Direzione Generale della STATISTICA e del LAVORO.

Annali di Statistica

GIORGIO MORTARA

Sulle variazioni di frequenza di alcuni fenomeni demografici rari.

Le variazioni della mortalità da generazione a generazione in Svezia.

Serie V, vol. 4.

Roma, 1912
Tipografia Nazionale
di G. Bertero & C.

A Sua Eccellenza

l'On. Prof. FRANCESCO NITTI

Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio.

A breve distanza dai tre precedenti, mi onoro di presentare all'E. V. il quarto dei volumi della nuova serie degli *Annali di Statistica.*

Questo volume contiene due studi di demografia del prof. GIORGIO MORTARA, dell'Università di Messina.

Nel primo di questi lavori l'Autore prende in esame le variazioni di frequenza di alcuni fenomeni demografici rari e porta un contributo allo studio della legge che il *Bortkiewicz* ha chiamato dei *piccoli numeri*, colla ricerca di uno schema, più generale di quelli finora acquisiti alla scienza, per rappresentare il modo di manifestazione dei fenomeni collettivi, facendone poi alcune interessanti applicazioni a fenomeni collettivi rari.

Nel secondo studio l'Autore si propone di esaminare l'ordine di estinzione di alcune generazioni determinate, intorno al quale problema si affaticano da tempo, e con risultati ancora incerti, i demografi. Egli ha fatto oggetto di studio il materiale raccolto nelle statistiche svedesi (le quali consentono un periodo di osservazioni di ben 160 anni ed offrono quindi il materiale il più ricco e il più adatto a siffatte ricerche) per scoprire l'influenza che può avere esercitata la diminuzione delle morti infantili, sia sotto l'aspetto biologico, sia sotto l'aspetto economico.

Anche da questi pochi cenni sulle tesi propostesi dall'Autore si rileva l'importanza di questi due studi del dott. MORTARA, al quale rivolgo vivi ringraziamenti per averli offerti ai nostri *Annali.*

Il Direttore Generale della Statistica e del Lavoro

G. MONTEMARTINI.

SULLE VARIAZIONI DI FREQUENZA

DI

ALCUNI FENOMENI DEMOGRAFICI RARI

I.

1. — Siano date w serie, ognuna composta di n quantità positive o nulle. Ciascuna di codeste quantità x sia contraddistinta da due indici, il primo numero d'ordine della serie cui la quantità appartiene, il secondo numero d'ordine della quantità nella serie. Nel seguente schema ciascuna colonna comprende una serie, ciascuna linea contiene le quantità che occupano lo stesso posto nelle diverse serie:

$$\begin{matrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots\cdots\cdots & x_{w,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots\cdots\cdots & x_{w,2} \\ x_{1,3} & x_{2,3} & \cdots\cdots\cdots & x_{w,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots\cdots\cdots & x_{w,n} \end{matrix} \qquad [1]$$

Indicandosi con p_h la media aritmetica dell' h^{ma} linea, con π_i quella dell' i^{ma} colonna, si ha:

$$\frac{\sum\limits_{h=1}^{n} p_h}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{w} \pi_i}{w} = \Pi \qquad [2]$$

Adottiamo i seguenti simboli:

$$
\begin{array}{llll}
\delta_{i,h} = x_{i,h} - p_h & \qquad \delta'_{i,h} = x_{i,h} - P & & \\
d_h = p_h - \Pi & \qquad d'_h = p_h - P & & [3] \\
D_i = \pi_i - \Pi & \qquad D'_i = \pi_i - P & & \\
 & \qquad \Delta = \Pi - P & &
\end{array}
$$

La grandezza P verrà definita più avanti.

La media aritmetica dei quadrati D_i^2 si può rappresentare [1] con la formola:

$$
\frac{1}{w\, n^2}\left(\sum_{i=1}^{w} \sum_{h=1}^{n} \delta_{i,h}^2 + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{w} \delta_{i,1}\, \delta_{i,2} + \sum_{i=1}^{w} \delta_{i,1}\, \delta_{i,3} + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{w} \delta_{i,2}\, \delta_{i,3} + \ldots\ldots \right\} \right) \qquad [4]
$$

A ciascuna espressione del tipo $\sum_{i=1}^{w} \delta_{i,h}\, \delta_{i,k}$ possiamo sostituirne [2] una del tipo

$$
r_{h,k} \left(\sum_{i=1}^{w} \delta_{i,h}^2 \sum_{i=1}^{w} \delta_{i,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [5]
$$

venendo definita la quantità $r_{h,k}$ (*coefficiente di correlazione* fra la h^{ma} e la k^{ma} linea dello schema [1]) dalla relazione:

---

(1) Si giunge facilmente alla [4], osservando che:

$$
D_i = \pi_i - \Pi = \frac{x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots\ldots + x_{i,n}}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n}{n} =
$$

$$
= \frac{(x_{i,1} - p_1)}{n} + \frac{(x_{i,2} - p_2)}{n} + \ldots\ldots = \frac{1}{n}\left(\delta_{i,1} + \delta_{i,2} + \ldots\ldots\right)
$$

(2) La sostituzione [5] è suggerita da YULE, *Theory of Statistics* (London, Griffin, 1911), pag. 208. La [7] è un'estensione della formola che dà lo stesso autore (pag. 346) per il caso in cui p_h = costante (per $h = 1, 2, \ldots\ldots, n$). Il significato del simbolo r coincide nelle due formole nell'ipotesi indicata in fine del n. 1. Intorno al significato del coefficiente di correlazione vedasi la citata opera di YULE, pag. 173 e seguenti.

$$r_{h,k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{w} \delta_{i,h}\,\delta_{i,k}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{w} \delta_{i,h}^2 \sum\limits_{i=1}^{w} \delta_{i,k}^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad [6]$$

Adottando inoltre il simbolo δ^2 per la media aritmetica di tutti i quadrati $\delta_{i,h}^2$, il simbolo D^2 per la media aritmetica di tutti i quadrati D_i^2 e determinando la quantità r in modo che sia $r\,w\,\delta^2$ eguale alla media aritmetica di tutti i $\frac{n\,(n-1)}{2}$ prodotti del tipo [5] che compariscono, ciascuno due volte, nell'espressione di D^2, possiamo scrivere:

$$D^2 = \frac{1}{n}\left(\delta^2 + (n-1)\,r\,\delta^2\right) = \frac{\delta^2}{n}\left(1 + (n-1)\,r\right). \quad [7]$$

Quand'è, per ogni valore di h e di k,

$$\sum_{i=1}^{w} \delta_{i,h}^2 \sum_{i=1}^{w} \delta_{i,k}^2 = \text{costante},$$

come avviene quando tutte le somme di quadrati sono eguali fra loro, r è la media aritmetica di tutte le $r_{h,k}$.

2. — Supponiamo dati l gruppi di serie analoghi a quello rappresentato nello schema [1]. In ciascun gruppo siano rispettivamente D'^2, δ'^2, d^2, d'^2, le medie aritmetiche dei quadrati del tipo D'^2_i, $\delta'^2_{i,h}$, d^2_h, d'^2_h. Distinguiamo con un indice e le quantità riferentisi all' e^{mo} fra gli l gruppi dati e indichiamo con P la media aritmetica delle quantità ${}^e\Pi$.

Essendo (1) per ciascun gruppo:

$${}^eD'^2 = \frac{{}^e\delta'^2 - {}^ed'^2}{{}^en}\left(1 + ({}^en - 1)\,{}^er\right) + {}^e\Delta^2, \quad [8]$$

(1) La media dei quadrati degli scostamenti di una serie di quantità da una quantità qualsiasi m' è eguale alla media dei quadrati degli scostamenti di esse dalla loro media aritmetica m (*fluttuazione*), aumentata del quadrato della differenza $(m - m')$. La precedente relazione permette il passaggio dalla [7] alla [8].

per l'insieme degli l gruppi si ha (1):

$$\frac{\sum_{e=1}^{l} {}^e n \, {}^e D'^2}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} = \frac{\sum_{e=1}^{l} \left\{ ({}^e\delta'^2 - {}^e d'^2) [1 + ({}^e n - 1) \, {}^e r] + {}^e n \, {}^e \Delta^2 \right\}}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} . \quad [9]$$

Indicando con Q^2 il quoziente dell'uno o dell'altro membro della precedente eguaglianza per $\frac{\sum_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n}$, si ha:

$$Q^2 = 1 + \frac{\sum_{e=1}^{l} \left\{ {}^e\delta'^2 ({}^e n - 1) \, {}^e r - {}^e d'^2 (1 + \{{}^e n - 1\} \, {}^e r) + {}^e n \, {}^e \Delta^2 \right\}}{\sum_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2} . \quad [10]$$

Se, per tutti i valori di e, si ha ${}^e r = 0$, come avviene in particolare quando tutte le $r_{h,k}$ sono nulle, la formola [10] si riduce (2) a:

$$Q^2 = 1 + \frac{\sum_{e=1}^{l} \left({}^e n \, {}^e \Delta^2 - {}^e d'^2 \right)}{\sum_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2} = 1 + \frac{\sum_{e=1}^{l} \left(\{{}^e n - 1\} \, {}^e \Delta^2 - {}^e d^2 \right)}{\sum_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2} . \quad [11]$$

---

(1) YULE (*op. cit.* pag. 283, 346) sembra ritenere che variando le ${}^e\Pi$ da gruppo a gruppo ed essendo tutte eguali fra loro le p_h in ciascun gruppo debba essere positiva la media delle $r_{h,k}$, mentre dovrebb'essere negativa nell'ipotesi contraria (${}^e\Pi$ costanti, p_h variabili). A me pare invece che nell'una e nell'altra ipotesi le $r_{h,k}$ e la loro media possano essere positive, nulle o negative. Nel testo del presente studio vengono esaminati gli effetti, sulla dispersione delle π, della variabilità delle ${}^e\Pi$ e delle p_h, tanto per il caso speciale in cui le $r_{h,k}$ siano nulle (formole 11, 13-17), che per quelli in cui non lo siano (formole 9, 10, 12).

