il supporre che i risultati fossero affetti da irregolarità accidentali; quindi si è creduto utile di eseguire una correzione, cioè una perequazione fra i diversi numeri, ricorrendo al noto metodo di Wittstein [1]. Il risultato di questo conguaglio è contenuto nella tavola II.

Per poter indagare le leggi del movimento della popolazione riguardo al matrimonio, riesce di grande utilità il conoscere la probabilità di coniugarsi per un individuo di una data età e condizione di stato civile, cioè sapere in quale rapporto stia il numero degl'individui di una data condizione che abbiano contratto matrimonio, rispetto al numero degli individui della stessa condizione che possono contrarlo.

Le tavole III, IV, V e VI danno la probabilità di matrimonio per diversi gruppi d'individui. Con queste tavole si può rispondere

[1] Abbiamo posteriormente avuto notizia di un metodo di perequazione assai più rigoroso e più generale del prof. Schiaparelli Giovanni, direttore dell'Osservatorio astronomico di Brera in Milano. Ne trarremo profitto in un prossimo lavoro.

alla questione: quale è la probabilità che un uomo non ammogliato dell'età e a $e+1$ si ammogli entro due anni con una donna dell'età f a $f+1$? Questa probabilità si compone di due: 1° della probabilità che l'individuo considerato si sposi; 2° della probabilità che il suo coniuge abbia l'età di f a $f+1$, o rispettivamente di e a $e+1$ anni. Come si vede facilmente la probabilità risultante non è altro che il quoziente del numero dei matrimoni contratti fra maschi dell'età e a $e+1$ e femmine dell'età f a $f+1$, per il numero dei maschi non ammogliati dell'età e a $e+1$ o rispettivamente delle femmine non maritate dell'età f a $f+1$. Essendo i quozienti, specialmente per gli anni minori di 20 e maggiori di 35, molto inferiori all'unità, furono tutti moltiplicati per 10,000. Dalla tavola terza si può desumere la probabilità che un *celibe* o *vedovo* dell'età e a $e+1$ si ammogli entro due anni con una *nubile* o *vedova* dell'età f a $f+1$. Dalla quarta emerge la probabilità che una *nubile* o *vedova* dell'età f a $f+1$ si unisca in matrimonio con un *celibe* o *vedovo* dell'età e a $e+1$ entro due anni. Le cifre delle tavole vanno adunque interpretate nella seguente maniera: la cifra di una casella indica quanti su 10,000 individui dell'età e a $e+1$, scritta in principio della riga, si uniscono in matrimonio entro un biennio con individui dell'età f a $f+1$, scritta in testa della colonna. Indichiamo le probabilità contenute nella tavola III con $p_{e,f}$ e quelle contenute nella IV con $p_{f,e}$: i prodotti di queste probabilità $p_{e,f} \times p_{f,e} = P_{e,f} = P_{f,e}$ sono raccolti nella tavola V. Ogni numero di questa tavola indica le coppie possibili fra gli sposi osservati delle rispettive età e ed f per gruppi di 10,000 individui di ciascun sesso delle stesse età in condizione di maritarsi. I numeri della tavola V furono conguagliati col metodo di Wittstein. Dai risultati di questo conguaglio vennero estratte le radici quadrate, che sono raccolte nella tavola VI. Ogni cifra della tavola VI indica quanti fra 10,000 individui in condizione di maritarsi e di determinate età hanno contratto matrimonio nel biennio di osservazione.

Il materiale necessario per questo lavoro fu tolto dal « *Movimento dello stato civile, anno* 1878-1879 » e dal volume: « *Popolazione per età, sesso, stato civile ed istruzione, censimento* 31 *dicembre* 1871, pubblicati dalla direzione della statistica generale del regno. I dati che si hanno sulla popolazione negli anni 1878-1879 non potevano servire ai calcoli di probabilità che dovevano essere eseguiti, non essendo noto che l'aumento complessivo e non quello di ogni gruppo d'età. Furono perciò presi i risultati ottenuti dal censimento del 1871, i quali sono distinti per sesso, per stato civile e per età, di anno in anno. I numeri per i diversi gruppi di età, tolti dal censimento della popolazione del 1871, furono perequati per correggere le note anomalie riscontrate nella consegna delle età (1).

§ 2. *Tavole grafiche.* — È noto non esservi altro mezzo che possa rendere più percettibile la legge della distribuzione di un corpo di numeri (intendendo per corpo di numeri un complesso di numeri riferentisi allo stesso fenomeno, classificati rispetto agli elementi caratteristici del fenomeno stesso) che la raffigurazione di questo corpo di numeri nel piano o nello spazio. Le otto tavole grafiche che corredano questo studio rappresentano sotto diversi punti di vista il numero dei matrimoni contratti nel regno d'Italia nel biennio 1878-1879 e la distribuzione delle probabilità di matrimonio calcolate in base a questi numeri, rispetto alle età dei coniugi.

Immaginiamoci le età degli sposi al momento del matrimonio, che diremo x ed y, rappresentate sopra due assi perpendicolari OX e OY ed il numero dei matrimoni in un caso ed i numeri probabili di individui o di coppie che contraggono matrimonio, che diremo z, nell'altro caso classificati secondo le rispettive età degli sposi e delle spose, portati parallelamente ad un terzo asse OZ perpendicolare ai due primi, allora le superficie che vengono formate in questa guisa ci danno compiute figurazioni del movimento della popolazione rispetto ai matrimoni.

Le tavole I e II contengono le curve secondo cui viene intersecata da due fasci di piani paralleli la superficie rappresentante la distribuzione dei matrimoni del regno nel biennio 1878-1879 per età dei coniugi, e formata colle cifre della tavola numerica I ridotte ad un totale di 100,000 matrimoni. Le curve della tavola I fanno vedere la distribuzione dei casi di matrimonio di uomini coetanei con donne delle varie età. Essendo Y l'asse dell'età dello sposo si può dire che le curve sono sezioni della superficie con piani dell'equazione $y =$ costante. Le curve della II tavola mostrano la distri-

(1) V. *Sulla durata della vita umana in Italia*, Memoria del professore L. Rameri. Atti della reale Accademia dei Lincei, anno 1876-1877, S. 3ª, V. 1º della classe di scienze morali, pag. 222.

buzione dei casi di matrimonio di donne coetanee con uomini delle diverse età. L'equazione dei piani paralleli che segano la superficie secondo le dette curve è $x =$ costante. Le curve delle tavole III e IV, sono analoghe a quelle delle tavole I e II, coll'unica differenza che la superficie su cui sono situate rappresenta i numeri di matrimoni ridotti a 100,000 e perequati (vedi tavola numerica II).

La tavola V raccoglie le curve di sezione della stessa superficie dei numeri ridotti e perequati con piani per cui $z =$ costante. Ogni curva rappresenta la distribuzione dei matrimoni avvenuti in egual numero fra le differenti combinazioni delle età dei coniugi. Le curve punteggiate nella tavola V indicano quel regolare andamento delle curve, che risulterebbe probabilmente da un grandissimo numero di osservazioni. Sopra queste curve sono tracciati i loro assi maggiori e minori, intendendo per asse minore, nel difetto di perfetta simmetria della curva rispetto a questo asse, la retta perpendicolare all'asse maggiore e che passa pel suo punto di mezzo.

Le sezioni della superficie, raffigurante i coefficienti di probabilità di maritarsi od i numeri probabili di individui che contraggono matrimonio, per le diverse combinazioni delle età dei coniugi, indicati nella tavola numerica VI, ottenute con 3 fasci di piani paralleli, sono rappresentate nelle tavole VI, VII e VIII. La VI contiene curve prodotte dai piani, le cui equazioni sono $y =$ costante. Ogni curva rappresenta la distribuzione delle probabilità di maritarsi per uomini di una data età con donne delle varie età. Le curve della tavola VII, situate in piani aventi per equazione $x =$ costante, raffigurano ognuna la distribuzione delle probabilità di maritarsi per donne di una determinata età con uomini di vari gradi di età. La tavola VIII rappresenta curve situate in piani aventi per equazione $z =$ costante, cioè curve di eguale probabilità di matrimonio per tutte le combinazioni di età degli sposi e delle spose.

La tavola IX dà in due figure le proiezioni centrali dello stereogramma costruito sulle cifre della tavola numerica VI. Le tavole grafiche VI e VII contengono le curve sezioni di questo solido con i piani $y =$ costante ed $x =$ costante.

Avvertiamo solamente che per lo stereogramma essendosi indicata la probabilità di maritarsi entro un anno, questa si è assunta uguale alla metà di quella indicata nelle tavole VI e VII che si riferiva a due anni di osservazione.

III.

Formole atte a rappresentare la distribuzione dei matrimoni.

§ 1. La formola binomiale serve a rappresentare nei suoi varî termini le diverse probabilità dell'avvenimento di un fenomeno in m prove, quando si conoscano le probabilità p e q, favorevole e contraria all'avvenimento stesso in una sola prova. Così il termine generale dello sviluppo del binomio $(p+q)^m$ ossia $\binom{m}{n} p^n q^{m-n}$ esprime la probabilità che l'avvenimento considerato si presenti n volte sopra m prove.

Così è pur noto che i successivi termini dello sviluppo

[1] $$(p+q)^m = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \ldots\ldots + \binom{m}{n} p^n q^{m-n} + \ldots\ldots + q^m$$

vanno crescendo fino al termine intermedio per cui è approssimativamente $\frac{n}{m-n} = \frac{q}{p}$ dal quale poi decrescono successivamente. Questo sviluppo sarà rappresentato in tutta la sua generalità dalla formola:

[2] $$Z = Z_0 e^{-\alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^4 + \ldots\ldots};$$

le costanti α_1, α_2, ecc. sono funzioni di m, p e q. È da notare che il coefficiente α_1 sparisce facendo coincidere la Z_0 coll'ordinata massima.

La parte di questo sviluppo che interessa maggiormente è quella che circonda il termine massimo. Se $p=q$, i termini prossimi al medio si possono rappresentare colla formola

[3] $$Z = Z_0 e^{-\alpha_2 x^2}$$

dove x è lo scarto, sia in più che in meno, dall'ascissa che corrisponde all'ordinata massima.

Rappresentando con una curva la serie dei valori di x e z si ha la nota linea degli errori accidentali, che rappresenta anche la legge della distribuzione delle stature. In questo caso z rappresenta il numero dei misurati aventi la statura x.

Un' altra formola che rappresenti con approssimazione sufficiente l'andamento dello sviluppo del binomio $(p+q)^m$ nella prossimità del termine medio, per m molto grande è

$$[4] \qquad z = a\left(x - \sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}\right)^n e^{-\alpha_2\left(x-\sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}\right)^2}$$

in cui a, α_2 ed n sono costanti da determinarsi nei casi speciali in cui si deve applicare questa formola.

Le formole [2] e [4] servono a rappresentare tutte le curve dei matrimoni delle tavole grafiche qui unite e si possono determinare i coefficienti col metodo dei minimi quadrati, prendendo i logaritmi delle ordinate e considerando che $x=0$ per l'ordinata massima della curva.

L'equazione [4] rappresenta in generale la curva della probabilità dissimmetrica, rispetto ad un' ordinata, essa sarà simmetrica, per $n=0$ o per $n=\infty$; nel primo caso si ricade nella formola [3]. Un importante criterio per la misura della dissimmetria è il rapporto delle aree racchiuse fra la curva e l'asse delle x a destra ed a sinistra dell'ordinata massima. Questo rapporto è uguale all' *unità* nel caso che la curva sia simmetrica e differente dall' *unità* per la curva dissimmetrica. Essendo questo rapporto, come è facile vedere, funzione di n, abbiamo cercato di determinarlo per alcuni valori numerici di n, specialmente per quelli che danno risultati, i quali possono tornare di uso più frequente nella pratica. L'ascissa dell'ordinata massima essendo

$\sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}$ il rapporto delle aree sarà dato da $\frac{J_1}{J_2}$

dove $J_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}} u^n e^{-\alpha_2 u^2} du$ ed $J_2 = \int_{\sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}}^{\infty} u^n e^{-\alpha_2 u^2} du$

e sostituendo $z = \sqrt{\alpha_2}\,.\,u$ si ottiene

$$J_1 = k\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} z^n e^{-z^2} dz \quad \text{ed} \quad J_2 = k\int_{\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} z^n e^{-z^2} dz.$$

Nella seguente tabella abbiamo raccolto i risultati del calcolo di questi integrali definiti e del rapporto delle aree per alcuni valori numerici di n.

n	$J_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} z^n e^{-z^2} dz$	$J_3 = \int_0^{\infty} z^n e^{-z^2} dz$	$\frac{J_1}{J_2} = \frac{J_1}{J_3 - J_1}$	$\frac{J_1}{J_3}$
0,01	0.068 065	0.877 624	0.084 077	0.077 556
0,02	0,093 309	0.869 208	0.120 260	0.107 349
0.04	0,124 803	0,852 923	0,171 549	0,146 429
0,05	0.136 149	0.845 039	0.192 045	0,161 104
0,066 ...	0,151 056	0.832 258	0,221 756	0.181 506
0,1	0,172 050	0.808 063	0.270 515	0,212 917
0,2	0,201 713	0,739 595	0.335 862	0,251 419
0,25	0,208 005	0.717 260	0.408 449	0,289 999
0,33 ...	0,212 949	0.677 078	0,458 194	0.314 220
0,5	0 212 339	0,612 707	0.530 359	0,346 558
0,66 ...	0.207 417	0.564 335	0.561 104	0.359 427
0,75	0.202 452	0.544 826	0.591 312	0,371 587
0.8	0,205 660	0.534 312	0,625 768	0,384 906
1.0	0.197 028	0.500 000	0,648 721	0,393 457
2.0	0,203 018	0,500 002	0.747 399	0.407 721
3,0	0.221 087	0.500 012	0,792 675	0,442 175
4.0	0,298 018	0.664 673	0.812 806	0,448 368
5,0	0,461 624	1.000 000	0,838 862	0,461 624
6,0	0.761 651	1,661 681	0.846 252	0,458 362
7,0	1,390 104	3,000 000	0,863 474	0,463 368

Poichè le formole [2] e [4] rappresentano ognuna la probabilità per l'individuo di una determinata età di unirsi in matrimonio con individui dell'altro sesso delle diverse età, è facile trovare col prodotto delle espressioni indicanti le probabilità semplici la formola delle probabilità composte, che è già stata calcolata da noi direttamente coi risultati dell'osservazione.

Detto x ed y il numero degli anni di età degli sposi in più od in meno delle rispettive età medie calcolate pei matrimoni effettuatisi, la probabilità z di matrimonio per coppie d'individui di quelle età è quindi responsabile con

$$[5] \qquad Z = Z_0 \, Z'_0 \times$$

$$\times e^{-\alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 + \ldots} \times e^{-\alpha'_2 y^2 - \alpha'_3 y^3 - \alpha'_4 y^4 + \alpha'_5 y^5 + \ldots}$$

$$[6] \qquad Z = a\,a' \left\{ \left(x - \sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}\right)^{n} \left(y - \sqrt{\frac{n'}{2\alpha'_2}}\right)^{n'} \times \atop \times e^{-\alpha_2 \left(x - \sqrt{\frac{n}{2\alpha_2}}\right)^2 - \alpha'_2 \left(y - \sqrt{\frac{n}{2\alpha'_2}}\right)^2} \right\}.$$

Queste sono le equazioni più generali che si possono dare della superficie di probabilità.

Fatto $n = 0$ e $n' = 0$, nella equazione [6] si ottiene la formola

$$[7] \qquad Z = a\,a'\,e^{-\alpha_2 x^2 - \alpha'_2 y^2}$$

ben nota ai cultori della balistica, come quella che rappresenta la distribuzione probabile dei proiettili sopra un piano orizzontale.

L'equazione [5], quando si faccia $Z =$ costante, rappresenta le curve di livello della superficie di probabilità, ossia per noi le varie combinazioni di età degli sposi x ed y in cui vi è l'eguale probabilità di matrimonio.

Limitandosi a considerare la superficie speciale data dalla formola [7] si avrebbe una equazione della forma

$$[8] \qquad \alpha_2 x^2 + \alpha'_2 y^2 = \lambda^2 = \text{costante}$$

la quale rappresenta un sistema di curve d'eguale probabilità formato da ellissi concentriche e simili. Dalle osservazioni fatte sui matrimoni risulta invece che le curve di eguale probabilità non sono concentriche, e non affettano simmetria che per rispetto ad un solo asse. Si mostra quindi insufficiente lo sviluppo limitato ai termini di 2° grado. Partendo dalla superficie più generale di probabilità data da

$$Z = Z_0 \, Z'_0 \, e^{-\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^4 - \alpha'_2 y^2 - \alpha'_3 y^3 - \alpha'_4 y^4}$$

si ha l'equazione delle curve di eguale probabilità della forma

$$[9] \quad \alpha_2 x^2 + \alpha'_2 y^2 \mp \alpha_3 x^3 \mp \alpha'_3 y^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha'_4 y^4 = \lambda^2 = \text{costante.}$$

Le linee di probabilità degli sposi sono prossimamente identiche a quelle delle spose, si possono quindi, senza alterare notevolmente i risultati del calcolo in confronto a quelli dell'osservazione, supporre eguali i coefficienti delle medesime potenze di x ed y, con che si ottiene la formola

$$[10] \quad \alpha_2 (x^2 + y^2) \mp \alpha_3 (x^3 + y^3) + \alpha_4 (x^4 + y^4) = \lambda^2 = \text{costante.}$$

Sostituendo ora agli assi delle x e delle y altri due assi passanti per l'origine delle coordinate e facenti angoli di 45° con essi, ossia servendosi delle formole di trasformazione

$$x = t + u$$
$$y = t - u$$

si ha la trasformata della [10] in

$$[11] \quad 2\alpha_2 (t^2 + u^2) \mp 2\alpha_3 (t^3 + 3tu^2)$$
$$+ 2\alpha_4 (t^4 + 6t^2 u^2 + u^4) = \lambda^2 = \text{costante.}$$

Ora questa equazione dimostra che l'asse delle t è asse di simmetria delle curve di eguale probabilità; poichè l'equazione non ha che termini di grado pari in u ed è quindi soddisfatta tanto per u positivo che per u negativo. La curva non ha centro e posto che tanto per $t = 0$ che per $u = 0$ essa abbia due sole radici reali per i valori possibili di λ corrispondenti ai valori positivi di z da 0 fino al suo massimo, otterremo l'equazione di un sistema di linee, il quale si approssima di tanto al sistema dato dall'osservazione da non potersi attendere maggiore coincidenza tra le previsioni della teoria ed i risultati delle osservazioni con espressioni più semplici della stessa forma.

MATRIMONI CONTRATTI NEL REGNO D'ITALIA TRA CELIBI
CLASSIFICATI SECONDO LE VARIE COMBINAZIONI

Cifre assolute, ricavate dai volumi del Movimento dello stato civile

Tavola I.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	ETÀ DELLA SPOSA (Anni) 15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29
18 a 19	43	79	132	182	200	186	127	91	80	62	22	33	26	18
19 a 20	80	181	257	358	467	409	302	259	144	108	95	93	47	34
20 a 21	161	368	522	860	1104	1202	842	709	406	280	202	172	124	79
21 a 22	251	541	974	1531	1988	2317	2141	1623	1046	651	499	355	220	193
22 a 23	306	510	1136	1935	2609	3341	2961	2950	1820	1225	789	595	397	311
23 a 24	367	717	1294	2121	3155	4009	3593	3304	3060	1774	1353	936	663	468
24 a 25	376	823	1413	2472	3454	4747	4393	4593	3503	3009	1906	1366	956	766
25 a 26	424	710	1267	2166	3147	4104	4338	4163	3317	2652	2385	1598	1173	832
26 a 27	301	731	1192	2148	3069	4322	3952	4810	3781	3079	2530	2326	1597	1045
27 a 28	241	512	1023	1538	2367	3324	3348	3905	3043	2638	2179	1921	1671	1094
28 a 29	147	341	661	1336	1798	2525	2589	3034	2571	2315	1999	1780	1438	1254
29 a 30	106	254	494	922	1439	1919	1902	2277	1983	1777	1606	1431	1210	991
30 a 31	87	165	405	750	1069	1872	1635	1985	1680	1525	1525	1327	1189	989
31 a 32	56	141	280	503	742	1088	1218	1449	1291	1161	1152	1002	955	825
32 a 33	71	115	227	403	655	948	1016	1316	1096	1070	1009	916	876	738
33 a 34	36	78	176	278	463	800	754	948	871	859	821	793	755	714
34 a 35	27	64	122	215	376	578	605	803	770	801	679	709	658	588
35 a 36	24	39	91	184	296	418	503	629	590	575	629	551	541	503
36 a 37	23	32	93	138	199	326	377	498	470	470	489	530	464	451
37 a 38	11	31	52	92	159	239	304	377	354	376	417	383	464	366
38 a 39	3	26	45	89	128	189	219	275	312	297	307	353	347	383
39 a 40	11	12	31	62	95	144	170	228	229	257	281	254	203	281
40 a 41	...	8	27	44	78	132	133	197	198	231	252	280	276	276
41 a 42	3	12	24	26	43	81	94	158	129	150	155	185	184	211
42 a 43	4	15	11	22	46	74	81	128	147	160	135	179	181	158
43 a 44	3	3	6	23	43	57	60	76	102	113	132	130	150	156
44 a 45	2	6	12	20	30	49	66	68	74	83	115	87	128	143

O VEDOVI E NUBILI O VEDOVE NEL BIENNIO 1878-1879
DI ETÀ DEGLI SPOSI E DELLE SPOSE.

dell'anno 1878 e del 1879, pubblicati dalla Direzione generale della Statistica.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	SPOSA (Anni) 29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38	38 a 39	39 a 40	40 a 41	41 a 42	42 a 43	43 a 44	44 a 45
18 a 19	12	14	7	9	3	2	2	2	1	1	1	...	...	...	...	...
19 a 20	21	27	15	15	7	7	6	3	5	5	2	4	1	...	2	3
20 a 21	62	49	21	29	13	19	5	9	7	9	4	3	4	6	1	1
21 a 22	106	89	71	49	35	31	19	20	17	11	13	13	5	9	8	4
22 a 23	201	156	98	92	77	64	37	45	23	19	14	14	11	5	11	10
23 a 24	319	256	164	134	94	77	68	59	33	40	27	18	21	11	14	4
24 a 25	458	338	232	183	135	149	94	79	57	58	39	32	25	19	15	15
25 a 26	535	432	279	256	174	136	151	76	70	61	37	40	33	26	15	18
26 a 27	713	523	344	269	184	174	129	114	107	77	59	49	34	32	33	...
27 a 28	767	549	379	341	228	190	142	105	106	85	60	52	36	30	27	13
28 a 29	741	583	375	310	236	167	116	117	86	92	64	39	43	24	36	27
29 a 30	855	554	390	305	211	177	128	123	88	73	59	49	33	30	22	27
30 a 31	781	698	452	345	294	226	171	112	111	98	47	67	51	30	27	22
31 a 32	619	530	441	324	260	202	152	131	117	92	45	47	52	32	30	19
32 a 33	580	592	432	461	300	221	186	126	115	104	73	57	34	49	31	25
33 a 34	535	477	406	359	334	220	218	165	126	111	62	68	50	34	35	21
34 a 35	494	439	374	347	291	258	191	137	132	90	64	60	35	47	28	23
35 a 36	474	418	323	318	252	239	231	154	133	98	87	67	47	48	34	33
36 a 37	387	350	307	276	244	232	206	158	139	112	101	83	65	49	50	28
37 a 38	307	375	271	258	232	195	171	172	135	100	71	76	68	56	44	35
38 a 39	296	291	242	213	223	207	162	153	148	129	93	76	73	46	52	37
39 a 40	290	250	224	214	218	187	165	149	121	110	105	62	53	58	46	44
40 a 41	205	258	232	230	211	152	158	153	128	117	87	126	70	59	54	45
41 a 42	186	180	180	179	165	152	149	131	129	108	99	83	80	61	60	54
42 a 43	172	166	147	182	165	138	141	129	105	97	99	75	80	74	47	50
43 a 44	162	166	140	147	150	139	134	127	112	108	78	80	67	78	65	39
44 a 45	116	148	144	120	116	141	105	115	127	102	97	76	64	57	54	60

Matrimoni contratti fra celibi o vedovi e nubili o vedove nel biennio 1878-1879 classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.

Le cifre assolute della tavola precedente sono in questa ridotte ad un totale di 100,000 matrimoni e perequate col metodo di Wittstein.