(2) Si passa dalla prima alla seconda delle formole [11] in base alla relazione già ricordata tra la media dei quadrati degli scostamenti di una serie di grandezze da una qualsiasi grandezza m' e la fluttuazione delle medesime intorno alla loro media aritmetica.

Dall'ultima delle formole [11] si rileva che se sono nulle soltanto tutte le differenze ${}^e d_h$ in ciascun gruppo, annullandosi ${}^e d^2$ (per $e = 1 \ldots.. l$), risulta $Q^2 > 1$; se sono nulle anche le ${}^e\Delta$ si ha $Q^2 = 1$; se infine sono nulle tutte le ${}^e\Delta$, ma non tutte le ${}^e d_h$, diviene $Q^2 < 1$.

Quando non siano nulle tutte le ${}^e d_h$ nè tutte le ${}^e\Delta$, può essere $Q^2 \gtreqless 1$ secondo che sia

$$\sum_{e=1}^{l} \left(\{{}^e n - 1\} \, {}^e\Delta^2 - {}^e d^2 \right) \gtreqless 0. \qquad [11^{bis}]$$

Nel caso generale (formola [10]) è:

$$(Q^2 - 1) \frac{\sum_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} = \frac{\sum_{e=1}^{l} \left\{ {}^e\delta'^2 ({}^e n - 1)^e r - {}^e d'^2 (1 + \{{}^e n - 1\}{}^e r) + {}^e n \, {}^e\Delta^2 \right\}}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} \qquad [12]$$

Se, per tutti i valori di e, si ha ${}^e r = 0$, si ottiene come espressione del valore di ciascun membro dell'eguaglianza [12]:

$$\frac{\sum_{e=1}^{l} \left({}^e n \, {}^e\Delta^2 - {}^e d'^2 \right)}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} = \frac{\sum_{e=1}^{l} \left(\{{}^e n - 1\} \, {}^e\Delta^2 - {}^e d^2 \right)}{\sum_{e=1}^{l} {}^e n} \qquad [13]$$

Soltanto quando in tutti i gruppi sono nulle tutte le differenze ${}^e d_h$ si annulla il termine negativo $\Sigma \, {}^e d^2$.

3. — Indichiamo, ora con n' la media delle l quantità ${}^e n$. Supponiamo che in ciascuna linea dello schema [1] le quantità $x_{i,h}$ siano in parte eguali a zero, in parte eguali a 1 e che siano inferiori a 1 tutte le p_h, le ${}^e\Pi$ e quindi anche P.

In questo caso sussiste, com'è facile dimostrare [1], la relazione:

$$\frac{\sum\limits_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2}{\sum\limits_{e=1}^{l} {}^e n} = \frac{P(1-P)}{n'}. \qquad [14]$$

Posto:

$$K = \frac{\sum\limits_{e=1}^{l} ({}^e n - 1)\, {}^e\Delta^2}{\sum\limits_{e=1}^{l} {}^e n\, P^2} \qquad [15]$$

sussiste la relazione (desumibile dalla [11]):

$$Q^2 \leq 1 + \frac{P}{1-P}(n'\,K). \qquad [16]$$

Quando P diminuisce senza che contemporaneamente cresca il prodotto $\frac{1}{1-P} n'\,K$ il confine superiore di Q^2, in-

(1) La fluttuazione delle w quantità ${}^e x_{i,h}$, di ciascuna linea dello schema [1] intorno alla loro media ${}^e p_h$ è, nelle ipotesi del testo, eguale a ${}^e p_h \left(1 - {}^e p_h\right) = {}^e p_h - {}^e p_h^2$. Così che si ha:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{w}\left({}^e x_{i,h} - P\right)^2}{w} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{w}\left({}^e x_{i,h} - {}^e p_h\right)^2}{w} + \left({}^e p_h - P\right)^2 = {}^e p_h + P^2 - 2\,{}^e p_h\, P.$$

Per l'*emo* gruppo si ha, in base alla precedente eguaglianza ed alla [2]:

$${}^e\delta'^2 = \frac{\sum\limits_{h=1}^{{}^e n} p_h}{{}^e n} + P^2 - 2\,P\,\frac{\sum\limits_{h=1}^{{}^e n} p_h}{{}^e n} = {}^e\Pi + P^2 - 2\,P\,{}^e\Pi.$$

La media aritmetica delle l analoghe relazioni che si ottengono per i singoli gruppi è (essendo P la media semplice delle ${}^e\Pi$):

$$\frac{\sum\limits_{e=1}^{l} {}^e\delta'^2}{l} = \frac{\sum\limits_{e=1}^{l} {}^e\Pi}{l}\left(1 - 2\,P\right) + P^2 = P - P^2 = P\left(1 - P\right).$$

Dividendo per n' si ottiene la [14].

dicato nella [16] si abbassa. In particolare ciò avviene quando, diminuendo P, rimangono costanti n' e K.