Tavola II.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	ETÀ DELLA SPOSA (Anni) 15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25
18 a 19 . .	6	16	31	43	48	45	37	27	20	14
19 a 20 . .	18	47	78	111	135	131	111	80	58	37
20 a 21 . .	41	88	151	216	275	289	264	201	141	92
21 a 22 . .	58	129	224	338	452	476	487	390	238	183
22 a 23 . .	73	165	289	447	615	700	715	614	178	329
23 a 24 . .	83	187	334	526	747	863	919	820	683	497
24 a 25 . .	81	189	351	553	791	939	1010	931	800	619
25 a 26 . .	80	174	349	543	797	955	1060	992	887	706
26 a 27 . .	66	162	305	483	705	860	976	934	844	689
27 a 28 . .	61	139	256	408	603	735	856	835	734	648
28 a 29 . .	41	99	191	312	462	571	668	663	632	540
29 a 30 . .	25	67	144	239	367	474	532	529	515	457
30 a 31 . .	15	47	105	178	278	348	414	415	407	339
31 a 32 . .	12	36	80	135	217	276	338	342	338	310
32 a 33 . .	8	27	58	100	158	207	256	268	271	251
33 a 34 . .	5	20	43	79	127	166	209	220	230	214
34 a 35 . .	3	12	37	58	97	129	162	174	184	177
35 a 36 . .	2	8	34	43	73	99	127	141	151	148
36 a 37 . .	1	3	30	30	54	76	99	111	117	118
37 a 38 . .	...	...	...	19	39	58	76	83	93	95
38 a 39 . .	...	...	...	8	25	42	58	66	73	76
39 a 40 . .	...	...	...	...	16	30	45	53	60	64
40 a 41 . .	...	...	...	...	7	16	31	39	48	50
41 a 42 . .	...	...	...	...	...	8	20	30	40	42

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29	29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38
18 a 19 . .	11	8	7	4	3	3	2	2	2	1	1	...	...
19 a 20 . .	29	22	17	11	8	6	5	4	4	3	2	1	1
20 a 21 . .	66	49	35	24	18	12	10	9	9	7	5	2	2
21 a 22 . .	128	90	66	46	34	23	18	15	15	12	8	5	3
22 a 23 . .	220	156	109	76	55	39	30	24	22	18	14	9	7
23 a 24 . .	348	241	170	119	85	60	45	33	29	24	20	14	8
24 a 25 . .	456	309	232	162	115	81	61	45	37	30	25	19	10
25 a 26 . .	561	403	311	215	150	104	77	55	45	36	30	24	14
26 a 27 . .	572	446	357	254	175	122	91	66	52	40	37	27	16
27 a 28 . .	558	470	381	278	196	134	99	72	56	42	38	28	17
28 a 29 . .	474	411	345	271	199	140	102	75	58	43	39	28	17
29 a 30 . .	411	364	312	254	201	147	108	79	61	46	36	29	18
30 a 31 . .	337	307	267	271	184	144	110	79	61	46	38	31	19
31 a 32 . .	288	268	237	203	171	139	116	86	67	51	41	33	20
32 a 33 . .	236	223	204	177	151	124	108	86	69	53	44	36	21
33 a 34 . .	206	194	182	160	138	116	104	89	75	60	46	38	22
34 a 35 . .	173	163	157	141	125	106	93	81	70	60	49	40	23
35 a 36 . .	147	142	135	123	110	96	85	73	66	58	48	40	23
36 a 37 . .	120	121	115	107	96	85	76	67	60	54	47	40	24
37 a 38 . .	98	104	101	94	85	74	68	61	56	50	44	39	28
38 a 39 . .	79	83	82	79	75	67	61	57	52	47	42	37	27
39 a 40 . .	67	71	71	69	68	62	58	54	50	45	39	36	26
40 a 41 . .	55	57	58	57	57	54	53	50	46	42	38	35	22
41 a 42 . .	46	49	52	50	49	47	47	46	42	38	35	33	21

NUMERO PROBABILE DI CELIBI O VEDOVI DELL'ETÀ E CHE SPOSANO ENTRO DUE ANNI NUBILI O VEDOVE DELL'ETÀ F CALCOLATO PER 10,000 UOMINI DI OGNI ANNO DI ETÀ

IN BASE AI DATI GREGGI DEI MATRIMONI AVVENUTI NEL BIENNIO 1878-1879.

Tavola III.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	ETÀ DELLA SPOSA (Anni)													
	15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29
18 a 19	1,8	3,4	5,7	7,8	8,6	8,0	5,5	3,9	3,4	2,7	0,9	1,4	1,1	0,8
19 a 20	3,5	7,9	11,2	15,7	20,4	17,9	13,2	11,3	6,3	4,7	4,2	4,1	2,0	1,5
20 a 21	6,9	15,9	22,5	37,1	47,6	51,8	33,3	30,6	17,5	12,1	8,7	7,4	5,3	3,4
21 a 22	11,2	24,1	43,3	68,1	88,5	103,1	95,3	72,2	46,5	29,0	22,2	15,8	9,8	8,6
22 a 23	14,5	24,2	53,8	91,7	123,7	158,4	140,4	139,8	86,3	58,1	37,4	28,2	18,8	14,7
23 a 24	19,4	38,0	68,5	112,4	167,3	212,5	190,4	191,0	162,2	94,0	71,7	49,6	35,1	24,9
24 a 25	22,2	48,7	85,4	146,3	204,4	280,9	260,0	271,8	207,3	178,1	112,8	80,8	56,6	41,8
25 a 26	27,9	46,8	83,5	148,7	207,3	270,4	285,8	274,3	220,5	174,7	157,1	105,3	77,3	54,8
26 a 27	21,9	53,3	86,9	156,6	223,7	315,1	288,1	350,7	275,6	224,5	184,4	169,6	116,3	73,2
27 a 28	20,2	42,9	85,7	128,9	198,1	278,6	280,6	227,3	255,0	221,0	182,6	161,0	140,0	91,7
28 a 29	14,0	32,4	62,9	127,1	171,0	240,2	246,3	288,6	244,6	220,2	190,2	169,3	136,8	119,3
29 a 30	11,8	28,4	55,2	103,1	160,9	214,5	212,6	254,6	221,7	193,7	172,6	160,0	135,3	110,8
30 a 31	10,9	20,6	50,6	93,8	133,7	234,1	204,4	248,2	210,1	190,7	190,7	165,9	148,7	126,7
31 a 32	8,4	21,2	42,2	75,8	111,8	164,0	183,6	218,4	194,6	175,0	173,6	151,0	143,9	124,3
32 a 33	12,3	19,9	39,4	70,4	113,6	164,4	176,2	228,2	190,0	185,5	175,0	158,8	151,9	128,0
33 a 34	7,2	15,7	35,5	56,0	93,9	161,2	151,9	191,0	175,5	173,1	165,4	160,4	152,1	143,9
34 a 35	5,7	13,6	25,9	45,5	79,9	122,8	123,6	170,7	164,9	149,0	144,3	150,7	139,8	125,0
35 a 36	5,4	8,8	20,5	41,4	66,6	94,1	113,2	141,6	132,8	129,5	141,6	124,1	121,8	113,2
36 a 37	5,5	7,8	22,4	33,2	47,9	78,5	90,8	119,9	113,2	113,2	117,7	127,6	111,7	108,6
37 a 38	3,0	8,4	14,0	24,8	42,9	64,5	82,1	101,8	95,6	101,5	125,6	103,4	125,3	98,8
38 a 39	0,8	7,2	12,4	24,5	35,3	52,1	60,4	75,8	86,0	87,9	84,6	97,3	95,6	105,6
39 a 40	3,1	3,4	8,7	17,4	26,7	40,4	47,7	64,0	64,3	72,1	78,9	71,3	57,0	78,9
40 a 41	...	2,1	7,2	11,7	20,8	35,2	35,4	52,5	52,8	61,6	67,2	74,6	73,6	73,6
41 a 42	0,9	3,6	7,2	7,8	12,9	21,4	28,3	47,6	38,9	45,1	46,6	55,7	55,4	63,5
42 a 43	1,3	5,0	3,6	7,3	15,2	24,5	26,8	42,3	48,6	52,9	44,7	59,2	59,9	52,3
43 a 44	1,1	2,6	2,2	8,5	15,8	21,0	22,1	28,0	37,5	41,6	48,6	47,8	55,2	57,4
44 a 45	0,7	2,1	4,3	7,1	10,7	17,5	21,4	24,3	26,4	29,6	41,0	31,0	45,7	51,0

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38	38 a 39	39 a 40	40 a 41	41 a 42	42 a 43	43 a 44	44 a 45
18 a 19	0,5	0,6	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
19 a 20	0,9	1,2	0,6	0,6	0,3	0,3	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	...	...	0,1	0,4
20 a 21	2,7	2,1	0,9	1,2	0,6	0,8	0,2	0,4	0,3	0,4	0,2	0,1	0,2	0,2	0,0	...
21 a 22	4,7	4,0	3,1	2,3	1,5	1,4	0,8	0,9	0,7	0,5	0,6	0,6	0,2	0,4	0,3	0,2
22 a 23	9,5	7,4	4,6	4,4	3,6	3,0	1,7	2,1	1,1	0,9	0,7	0,7	0,5	0,2	0,5	0,5
23 a 24	17,0	13,6	8,7	7,1	5,0	4,1	3,6	3,1	1,7	2,1	1,4	0,9	1,1	0,6	0,7	0,2
24 a 25	27,1	20,0	13,7	11,0	8,0	8,8	5,6	4,7	3,4	3,4	2,3	1,9	1,5	1,1	0,9	0,9
25 a 26	35,2	28,5	18,4	16,9	11,5	9,0	9,9	5,0	4,6	4,0	2,4	2,6	2,2	1,7	1,0	1,2
26 a 27	52,0	38,1	25,1	19,6	13,4	12,7	9,4	8,3	7,8	5,6	4,3	3,6	2,5	2,3	2,4	...
27 a 28	64,3	46,0	31,8	28,6	19,1	15,9	11,9	8,8	8,9	7,1	5,0	4,3	3,0	2,5	2,3	1,1
28 a 29	70,5	55,5	35,7	29,5	22,4	15,9	11,0	11,1	8,2	8,7	6,1	3,7	4,1	2,3	3,4	2,6
29 a 30	95,6	61,9	43,6	34,1	23,5	19,8	14,3	13,7	9,8	8,2	6,6	5,5	3,7	3,4	2,4	3,0
30 a 31	97,7	85,2	55,5	43,1	36,3	28,3	21,4	14,0	13,9	12,2	5,9	8,4	7,4	3,7	3,4	2,7
31 a 32	93,3	75,4	66,5	48,8	39,2	30,4	22,9	19,7	17,6	13,9	6,8	7,1	7,8	4,8	4,5	2,9
32 a 33	100,6	102,6	74,9	79,9	52,0	38,3	32,2	21,8	19,9	18,0	12,6	9,9	5,9	8,5	5,4	4,3
33 a 34	107,9	96,1	81,9	72,3	67,3	44,3	43,9	33,2	25,3	22,4	12,5	13,7	10,1	6,8	7,0	4,2
34 a 35	105,0	93,3	79,5	73,7	61,8	54,8	40,9	29,1	28,0	19,1	13,6	12,7	7,4	10,0	5,9	4,9
35 a 36	106,7	94,1	72,7	71,6	56,7	53,8	52,0	34,7	29,9	22,1	19,6	15,1	10,6	10,8	7,6	7,4
36 a 37	93,2	84,3	73,9	66,5	58,7	55,9	49,6	38,0	33,5	27,0	24,3	20,0	15,6	11,8	12,0	6,7
37 a 38	82,9	85,0	73,2	69,7	62,6	52,6	46,2	46,4	36,4	27,0	19,2	20,5	18,4	15,1	11,9	9,4
38 a 39	81,6	80,2	66,7	58,7	61,5	57,0	44,6	42,2	40,8	35,5	25,6	20,9	20,1	12,7	14,3	10,2
39 a 40	81,4	70,2	62,9	60,1	61,2	52,5	46,3	41,8	34,0	30,9	29,5	17,4	14,9	16,3	12,9	12,3
40 a 41	54,6	68,8	61,8	61,3	56,2	40,5	42,1	40,8	34,1	31,2	23,2	33,6	18,6	15,7	14,4	12,0
41 a 42	55,7	54,2	54,2	53,9	49,7	45,7	44,8	39,4	38,8	32,5	29,8	25,0	24,1	18,4	18,1	16,2
42 a 43	53,9	54,9	48,6	60,2	54,6	45,6	46,6	42,7	34,7	32,1	32,7	24,8	26,5	24,5	15,5	16,5
43 a 44	59,6	61,1	51,5	54,1	57,4	51,1	49,3	46,7	41,2	39,7	28,7	29,4	24,6	28,7	23,9	14,3
44 a 45	41,4	52,8	51,4	42,8	41,4	50,3	37,5	41,0	45,3	36,4	31,6	27,1	22,8	20,3	19,3	21,0

NUMERO PROBABILE DELLE NUBILI O VEDOVE DELL'ETÀ F CHE SI MARITANO ENTRO DUE ANNI CON CELIBI O VEDOVI DELL'ETÀ E CALCOLATO PER 10,000 DONNE DI OGNI ANNO DI ETÀ IN BASE AI DATI GREGGI DEI MATRIMONI AVVENUTI NEL BIENNIO 1878-1879.

Tavola IV.