Se P e K rimangono costanti il confine superiore di Q^2 si abbassa col diminuire di n'.

Se ${}^1n = {}^2n = \ldots . = {}^ln = n'$, è (1) $K < (l - 1)$ e quindi, posto $P n' l = H$, si ha (2):

$$Q^2 < 1 + \frac{P}{1-P} n' l = 1 + \frac{H}{1-P}. \qquad [16^{bis}]$$

Quando P è una frazione molto piccola, essendo approssimativamente $1 - P = 1$, si può porre, senza grave errore, $(1 + H)$ come confine superiore dei valori di Q^2. Nelle suddette ipotesi, il valore di ciascun membro della [14] è dato con notevole approssimazione da $\frac{P}{n'}$. Se in ciascun gruppo tutte le $x_{i,h}$ vengono moltiplicate per n' (sempre nella ipotesi di eguaglianza fra tutte le ${}^en$), la [14] risulta moltiplicata per n'^2 e il secondo membro di codesta eguaglianza può con molta approssimazione venir rappresentato mediante il prodotto $n' P$.

4. — Quando ${}^1n = {}^2n = \ldots = {}^ln = n'$, si suole assumere come valore approssimato di P la media aritmetica P' di l quantità π_i, ciascuna tratta a caso da uno diverso degli l gruppi. Un valore approssimato Q'^2 di Q^2 viene desunto (3) dalla formola

$$\frac{n' \sum\limits_{e=1}^{l} ({}^e\pi - P')^2}{(l - 1)\, P' (1 - P')}. \qquad [17]$$

(1) Perchè la fluttuazione di l quantità intorno alla loro media aritmetica P non può superare $(l - 1) P^2$.

(2) Il valore di Q^2 è il medesimo per la probabilità media P e per l'altra $(1 - P)$, come risulta evidente dalle definizioni [3] e dalla [11]. Vale quindi tanto per P che per $(1 - P)$ il confine superiore di Q^2 indicato nella [16^{bis}]; ed il massimo valore di tal confine è quello che si ha per $P = (1 - P) = 0{\cdot}5$, cioè $(1 + n' l) = (1 + 2H)$.

(3) V. Bortkiewicz, *Das Gesetz der kleinen Zahlen*, pag. 6.

Poichè il numeratore del precedente rapporto non può superare il valore $n' \, l \, (l - 1) \, P'^2$, il valore di Q'^2 non può superare il confine indicato nella [17 *bis*], dove si è posto $H' = P' \, n' \, l$.

$$Q'^2 < \frac{P'}{1 - P'} n' \, l = \frac{H'}{1 - P'} \cdot \qquad [17^{\,bis}]$$

Per valori di P' molto prossimi a zero il valore del precedente limite è rappresentato con grande approssimazione [1] da H'.

II.

5. — Supponiamo che ciascuna colonna dello schema [1] rappresenti uno dei w risultati egualmente possibili di un gruppo di n osservazioni di un fenomeno (o carattere) collettivo, in ciascuna delle quali si possa presentare il fenomeno. Le x_i indicano la misura di manifestazione del fenomeno nelle singole osservazioni, nella i^{ma} fra le w possibili serie di risultati. La media dei w risultati egualmente possibili dell'h^{ma} osservazione (cioè l'aspettazione matematica del risultato di codesta osservazione) è p_h; mentre Π è la media dei w risultati medî (π_i) egualmente possibili delle n osservazioni (cioè l'aspettazione matematica del risultato medio di n osservazioni).

Se il modo supposto nello schema [1] corrisponde realmente al modo di manifestazione del fenomeno collettivo in esame, il risultato medio, concreto, di un gruppo di n osservazioni sarà una delle grandezze π_i.

---

(1) Indichiamo qui il valore approssimato del confine superiore di Q', per valori piccolissimi di P', per alcuni valori di H' compresi fra 1 e 100

per $H' =$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	40	50	60	80	100
$Q' \leq$	1	(1·5)	(1·8)	2	(2·3)	(2·5)	(2·9)	(3·2)	(4·5)	(5·5)	(6·4)	(7·1)	(7·8)	9	10.

6. — Dalla dispersione delle quantità π_i intorno alla loro media Π ed intorno a P, media delle ${}^e\Pi$ (quando siano dati più gruppi di osservazioni) si può cercar di indurre:

se l'aspettazione matematica del risultato di una osservazione varii nelle osservazioni di ciascun gruppo;

se l'aspettazione matematica del risultato medio di un gruppo di osservazioni varii da gruppo a gruppo;

se, a formare le w possibili serie di risultati di un gruppo di n osservazioni, i risultati possibili di ciascuna osservazione si combinino a caso, oppure non a caso, con i risultati possibili di ciascun' altra osservazione; se cioè il risultato di ciascuna osservazione sia indipendente, o dipendente, da quello di ciascun' altra (1).

7. — Come appare dalla [7], quando i risultati delle singole osservazioni sono indipendenti fra loro (2), la fluttuazione dei singoli possibili risultati medî di n osservazioni intorno alla loro media diminuisce col crescere di n.

Quando si abbiano più gruppi di osservazioni, la [9] mostra che la dispersione dei risultati medî (${}^e\pi_i$) dei singoli gruppi di osservazioni intorno al risultato medio generale P (che nei precedenti paragrafi abbiamo posto eguale alla media semplice delle ${}^e\Pi$, ma che può ad arbitrio porsi eguale ad una media aritmetica ponderata, alla media armonica, o ad altra media, delle stesse quantità, senza che le formole [8]-[13] vengano alterate), a parità di ogni altra condizione:

---

(1) Alla teoria della dispersione hanno recato importanti contributi, oltre Lexis, che ne gettò le basi, quasi tutti i più valorosi cultori della statistica matematica. Vedansi: Lexis (*Abhandlungen über die Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*, Jena, Fischer 1903), Bortkiewicz (*Das Gesetz der kleinen Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1898), Bruns (*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*, Leipzig, Teubner, 1906), Yule (*op. cit.*). Dei primi due autori cito gli scritti recenti, che riassumono in buona parte le loro precedenti indagini.

(2) Nel qual caso sono nulle tutte le $r_{h,k}$, e quindi anche r.

a) diminuisce col crescere del numero di osservazioni nei singoli gruppi;

b) aumenta col variare da gruppo a gruppo della aspettazione matematica del risultato medio delle osservazioni di ciascun gruppo;

c) diminuisce col variare da osservazione a osservazione, in ciascun gruppo, dell'aspettazione matematica del risultato;

d) aumenta, oppure: *e*) diminuisce per effetto della dipendenza fra i risultati delle singole osservazioni di ciascun gruppo, secondo che prevalgono le correlazioni dirette o le inverse [1].

Le formole più generali finora date per la misura della dispersione sono, a quanto mi è noto, quelle di Bruns (*op. cit.*, pag. 207) e di Yule (*op. cit.*, pag. 346) [2]. La [9] mi sembra anche più generale, perchè comprende ad un tempo il caso di correlazione fra i risultati delle varie osservazioni di ciascun gruppo (Yule) e quelli di variabilità delle p_h, delle ${}^e\Pi$ e delle ${}^e n$ (Bruns).

Per valutare il grado di dispersione dei risultati di osservazioni su fenomeni collettivi si confronta la dispersione effettiva con quella che si sarebbe avuta nell'ipotesi di assenza di correlazione fra i risultati delle varie osservazioni

---

(1) La brevità va a scapito della precisione. Quando tutte le ${}^e r_{h,\,k}$ sono positive (quando, cioè, tutte le correlazioni sono dirette) anche le ${}^e r$ sono positive e la dispersione viene aumentata. Quando invece tra le ${}^e r_{h,\,k}$ prevalgono valori negativi anche le ${}^e r$, in generale, saranno negative, e la dispersione verrà ridotta.

(2) La formola da me data nel *Giornale degli economisti* (luglio 1911) è più generale di quella di Bruns perchè si applica anche a grandezze estensive; ma non comprende il caso di dipendenza fra i risultati delle singole osservazioni. Vedasi anche Bortkiewicz (*op. cit.*, Anlage 2) per alcuni casi di correlazione fra le x (*akute Solidarität der Einzelfälle*).

e di costanza delle p_h nelle osservazioni di tutti i gruppi, e quindi anche delle ${}^e\Pi$ nei diversi gruppi, cioè di costanza dell'aspettazione matematica del fenomeno in tutte le osservazioni di tutti i gruppi (metodo di LEXIS). Il confronto si eseguisce mediante il rapporto Q, il quadrato del quale è dato dalla formola [10]. Codesta formola rivela come le circostanze dianzi indicate *sub* a), b), d), tendano ad aumentare il valore di Q, mentre le circostanze c) ed e) tendono a diminuirlo; l'effetto delle circostanze b), d), e), aumenta col crescere del numero delle osservazioni di ciascun gruppo (circostanza a).