	ETÀ DELLA SPOSA (Anni)													
ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29
18 a 19	1,7	3,2	5,5	7,8	9,4	9,5	7,7	6,2	6.5	5,7	2,3	4.0	3,7	2,7
19 a 20	3,2	7,2	10,7	15 4	21,9	20,9	18,2	17,7	18,0	9,9	10,2	11,2	6.6	5.2
20 a 21	6,3	14,7	21,8	37.0	51.8	61.5	50,8	48,3	33,3	25,8	21,4	20,7	17,5	12,0
21 a 22	9.9	21,7	40.7	65.9	93.3	118,4	129.1	110,7	85,7	59,9	51.9	42.7	31.1	29,4
22 a 23	12,1	20,4	47,5	83,4	122,4	170,8	178,5	201,2	149,1	112,7	83,5	71,6	56,1	47,4
23 a 24	14,5	28,7	54.1	91,4	148,3	201.9	216.6	245,8	250,7	163.2	143,7	112,6	93,8	71.4
24 a 25	14,9	32,9	60,3	106.5	162,1	242,7	261,0	313.2	286,9	276,8	201,7	164.4	132,2	107.7
25 a 26	16.8	28,4	52.5	99,3	147.7	209.8	261.6	283.9	274,2	244,9	252,4	192.3	165,9	126,9
26 a 27	11,9	29 3	49,8	92,5	144,1	221.0	238,3	328,0	309,7	283,2	267,8	279.9	225.9	159,5
27 a 28	9,5	20,5	42,7	66,2	111,1	169.9	101 9	266,3	249.3	242,7	230.6	231,2	233,3	166.9
28 a 29	5,8	13.6	27.6	57,5	84,4	129,1	156.1	206.9	210,6	213,0	211,6	211.2	203,4	191.3
29 a 30	4.2	10.2	20,6	39,7	67,5	98 1	114.1	155,3	162.4	163,5	170.9	172,2	171,1	151,2
30 a 31	3.4	6,6	16,9	32,3	50,2	95.7	98,6	135,4	137,6	140,3	161,4	159,7	168,2	150,9
31 a 32	2.2	5.6	11,7	21.7	34,8	55,6	73.4	98,8	105,7	106,8	122,7	120,6	135,1	125.9
32 a 33	2.8	4.6	9,5	17.5	30.7	48,5	61,3	89,7	89,8	98,4	106,0	110,2	123.9	112.6
33 a 34	1,4	3,1	7,3	12,0	21,9	40,9	45,5	61.6	71,3	79.0	86,9	95.8	106.8	108,9
34 a 35	1,0	2,6	5.1	9,3	17.6	29,9	36.5	54.8	63,5	73.7	71.9	85.3	93.1	89,7
35 a 36	0,9	1.6	3,8	7,9	13.9	21.4	30,3	42,9	48.3	52,9	66,6	63.3	76,5	76.7
36 a 37	0,9	1.3	3,9	5,9	9,3	16,7	22,7	34,0	38,5	43,2	51,8	63,8	65,6	68,8
37 a 38	0.4	1,2	2,2	4,0	7,5	12,2	18,3	25,7	29,0	34.6	44,1	46,1	65.6	55,8
38 a 39	0.1	1,0	1,9	3,8	6,0	9,7	13,2	18,7	25.6	27.3	32,9	42,5	49,1	58,4
39 a 40	0,4	0,5	1,3	2,7	4,5	7,4	10,2	15,5	18.8	23,6	29,7	30,6	28,7	42.9
40 a 41	...	0,3	1,1	1,9	3,7	6,7	8,0	13,4	16.2	21,2	26,7	33,7	39,0	42,1
41 a 42	0,1	0,5	1,0	1,1	2,0	4,1	5,7	10,8	10,6	13,8	16,4	22,3	26,0	32,2
42 a 43	0,1	0,6	0,5	0.9	2,2	3,8	4.9	8,7	12,0	14.7	14,3	21,5	25,6	24,1
43 a 44	0,1	0,3	0,2	1.0	2,0	2,9	3,6	5,2	8,3	10,4	14.9	15,0	21,2	23,8
44 a 45	0,1	0,2	0.5	0,9	1,4	2,0	4.0	4,6	6,1	7,6	12,7	10,5	18.1	21,8

	ETÀ DELLA SPOSA (Anni)															
ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38	38 a 39	39 a 40	40 a 41	41 a 42	42 a 43	43 a 44	44 a 45
18 a 19	2.0	2,4	1,4	2.1	0,5	0,5	0,5	0.1	0.3	0,2	0,2	...	...	...	...	...
19 a 20	3,5	4,6	3,1	3,4	1.8	1,7	1.4	0.7	1.3	1.2	0.4	0,8	0,2	...	0.6	0,8
20 a 21	10,4	8.4	4,3	6.6	3,3	4.6	1.2	2.2	1,9	2.2	0.9	0.6	0,9	1.5	0,3	0.3
21 a 22	17,8	15.3	14.6	11,8	8.5	7,5	4,5	4.9	4,6	2,7	2.9	2.5	1,1	2,3	2.3	1,0
22 a 23	33,8	26.8	20.2	21,1	19.7	15,6	8,9	11.0	6,2	4.6	3.1	2.7	2.5	1,3	3,2	2,6
23 a 24	53,6	44.0	33.7	30,7	24,0	18.7	16,3	14.5	8,9	9.8	6,1	3.5	4,8	2.8	4.0	1,0
24 a 25	77,0	58,2	47.7	42.7	34.5	36.3	22.5	19.4	15,3	14,2	8.8	6.3	5.7	4.9	4.3	3,9
25 a 26	89,9	74.4	57.4	58,7	44,5	33.1	36.2	18,6	18.3	14,9	8.4	7,9	7,5	6.7	4.3	4.7
26 a 27	119,8	90,0	70.8	61,1	48.0	42.4	30.9	27,9	28,8	18.8	13.5	9,1	7.8	8,2	9.6	...
27 a 28	128,9	94,5	78.0	78.1	58.4	46.2	34.0	25 2	28,5	20.8	13,6	10.2	8.2	7,7	7,8	3,4
28 a 29	124.5	100,4	76.7	71,1	60,4	40.6	27.8	28,7	23.2	22.5	14,5	7,7	9.8	6.2	10.4	7,1
29 a 30	143,7	95.4	80,2	70.0	54.0	43.0	30.7	30,1	23,7	17.9	13,5	9,6	7,5	7,7	6.4	7,1
30 a 31	131,3	120,2	93,0	79,1	75,2	55.0	41.0	27,4	29.9	24.9	10,6	13,2	11.7	7,7	7.8	5.8
31 a 32	104,0	91.2	90.7	74.3	66.5	49,2	36,4	32,1	31.5	22,5	10.2	9.2	11.9	8,2	8,7	5,0
32 a 33	97,5	101,9	88,9	105,8	76.8	78.1	44,1	30,9	31 9	25.5	16,5	11,2	7.8	12,6	9.0	6,5
33 a 34	89,9	82,1	83.5	82.4	85,5	53.6	52.2	40,4	33.9	27.2	14,0	13.4	11,5	8,7	10.1	5,5
34 a 35	83,0	75.7	76.9	79,6	74,5	62,8	45,8	33,6	35,5	22.0	14.5	11.8	8,0	12.1	8,5	6.0
35 a 36	79,7	72,0	66.5	73.0	64.5	58.2	55,4	37,7	35.8	24.9	19,7	13.2	10,8	12.3	9.8	8,6
36 a 37	65,0	60,2	63,2	63 3	62,4	56,5	49,4	38,7	37,4	27.4	22.8	16.3	14,9	12.6	14,5	7,3
37 a 38	51,6	54,2	57,8	59.2	59.4	47,5	41,0	42,2	36,4	24.5	16.0	14.9	15,6	14.4	12,7	9,2
38 a 39	49,7	50,1	49.8	48,9	57,1	50,4	38.8	37,5	39,9	31.5	21,0	14.9	16,7	11,8	15.1	9,7
39 a 40	48,7	43.0	46,1	49,1	55,8	45,5	39,5	36.5	32,6	26,9	23.7	12.2	12,1	14,9	11,6	11,5
40 a 41	34,4	44,1	47,7	52,8	54.0	37,0	37.9	37.5	34.5	28,6	19.9	24.8	16,0	15,0	15,6	11,8
41 a 42	31,3	31.0	37,0	41,1	42.2	37.0	35,7	32.1	34.7	26.4	22,4	16,3	18,3	15.7	17,4	14,1
42 a 43	28,9	28,6	30.2	41,8	42,2	33.5	33 8	31,6	28,3	23.7	22,4	14,7	18.3	19.0	13,6	13,1
43 a 44	27,2	28,6	28.8	33,7	39.9	33,8	32,1	31,1	30,2	26,4	17.6	15,7	15.3	20,0	18,8	10,3
44 a 45	19,4	25,5	29,6	27,5	26,7	34.3	25,1	38,2	31,2	25,9	21,9	14,9	14,6	14,6	15,6	15,7

NUMERO PROBABILE DEI MATRIMONI CHE AVVENGONO ENTRO DUE ANNI FRA CELIBI O VEDOVI DELL'ETÀ E E NUBILI O VEDOVE DELL'ETÀ F CALCOLATO PER 100,000,000 DI COPPIE POSSIBILI TRA 10,000 INDIVIDUI DI CIASCUN SESSO E DI OGNI ANNO DI ETÀ IN BASE AI DATI GREGGI DEI MATRIMONI AVVENUTI NEL BIENNIO 1878-1879.

Tavola V.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	ETÀ DELLA SPOSA (Anni) 15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29
18 a 19	3	11	31	62	81	76	42	24	23	15	2	6	4	2
19 a 20	11	57	121	242	448	374	241	200	113	47	43	46	14	8
20 a 21	44	234	491	1374	2468	3187	1844	1479	582	311	186	154	94	41
21 a 22	111	521	1764	4493	8256	12213	12299	7994	3989	1735	1151	675	305	253
22 a 23	176	494	2551	7646	15148	27052	25060	28131	12863	6544	3124	2020	1057	700
23 a 24	282	1091	3709	10272	24809	43541	41260	46951	40658	15345	10270	5589	3295	1776
24 a 25	331	1605	5151	15581	33148	68185	68871	85148	59494	49287	22759	13292	7481	4502
25 a 26	468	1330	4421	14769	30634	56737	74764	77874	60465	42629	39672	20251	12823	6960
26 a 27	261	1560	4329	14491	32237	69624	68657	115053	85377	63580	49395	47473	26268	12149
27 a 28	192	880	3656	8541	22044	47343	56643	60528	63571	53633	42122	37225	33101	15307
28 a 29	81	443	1737	7315	14438	31009	38449	59720	51512	46900	40238	36278	27825	22828
29 a 30	50	289	1140	4094	10869	21050	24259	39533	36015	32477	30524	27556	23154	16755
30 a 31	37	136	857	3030	6709	22404	20157	33602	28912	26753	30783	26504	25005	19268
31 a 32	19	120	494	1643	3896	9122	13483	21583	20580	18690	21303	18215	19445	15655
32 a 33	34	92	373	1231	3493	7967	10793	20481	17063	18263	18687	17512	18822	14412
33 a 34	10	49	261	670	2034	6594	6908	12350	12523	13678	14377	15368	16247	15676
34 a 35	6	35	132	421	1411	3630	4691	9346	10476	10078	10372	12859	13016	11213
35 a 36	5	14	78	328	926	2011	3435	6075	6420	6848	9429	8227	9321	8693
36 a 37	5	10	87	198	448	1308	2064	4073	4358	4893	6095	8142	7333	7474
37 a 38	1	10	31	99	320	788	1505	2617	2772	3511	4971	4767	8212	5519
38 a 39	...	7	23	94	212	503	797	1421	2198	2237	2750	4131	4694	6170
39 a 40	1	2	11	47	119	298	489	995	1206	1705	2343	2179	1636	3382
40 a 41	...	1	8	22	76	237	284	705	856	1308	1792	2515	2869	3098
41 a 42	...	2	7	9	26	101	160	512	410	623	765	1240	1441	2045
42 a 43	...	3	2	7	33	93	131	370	586	779	638	1276	1533	1260
43 a 44	...	1	1	8	32	61	80	145	314	432	679	720	1171	1366
44 a 45	...	1	2	6	15	44	85	113	160	226	500	325	827	1114

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38	38 a 39	39 a 40	40 a 41	41 a 42	42 a 43	43 a 44	44 a 45
18 a 19	1	1	...	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
19 a 20	3	5	2	2	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20 a 21	28	18	4	8	2	4	...	1	1	1	...	...	...	...	...	...
21 a 22	84	61	46	25	13	10	4	4	3	1	2	1	...	1	1	...
22 a 23	322	129	94	92	72	47	16	24	7	4	2	2	1	...	2	1
23 a 24	911	598	293	218	120	77	59	45	16	21	9	3	5	2	3	...
24 a 25	2087	1161	655	470	276	320	125	91	52	49	20	12	8	6	4	3
25 a 26	3170	2117	1055	991	511	297	360	93	85	60	20	21	16	11	4	6
26 a 27	6230	3433	1775	1211	645	537	291	232	223	106	58	33	19	19	23	...
27 a 28	8288	4349	2477	2236	1115	737	405	222	254	148	68	45	25	19	18	4
28 a 29	8780	5567	2738	2098	1356	646	307	319	190	197	88	28	40	14	36	18
29 a 30	13739	5908	3499	2387	1274	853	439	415	233	146	89	53	28	27	16	21
30 a 31	12821	10243	5164	3415	2729	1555	876	385	415	294	62	110	86	29	26	16
31 a 32	9708	6877	6032	3631	2608	1497	835	634	556	312	69	66	93	40	39	14
32 a 33	9806	10463	6659	8457	3995	2995	1438	675	618	459	210	111	46	107	48	28
33 a 34	9700	7894	6839	5960	5754	2374	2295	1345	860	608	175	183	116	60	72	23
34 a 35	8719	7052	6117	5873	4607	3444	1875	978	997	422	197	151	60	121	48	29
35 a 36	8503	6773	4833	5225	3660	3131	2880	1309	1073	529	385	199	114	133	75	64
36 a 37	6063	5079	4670	4209	3670	3136	2449	1474	1253	740	555	326	233	149	175	49
37 a 38	4277	4612	4226	4124	3720	2500	1892	1958	1325	661	308	307	286	218	152	87
38 a 39	4059	4018	3321	2870	3508	2875	1734	1582	1626	1123	539	313	336	150	216	99
39 a 40	3968	3020	2898	2950	3414	2390	1831	1528	1107	832	700	212	181	243	150	142
40 a 41	1883	3054	2952	3235	3037	1499	1595	1529	1176	893	456	833	299	239	225	141
41 a 42	1742	1679	2007	2213	2098	1693	1602	1266	1349	860	667	408	441	288	314	230
42 a 43	1645	1570	1471	2515	2306	1534	1576	1350	983	762	733	363	185	466	212	217
43 a 44	1623	1746	1484	1825	2292	1731	1584	1455	1243	1051	506	463	378	576	451	148
44 a 45	805	1346	1523	1180	1105	1728	943	1157	1551	909	759	406	335	298	302	337

NUMERO PROBABILE E PEREQUATO DEGLI INDIVIDUI CHE SI MARITANO ENTRO DUE ANNI CALCOLATO PER 10,000 INDIVIDUI DI CIASCUN SESSO E DI OGNI GRADO DI ETÀ.

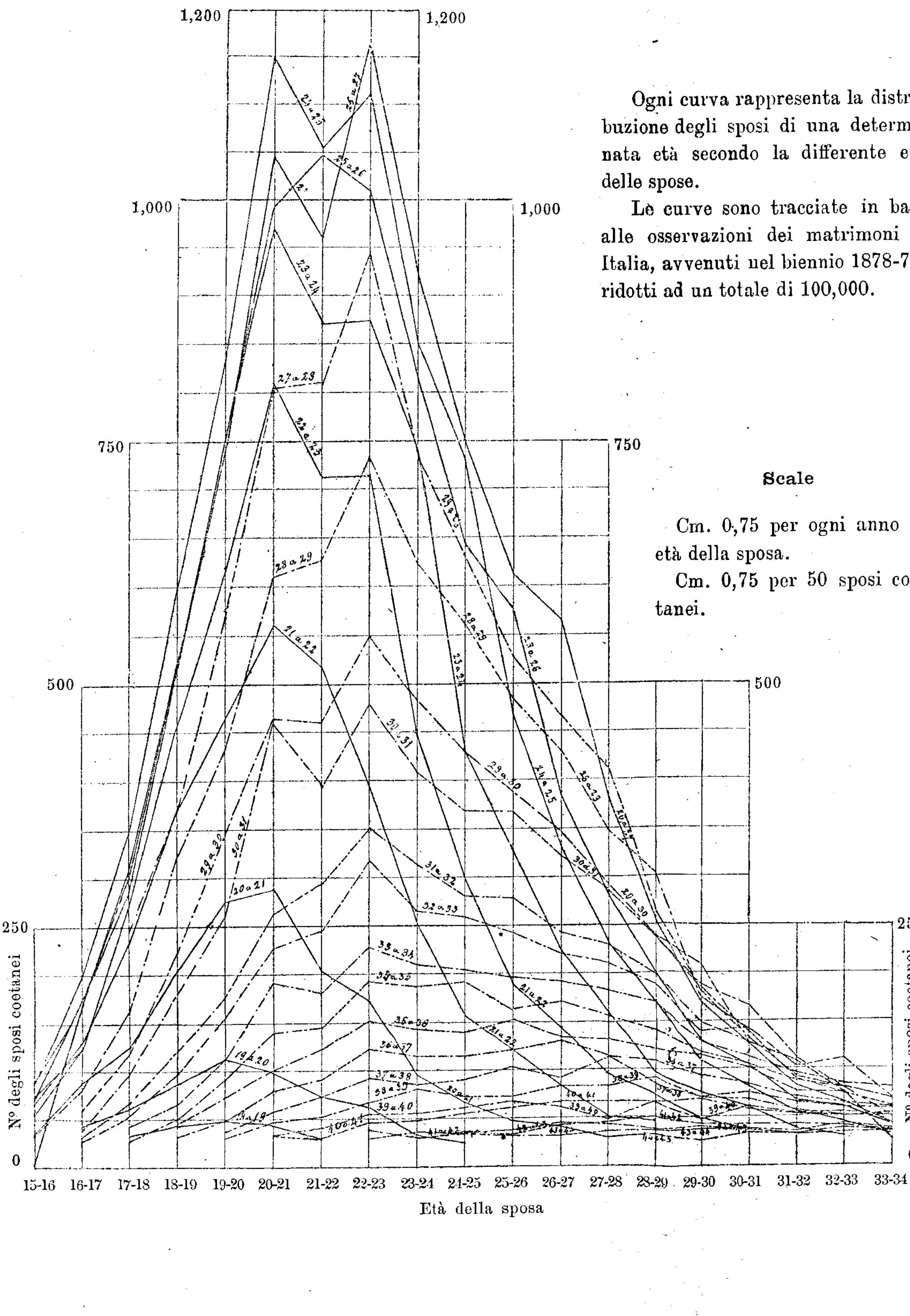
Tavola VI.

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	ETÀ DELLA SPOSA (Anni)													
	15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28	28 a 29
18 a 19	3	5	8	10	12	12	10	9	7	5	4	4	3	2
19 a 20	6	11	17	19	30	31	29	23	18	12	9	8	6	5
20 a 21	10	19	32	47	61	68	67	56	48	30	22	17	13	10
21 a 22	13	27	47	70	95	110	115	102	84	58	42	31	24	18
22 a 23	17	34	60	93	130	153	165	156	135	103	72	55	42	31
23 a 24	21	41	73	115	165	196	220	220	196	156	119	87	67	50
24 a 25	24	45	80	126	182	222	250	249	230	195	156	123	92	69
25 a 26	25	47	84	131	193	236	276	278	266	229	197	163	129	95
26 a 27	23	44	77	123	181	223	264	272	263	236	210	185	153	118
27 a 28	19	38	69	110	166	206	246	258	258	235	215	194	170	134
28 a 29	15	31	56	91	136	172	205	219	222	210	196	182	163	137
29 a 30	11	23	46	75	116	145	180	192	199	190	182	173	158	138
30 a 31	8	19	36	60	96	121	151	163	169	165	161	157	146	131
31 a 32	7	15	30	49	81	104	133	144	151	149	148	148	139	127
32 a 33	6	13	26	39	64	85	110	123	131	131	132	133	130	120
33 a 34	5	10	19	34	55	73	96	108	118	119	121	123	123	114
34 a 35	4	8	15	26	45	59	78	90	99	103	107	110	111	106
35 a 36	3	6	12	21	34	47	64	75	84	88	93	97	98	94
36 a 37	2	5	10	17	27	38	51	61	68	74	80	86	87	85
37 a 38	2	4	8	13	21	30	41	51	56	61	68	75	79	77
38 a 39	1	3	6	10	17	24	32	39	46	51	56	63	67	68
39 a 40	1	2	5	8	13	18	25	31	38	43	48	53	59	59
40 a 41	1	2	3	6	10	14	21	25	30	35	40	43	48	49
41 a 42	1	1	3	5	8	11	17	21	26	29	35	40	44	44
42 a 43	1	1	2	4	6	9	14	18	22	24	28	32	37	39
43 a 44	...	1	2	3	6	8	11	15	19	22	25	29	33	36
44 a 45	...	1	2	3	5	7	9	11	14	18	21	25	29	32

ETÀ DELLO SPOSO (Anni)	29 a 30	30 a 31	31 a 32	32 a 33	33 a 34	34 a 35	35 a 36	36 a 37	37 a 38	38 a 39	39 a 40	40 a 41	41 a 42	42 a 43	43 a 44	44 a 45
18 a 19	1	1	1	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
19 a 20	3	3	2	1	1	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20 a 21	7	5	4	3	3	2	1	1	1	1	1	...	...	...	...	...
21 a 22	13	10	7	6	5	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1	...
22 a 23	23	17	13	10	8	7	6	4	4	3	2	2	1	1	1	1
23 a 24	37	26	20	16	14	11	9	7	6	4	4	3	2	2	1	1
24 a 25	51	37	29	23	19	15	13	10	8	6	4	4	3	2	2	2
25 a 26	68	49	38	29	24	19	16	13	10	8	6	5	4	3	3	2
26 a 27	83	60	47	37	30	24	19	15	13	11	8	6	5	4	3	3
27 a 28	98	70	54	42	34	26	20	16	14	12	9	7	5	5	4	4
28 a 29	106	78	59	46	38	28	22	18	15	13	10	7	6	5	4	4
29 a 30	113	87	68	52	43	34	25	20	17	14	11	8	7	6	5	4
30 a 31	111	91	72	59	47	38	29	23	19	16	12	9	8	7	5	4
31 a 32	110	93	82	69	59	45	35	27	22	18	14	9	9	8	6	5
32 a 33	106	91	84	75	65	51	38	32	26	21	16	11	10	8	7	6
33 a 34	103	90	85	78	69	57	44	35	28	23	17	12	10	9	8	6
34 a 35	97	86	78	71	67	58	47	39	30	24	18	13	11	9	8	7
35 a 36	88	80	74	69	64	57	48	40	31	26	20	16	13	11	10	8
36 a 37	80	74	70	65	61	55	48	42	34	28	21	17	15	13	11	9
37 a 38	73	67	64	62	59	53	47	41	36	30	23	19	16	15	12	10
38 a 39	66	62	60	60	56	51	45	40	36	30	24	19	16	15	13	11
39 a 40	60	57	56	56	53	49	43	39	36	31	26	21	18	15	13	12
40 a 41	51	51	52	52	50	45	41	39	34	30	25	22	19	16	15	13
41 a 42	44	45	48	49	48	43	39	37	34	29	26	23	21	18	16	14
42 a 43	40	40	43	45	45	43	39	37	34	30	25	22	22	20	18	15
43 a 44	37	38	40	42	43	41	38	36	34	31	26	22	21	20	18	15
44 a 45	34	35	36	38	42	38	36	35	30	30	25	22	20	20	18	16

TAVOLA I.

Matrimoni classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.



Ogni curva rappresenta la distribuzione degli sposi di una determinata età secondo la differente età delle spose.

Le curve sono tracciate in base alle osservazioni dei matrimoni in Italia, avvenuti nel biennio 1878-79, ridotti ad un totale di 100,000.