Quando non esistono correlazioni fra le x, le variazioni di Q dipendono soltanto dalle circostanze b) e c). La forma di tale dipendenza risulta dalla [11], onde si desumono le condizioni [11 *bis*] nelle quali il valore di Q resta inferiore, eguale, superiore all'unità. Dalle formole [10] e [11] appare che l'essere Q eguale a 1 non basta a provare l'inesistenza di correlazione fra le x, nè la invariabilità delle p_h e delle ${}^e\Pi$; giacchè si può giungere a tale risultato non soltanto quando si avverino le suddette ipotesi, e siano quindi nulli tutti i termini di Q^2 escluso il primo (formola [10]), ma anche quando sia nulla *la somma* di codesti termini, i quali possono essere in parte positivi, in parte negativi. Così per es. l'effetto della variabilità delle p_h da osservazione a osservazione può essere compensato da quello della variabilità delle ${}^e\Pi$ da gruppo a gruppo, o da quello di una correlazione diretta fra le x; l'effetto di una correlazione inversa fra le x può essere compensato da quello della variabilità delle ${}^e\Pi$, ecc. Tuttavia, se ripetute esperienze attestano che, nonostante forti variazioni di tutte le ${}^en$, il valore di Q si mantiene prossimo ad 1, si può escludere l'esistenza delle circostanze b), c), d), e), perchè l'effetto di tre di esse sul valore di Q aumenta col crescere delle ${}^en$.

mente usata, può superare il limite $\sqrt{\frac{H'}{1-P'}}$, il quale per P' piccolissimo differisce di poco da $\sqrt{H'}$, essendo H' il numero complessivo dei casi accertati in l gruppi di n' osservazioni ciascuno ed essendo $P'=(H':n'\,l)$.

Quando non esiste correlazione fra le x, la formola [16] mostra che, rimanendo costante la misura della *variabilità relativa* delle probabilità ${}^e\Pi$ data dal rapporto K (formola [15]), il confine superiore dei valori di Q si accosta all'unità col diminuire delle probabilità stesse. Da una probabilità media molto piccola, dotata di forte variabilità relativa da gruppo a gruppo di osservazioni, può aversi, pertanto, anche se il numero delle osservazioni di ciascun gruppo è grande, un valore di Q abbastanza prossimo all'unità; mentre da probabilità non molto piccole possono aversi valori di Q prossimi ad 1 soltanto se è debole la variabilità relativa, o molto esiguo il numero delle osservazioni in ciascun gruppo, oppure se l'effetto delle variazioni della probabilità da osservazione a osservazione in ciascun gruppo (circostanza *c*) del n. 7) compensa quello delle variazioni da gruppo a gruppo.

Le precedenti considerazioni spiegano perchè fenomeni avveratisi pochissime volte in serie di osservazioni molto numerose diano valori di Q' sempre bassi, e non di rado prossimi ad 1. Quest'ultimo caso (1) ha in special modo attratta l'attenzione di BORTKIEWICZ.

9. — Nel seguito della presente nota mi limiterò a prendere in esame le variazioni di frequenza di alcuni fenomeni demografici rari. Non dispero tuttavia di potere altra volta

(1) BORTKIEWICZ (*op. cit.*, pag. 35, 36) indica col nome di *legge dei piccoli numeri* la tendenza di Q' ad accostarsi all'unità, quando, essendo P' una probabilità molto piccola, senza che muti P' nè la variabilità relativa delle ${}^e\Pi$, diminuiscono le ${}^en$.

tentare una più larga applicazione delle formole dei nn. 1-4, sia per meglio verificare l'idoneità dello schema proposto alla rappresentazione del modo di manifestarsi di fenomeni collettivi, sia per mostrare come l'applicazione di formole meno generali della [10] e delle [11] abbia tratto a conclusioni non sempre accettabili intorno alla stabilità di serie statistiche, per l'omessa valutazione di taluna delle circostanze esposte sub *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), al n. 7.

L'analisi della dispersione sarà eseguita mediante determinazione del rapporto Q' (vedasi formola [17]). Per brevità di calcolo ho sostituito alla formola [17] la seguente (eguale al prodotto della [17] per $(1-P')$, nella ipotesi ${}^1n = {}^2n = \ldots {}^ln = n'$):

$$\frac{\sum\limits_{e=1}^{l}\left({}^en\,{}^e\pi - n'\,P'\right)^2}{(l-1)\,n'\,P'} \qquad [17\,^{ter}]$$

Nella [17 *ter*] ${}^en\;\pi^e$ è il numero di casi del fenomeno accertati nell'e^{mo} anno di osservazione, mentre $n'\,P'$ è il numero medio annuo per l'intero periodo. Poichè è $P' > P'\,(1-P')$ i valori di Q' desunti dalla precedente formola sono inferiori al vero. Ma finchè P' è una probabilità piccolissima l'errore è trascurabile; ancora per $P' = 0{\cdot}02$ l'errore relativo è appena di 1 per 100. Per quasi tutti i fenomeni che studieremo i valori di P' sono in generale inferiori a 0·01, sicchè l'errore è trascurabile. Non ha importanza neppure l'errore che deriva dalla non rispondenza al vero dell'ipotesi ${}^en$ = costante, perchè in tutti i casi esaminati le variazioni di ${}^en$ sono molto ristrette e quindi l'errore assai lieve.