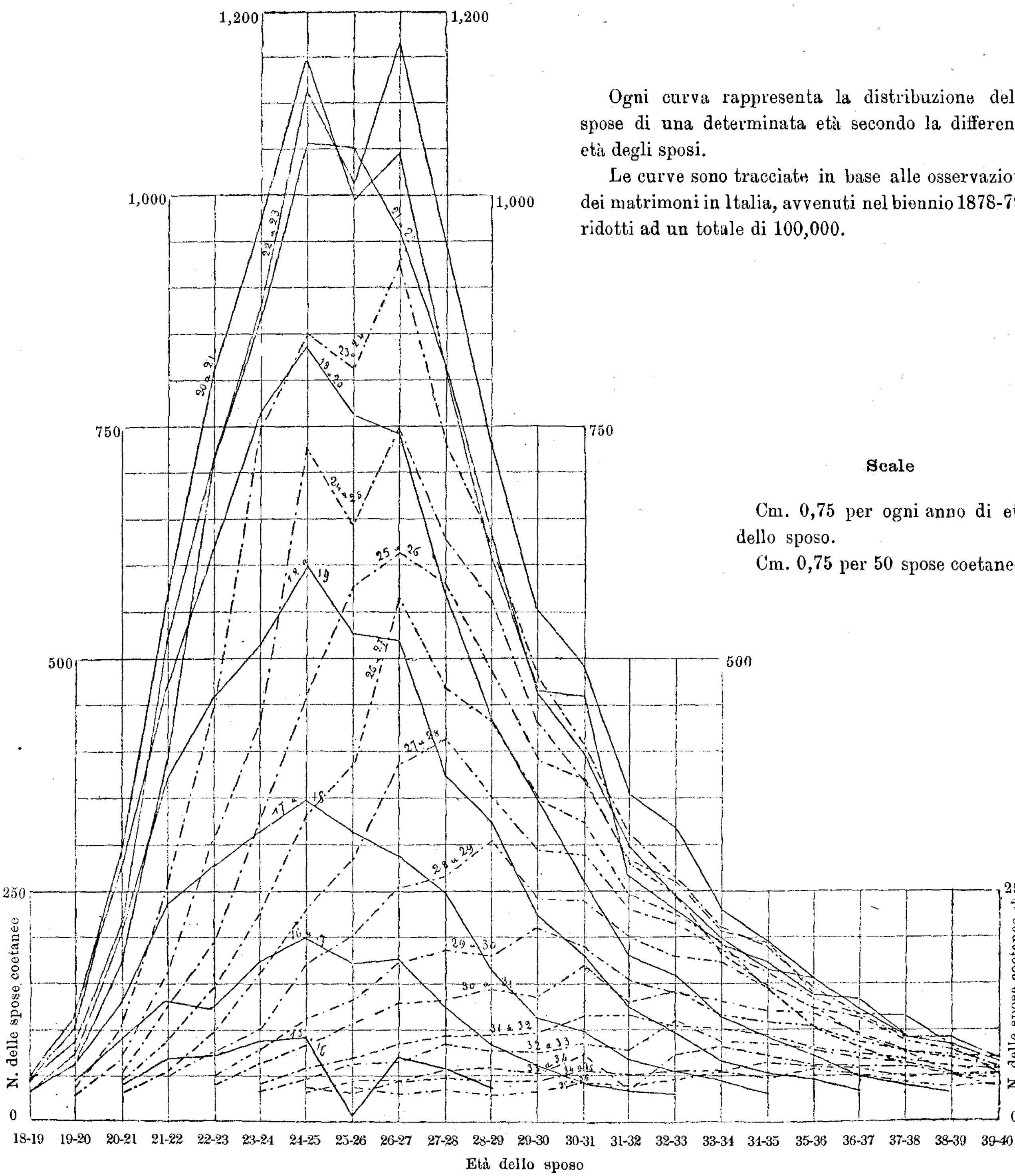
Scale

Cm. 0,75 per ogni anno di età della sposa.

Cm. 0,75 per 50 sposi coetanei.

TAVOLA II.

Matrimoni classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.



Ogni curva rappresenta la distribuzione delle spose di una determinata età secondo la differente età degli sposi.

Le curve sono tracciate in base alle osservazioni dei matrimoni in Italia, avvenuti nel biennio 1878-79, ridotti ad un totale di 100,000.

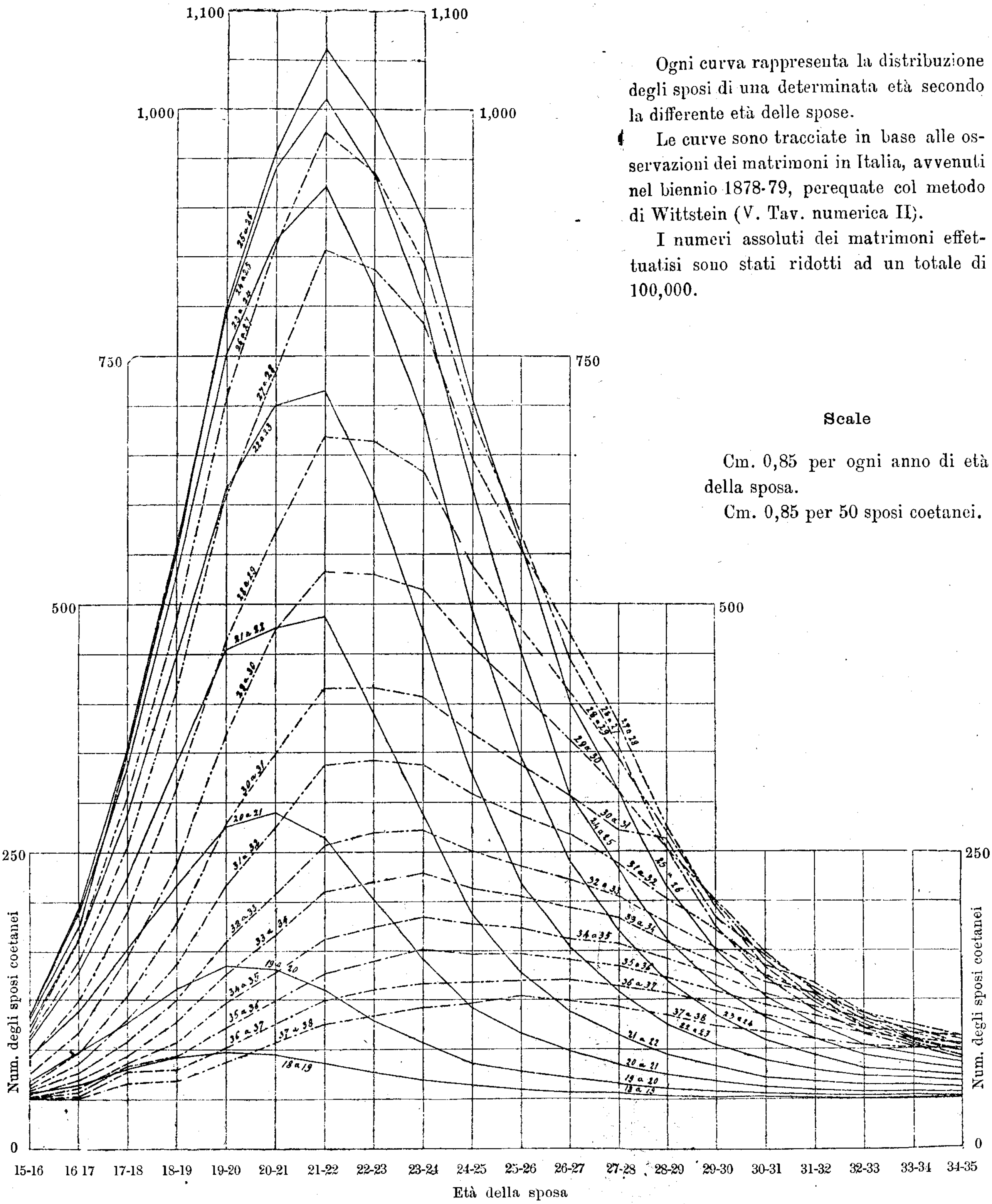
Scale

Cm. 0,75 per ogni anno di età dello sposo.

Cm. 0,75 per 50 spose coetanee.

TAVOLA III.

Matrimoni classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.



Ogni curva rappresenta la distribuzione degli sposi di una determinata età secondo la differente età delle spose.

Le curve sono tracciate in base alle osservazioni dei matrimoni in Italia, avvenuti nel biennio 1878-79, perequate col metodo di Wittstein (V. Tav. numerica II).

I numeri assoluti dei matrimoni effettuatisi sono stati ridotti ad un totale di 100,000.

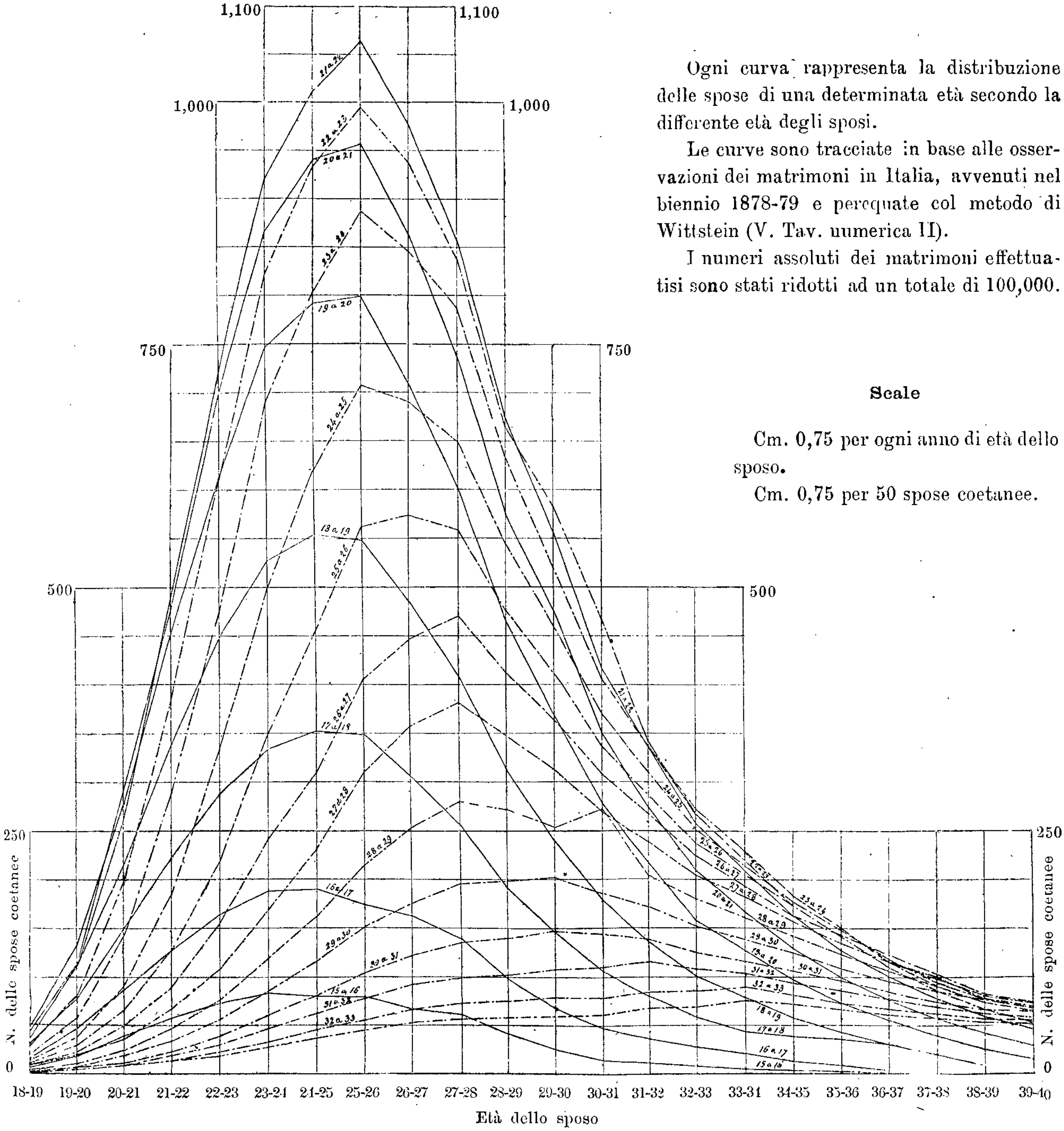
Scale

Cm. 0,85 per ogni anno di età della sposa.

Cm. 0,85 per 50 sposi coetanei.

TAVOLA IV.

Matrimoni classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.



Ogni curva rappresenta la distribuzione delle spose di una determinata età secondo la differente età degli sposi.

Le curve sono tracciate in base alle osservazioni dei matrimoni in Italia, avvenuti nel biennio 1878-79 e perequate col metodo di Wittstein (V. Tav. numerica II).

I numeri assoluti dei matrimoni effettuatisi sono stati ridotti ad un totale di 100,000.

Scale

Cm. 0,75 per ogni anno di età dello sposo.

Cm. 0,75 per 50 spose coetanee.

TAVOLA V.

Matrimoni classificati secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.

Curve di eguale numero di matrimoni nelle varie combinazioni di età dei conjugi.

Le curve sono tracciate in base alle osservazioni dei matrimoni in Italia, avvenuti nel biennio 1878-79, perequate col metodo di Wittstein. I numeri assoluti dei matrimoni effettuatisi sono stati ridotti ad un totale di 100,000 (V. Tavola numerica II).

Scala — Cm. 0,9 per ogni anno di età.