III.

10. — Ho tratto una prima serie di esempi dalle statistiche dei matrimoni, esaminando le oscillazioni avvenute nel decennio 1900-09 nella frequenza di alcune categorie di unioni, sempre poco numerose. L'ordine nel quale si dispongono le varie regioni italiane secondo il rapporto tra il numero dei matrimoni e la popolazione complessiva (indicato nella penultima colonna di ciascuno dei prospetti 1, 2, 3, 4) corrisponde, press'a poco, all'ordine nel quale potrebbero disporsi secondo la probabilità che un matrimonio appartenga ad una delle categorie considerate, oppure secondo la probabilità che una persona la quale è in grado di contrarre un matrimonio compreso in una di codeste categorie lo contragga. Ambedue le probabilità sono molto piccole in tutte le regioni.

Prospetto **1**.

Matrimoni fra nipote e zia.

(1900-1909).

REGIONI	Numero medio annuo dei matrimoni	Proporzione a un milione di abitanti	Q'
Lazio	·1	·08	1·0
Campania	·2	·06	1·4
Veneto	·2	·06	·9
Toscana	·2	·08	·9
Abruzzi	·2	·14	·9
Puglie	·3	·15	·9
Calabria	·3	·21	·9
Sardegna	·3	·36	1·2
Emilia	·4	·16	1·1
Liguria	·6	·53	1·1
Piemonte	·7	·21	1·0
Lombardia	1·4	·31	1·4
Sicilia	2·1	·59	1·6
Media	·5	·23	1·1

Prospetto 2.

Matrimoni fra zio e nipote.

(**1900-1909**).

REGIONI	Numero medio annuo dei matrimoni	Proporzione a un milione di abitanti	Q'
Marche	·3	·3	·9
Umbria	·5	·7	1·0
Basilicata	·6	1·3	1·2
Sardegna	1·1	1·3	·7
Emilia	2·2	·9	1·0
Abruzzi	2·8	1·4	1·0
Lazio	3·1	2·5	1·2
Puglie	3·6	1·8	1·3
Veneto	4·5	1·4	1·2
Toscana	5·4	2·1	1·6
Calabria	8·9	6·3	1·2
Campania	10·4	3·3	1·0
Liguria	15·8	13·9	1·3
Piemonte	18·8	5·5	·7
Lombardia	20·7	4·7	·7
Sicilia	54·6	15·2	1·9
Media	9·6	3·9	1·1

Prospetto **3**.

Nubili spose in età inferiore a 15 anni.

(1900-1909).

REGIONI	Numero medio annuo delle spose	Proporzione a un milione di abitanti	Q'
Marche	·1	·1	1·0
Emilia	·2	·1	1·4
Lombardia	·4	·1	1·1
Sardegna	·5	·6	1·4
Veneto	·6	·2	1·1
Toscana	·6	·2	·9
Liguria	·8	·7	1·2
Piemonte	1·7	·5	1·1
Basilicata	2·0	4·2	1·2
Lazio	2·4	1·9	1·3
Abruzzi	3·4	2·3	1·0
Campania	6·5	2·0	1·4
Puglie	7·6	3·8	·8
Calabria	8·7	6·2	1·5
Sicilia	35·8	10·0	1·1
Media	4·8	2·2	1·2

Prospetto 4.

Celibi sposi in età inferiore a 18 anni.

(1900-1909).

REGIONI	Numero medio annuo degli sposi	Proporzione a un milione di abitanti	Q'
Umbria	·2	·3	1·4
Sardegna	·4	·5	1·1
Lombardia	·9	·2	1·2
Marche	·9	·8	1·0
Veneto	1·0	·3	·7
Liguria	1·5	1·3	1·2
Emilia	2·1	·8	1·0
Basilicata	2·8	5·9	·9
Piemonte	3·4	1·0	·6
Toscana	3·8	1·4	1·4
Lazio	5·2	4·2	1·8
Puglie	8·7	4·3	1·4
Calabria	9·5	6·8	1·8
Abruzzi	10·6	7·3	1·2
Sicilia	16·5	4·6	1·4
Campania	20·3	6·4	3·1
Media	5·5	2·9	1·3

La media aritmetica dei valori di Q' calcolati per le diverse regioni (e raccolti nelle tabelle 1 a 4) è

1·1 per i matrimoni fra nipote e zia (Categoria I).
1·1 „ „ fra zio e nipote (II).
1·2 „ „ di nubili d'età inferiore a 15 anni (III).
1·3 „ „ di celibi d'età inferiore a 18 anni (IV).