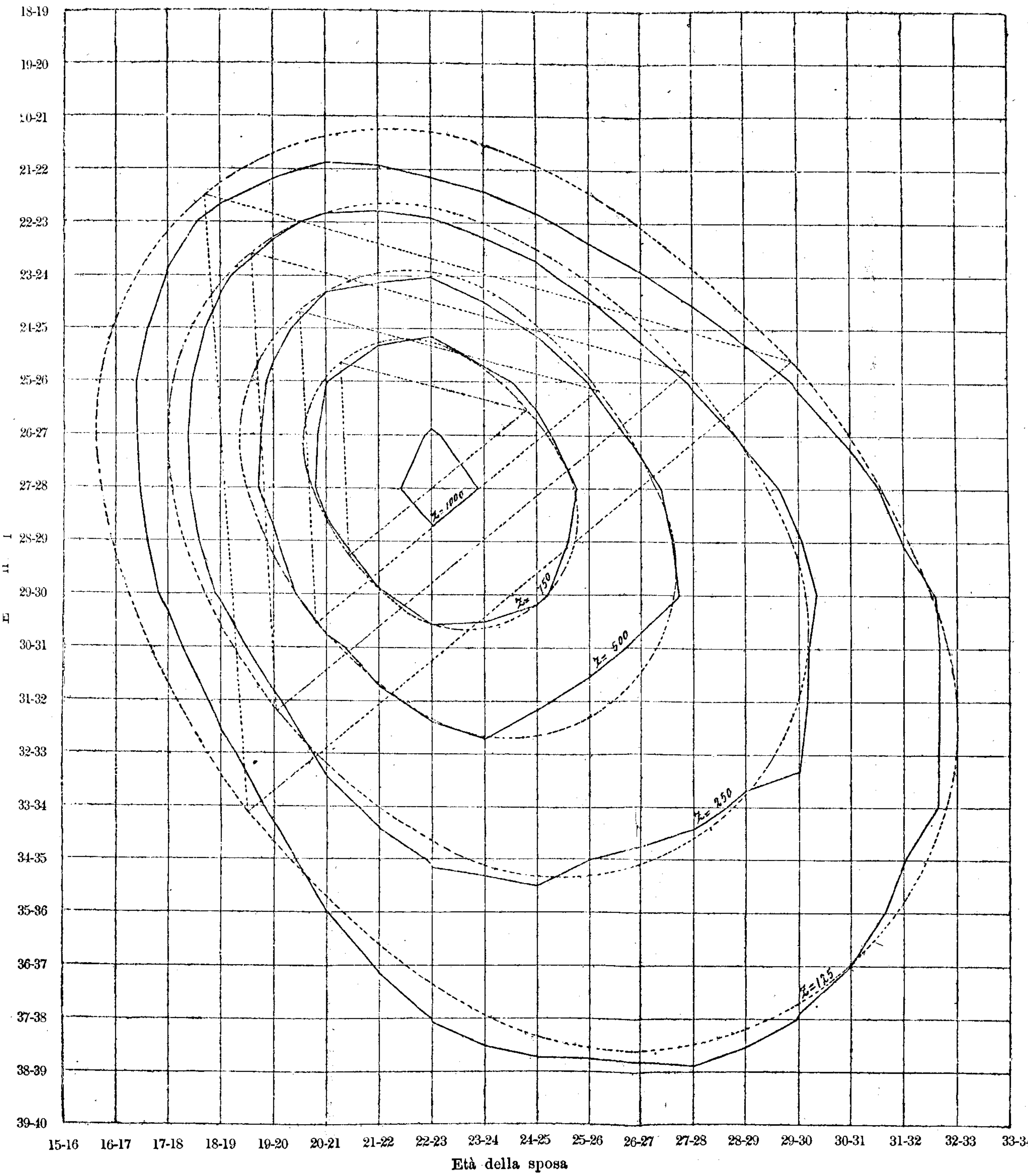
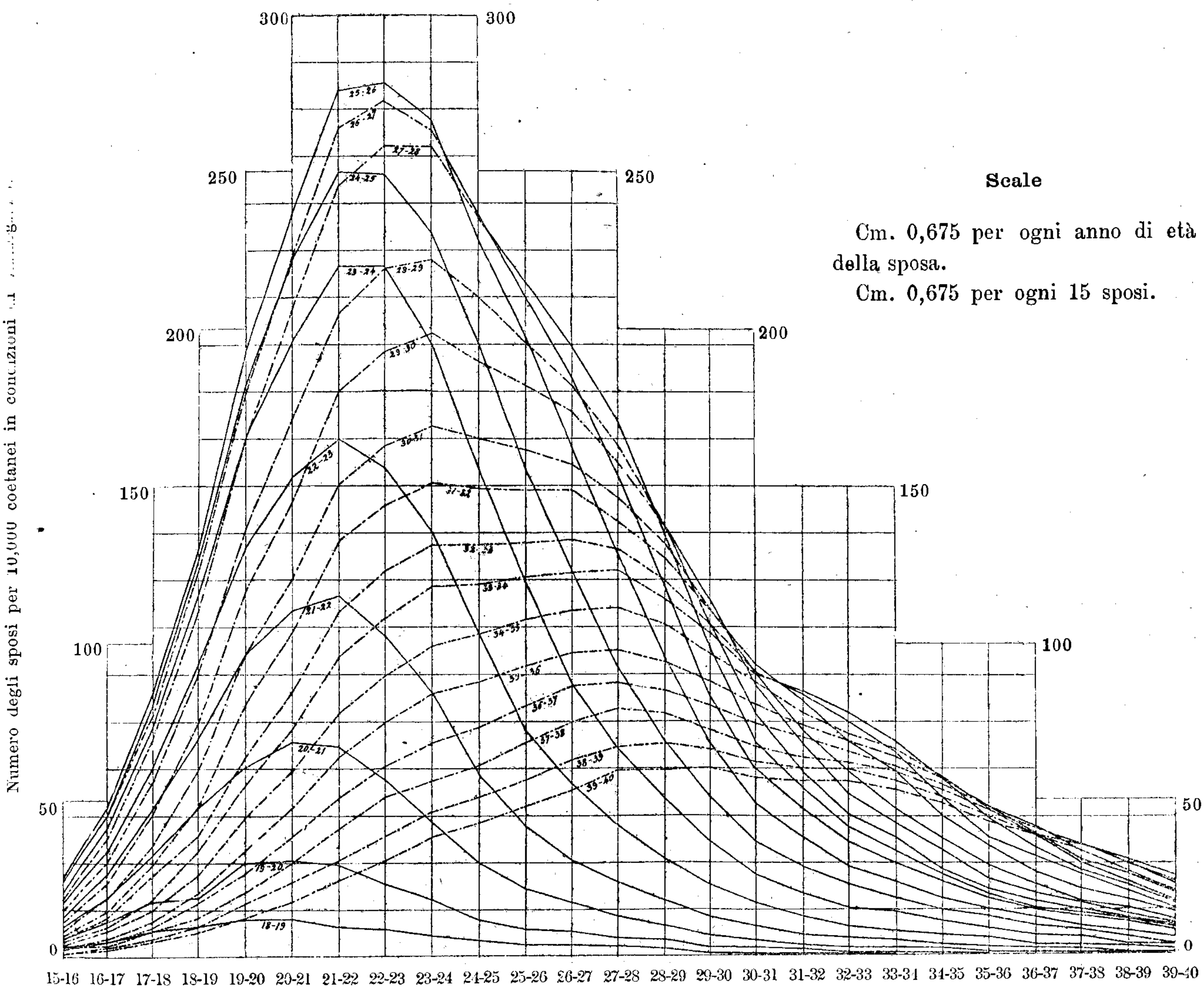


TAVOLA VI.

Probabilità di maritarsi entro due anni, secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.

Ogni curva rappresenta la distribuzione delle probabilità che uomini di una determinata età hanno di ammogliarsi con donne dei vari gradi di età.

Le curve sono tracciate in base al numero probabile e perequato degli uomini che si maritano entro due anni (V. Tavola numerica VI). La scala di probabilità segnata nella figura si riferisce a 10,000 individui di ogni sesso.



Scale

Cm. 0,675 per ogni anno di età della sposa.

Cm. 0,675 per ogni 15 sposi.

TAVOLA VII.

Probabilità di maritarsi entro due anni, secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.

Ogni curva rappresenta la distribuzione delle probabilità che donne di una determinata età hanno di maritarsi con uomini dei vari gradi di età.

Le curve sono tracciate in base al numero probabile e perequato delle donne che si maritano entro due anni (V. Tavola numerica VI). La scala di probabilità segnata nella figura si riferisce a 10,000 individui di ogni sesso.

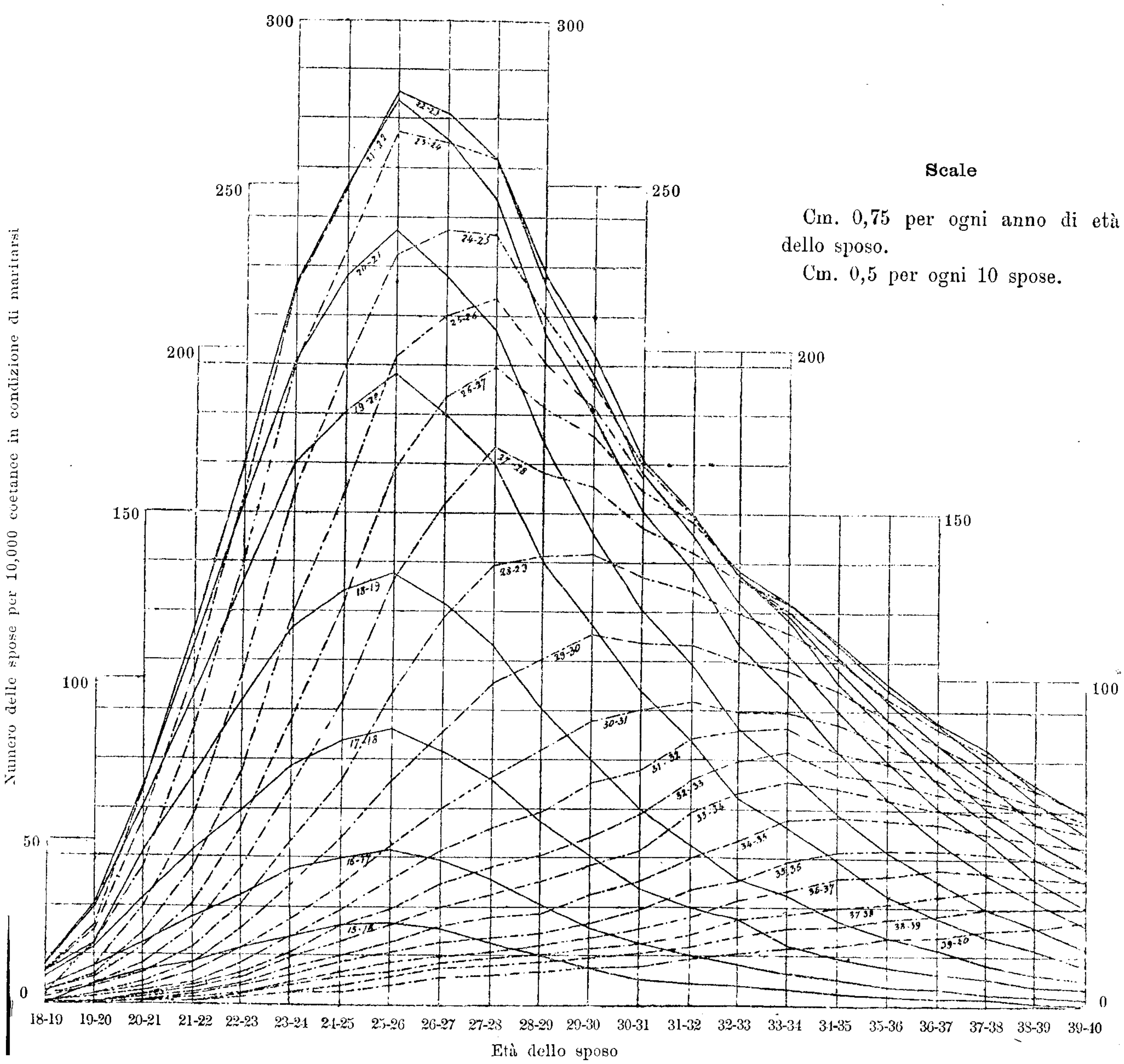


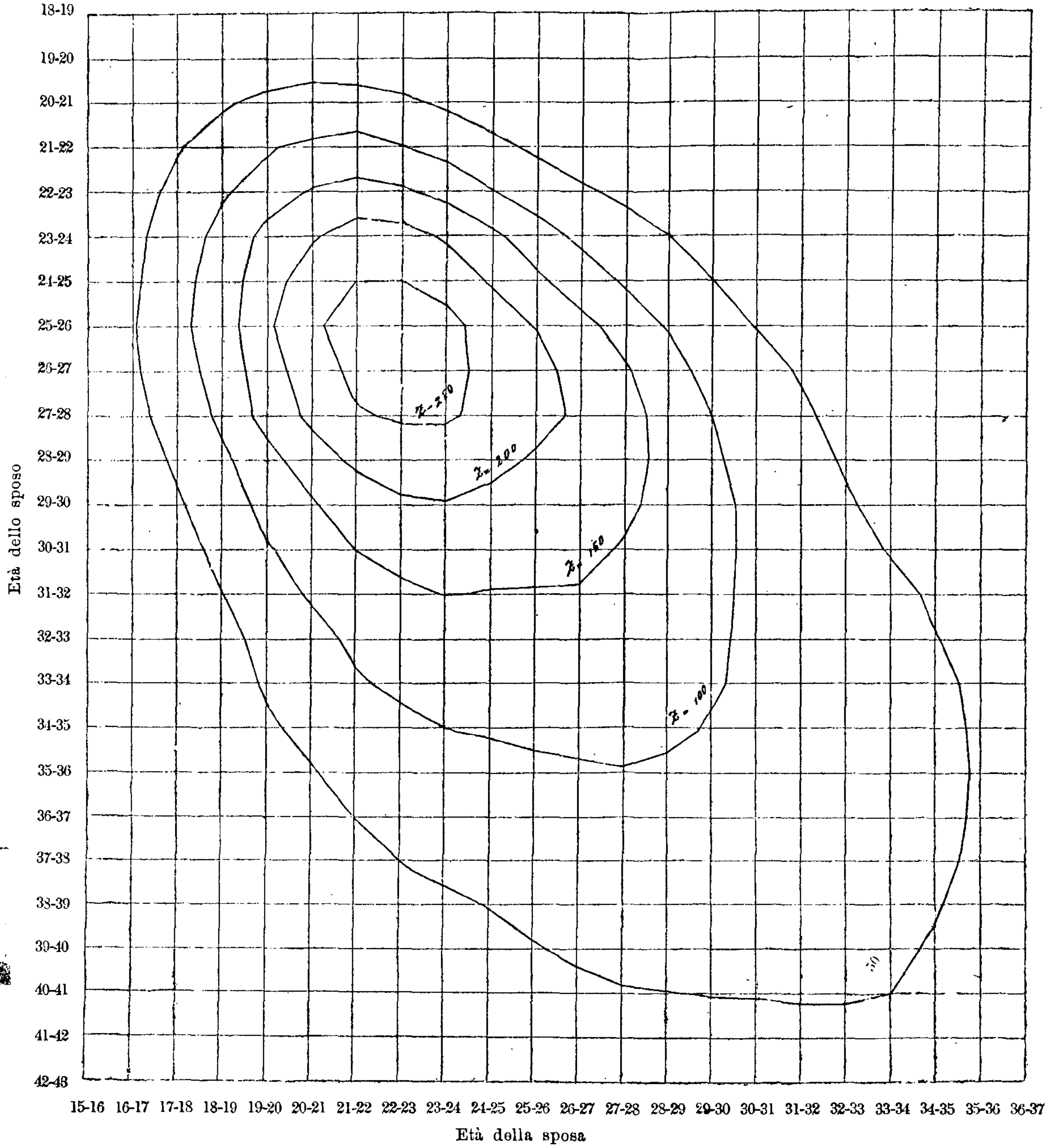
TAVOLA VIII.

Probabilità di maritarsi entro due anni, secondo le varie combinazioni di età degli sposi e delle spose.

Ogni curva rappresenta le varie combinazioni delle età dei coniugi, alle quali corrisponde una medesima probabilità di matrimonio.

Le curve sono tracciate in base al numero probabile e perequato degli individui che si maritano entro due anni (V. Tavola numerica VI). Le probabilità registrate nella figura accanto ad ogni curva si riferiscono a 10,000 individui di ogni sesso.

Scala — Cm. 0,65 per ogni anno di età.



PROBABILITÀ DI MARITARSI
ENTRO VN ANNO
SECONDO LE VARIE COMBINAZIONI DI ETÀ DEGLI SPOSI E DELLE SPOSE

Osservazioni del biennio 1878-79 Rapporti perequati a 10.000 celibi o vedovi e rispettivamente a 100 000 nubili o vedove delle singole età

- PROBABILITÀ CHE UN UOMO DI UNA DETERMINATA ETÀ HA DI AMMOGLIARSI CON DONNE DEI VARII GRADI DI ETÀ
- PROBABILITÀ CHE UNA DONNA DI UNA DETERMINATA ETÀ HA DI MARITARSI CON UOMINI DEI VARII GRADI DI ETÀ
- COMBINAZIONI DELLE ETÀ DEI CONIUGI ALLE QUALI CORRISPONDE UNA MEDESIMA PROBABILITÀ DI MATRIMONIO

SCALE DELLO STEREOGRAMMA

1cm. PER OGNI ANNO DI ETÀ 2cm. PER 15 MATRIMONI

SISTEMA DEGLI ASSI

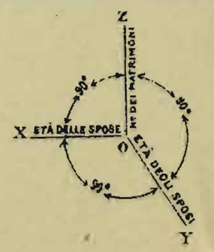


Fig. 1.a

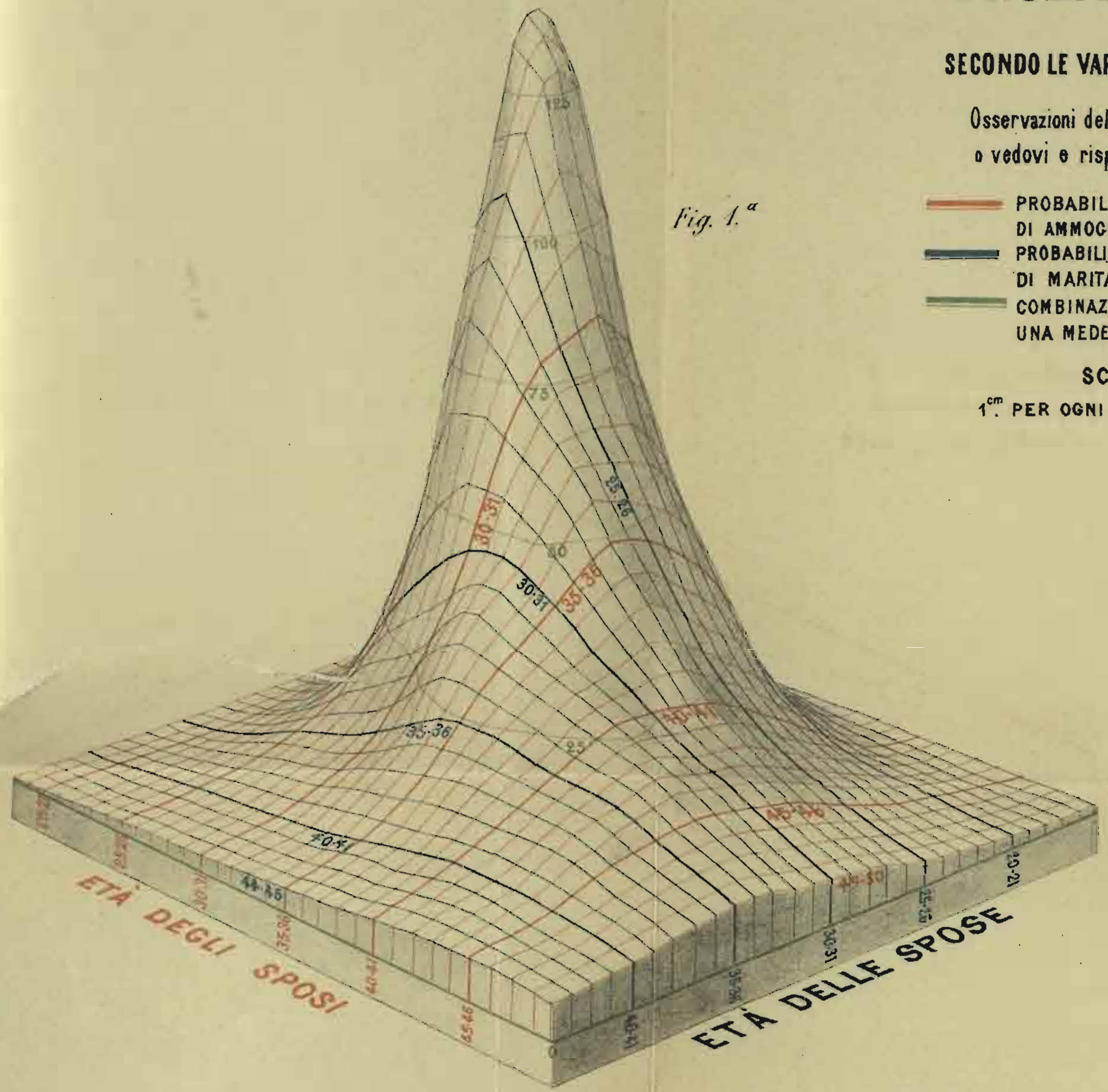
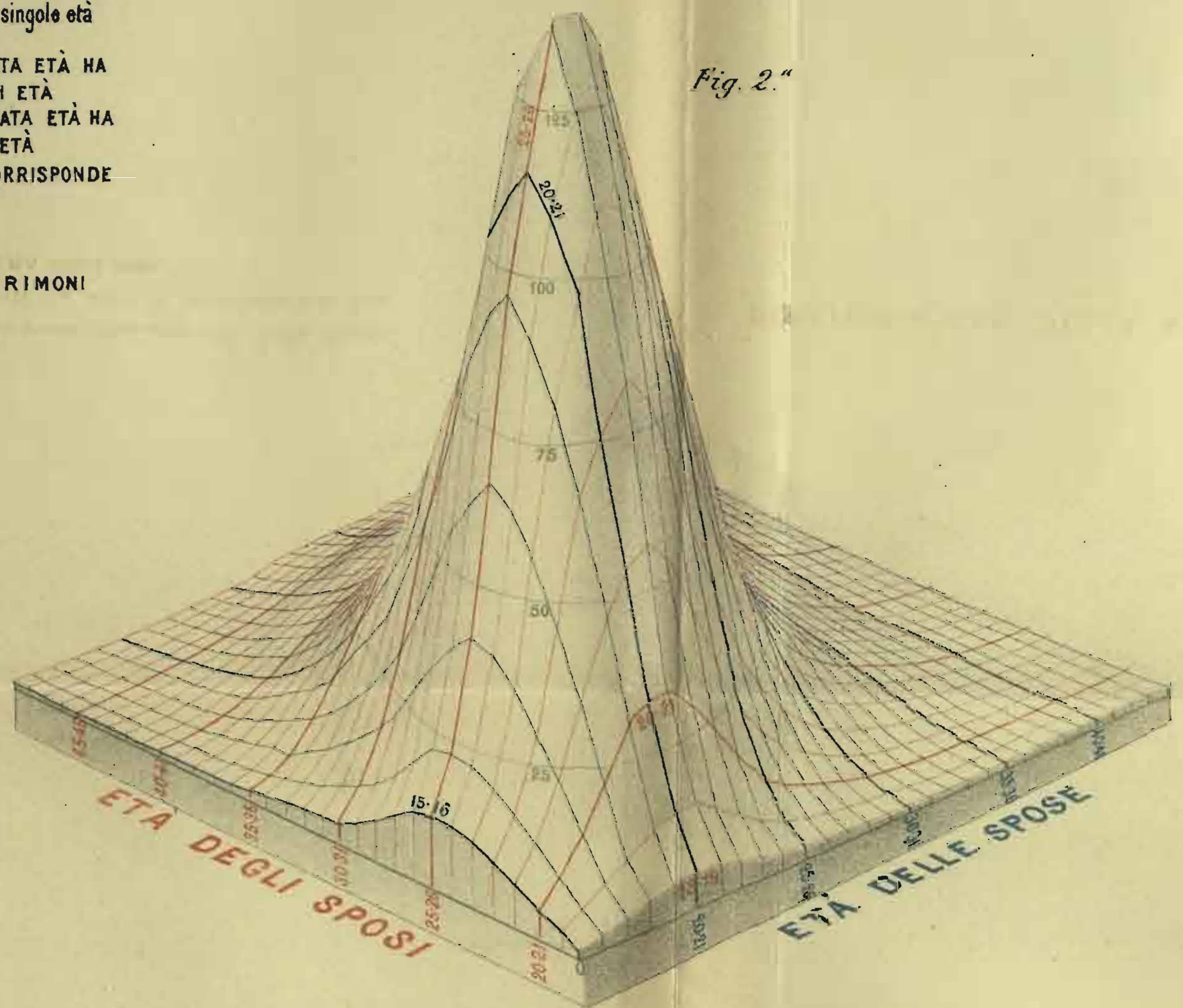


Fig. 2.a



REGNO D' ITALIA

NOTA. Le due figure di questa tavola rappresentano le proiezioni centrali dello Stereogramma, costruito colle scale sopra indicate e mediante tre assi di coordinate, ai quali è data la significazione nel diagramma del SISTEMA DEGLI ASSI.

DIREZIONE GEN. DELLA STATISTICA

Stab. Lit. C. Virano Roma.