In generale i valori di Q' più prossimi all'unità si riscontrano nelle regioni ove sono più rari i matrimoni; la media dei valori di Q' è, per la categoria

I	1·0	per 7	regioni con	·06 a ·16	matrimoni	per 1 milione	di ab.
	1·2	„ 8	„	·21 a ·59	„		„
II	1·0	„ 8	„	·3 a 1·8	„		„
	1·2	„ 8	„	2·1 a 15·2	„		„
III	1·1	„ 8	„	·1 a ·7	„		„
	1·2	„ 7	„	1·9 a 10	„		„
IV	1·1	„ 9	„	·2 a 1·4	„		„
	1·7	„ 7	„	4·2 a 7·3	„		„

Da regione a regione le probabilità di matrimonio (quelle accennate dianzi), pur mantenendosi sempre piccole, differiscono di molto; tuttavia la differenza tra i valori di Q' per le regioni con più piccola e quelle con meno piccola probabilità non sono forti (fuorchè per la categoria IV). Da altra parte il valore di Q' si mostra poco sensibile alla variazione del numero delle osservazioni; riunendo insieme le quattro categorie di unioni, lo troviamo, in media, press'a poco eguale (1·1) per le quattro regioni più popolose e per le quattro meno popolose. Dobbiamo indurre, pertanto, che le probabilità di matrimonio abbiano subito nel tempo variazioni di non grande importanza (1), fatta eccezione per

(1) In realtà nella categoria I pare ch'esse tendano a diminuire, nelle altre ad aumentare. Dal quinquennio 1900-04 al 1905-09 il numero delle unioni, in Italia, variò per la I categoria da 42 a 28, per la II da 746 a 787, per la III da 324 a 389, per la IV da 331 a 547. Alla più forte variazione della IV categoria corrisponde il più alto valore di Q'.

la categoria IV; e che le variazioni stesse siano in generale più forti (in senso assoluto) dove le probabilità sono più alte.

Poichè l'ampiezza media delle oscillazioni del numero annuo dei matrimoni differisce di poco (almeno per le prime tre categorie) da quella che si avrebbe se le probabilità di matrimonio rimanessero costanti nel tempo, conviene accertare se la distribuzione, secondo la grandezza, dei numeri di matrimoni avveratisi nei varii anni di osservazione possa venire rappresentata con buona approssimazione mediante la formola:

$$\frac{m^k e^{-m}}{k!}, \qquad [18]$$

la quale indica il valore cui tende la probabilità che sia accertato k volte in n' osservazioni un fenomeno, la cui probabilità in ogni singola osservazione è P', quando n' tende a infinito e P' a zero in modo che resti costante il prodotto $n' P' = m$.

Bortkiewicz, che ha applicato la [18] alla rappresentazione di serie statistiche (*op. cit.*, cap. II), ha calcolato tavole dei valori della [18] per tutti i valori di m multipli di 0·1, fino a 10, e pei valori di k da 0 in su pei quali il quoziente dato dalla [18] non è inferiore a 0·0001. Col sussidio di codeste tavole (*op. cit.*, Anlage 3), si può verificare se la distribuzione, per grandezza, delle cifre che costituiscono le serie esaminate corrisponda a quella prevedibile in base alla [18]. Nei prospetti 5 a 8 è eseguito il confronto fra distribuzioni effettive e distribuzioni prevedibili; essendo ciascuna serie di dati composta di poche (10) cifre, è opportuno riassumere i risultati del confronto raccogliendo insieme i numeri previsti (c.) e i numeri accertati (o.) di matrimoni nelle varie regioni, per ciascuna categoria di unioni.

Matrimoni in numero di	I		Matrimoni in numero di	II		Matrimoni in numero di	III		Matrimoni in numero di	IV	
	(o.)	(c.)		(o.)	(c.)		(o.)	(c.)		(o.)	(c.)
0	89	84·9	0-1	48	44·4	0	53	49·9	0	34	31·4
1-2	35	39·1	2-4	34	38·0	1	26	27·7	1	25	25·2
3 o più	6	6·0	5 o più	28	27·6	2-3	22	25·1	2-3	33	30·7
						4 o più	39	37·3	4 o più	38	42·7

In generale l'adattamento della [18] alla rappresentazione delle serie in esame è buono; soltanto per l'ultima categoria troviamo, in armonia coi valori di Q' notevolmente superiori a 1, le cifre estreme rappresentate in misura superiore a quella prevista [1]. Per attenuare l'effetto delle variazioni accidentali sui risultati del confronto, paragoneremo ora il numero previsto e quello osservato, non più delle cifre *comprese* entro dati limiti, bensì delle cifre *superiori* a dati limiti. Anche meglio che dai precedenti confronti si rivela da questi il buon adattamento della [18] ai dati che si considerano.

Matrimoni in numero superiore o eguale a	I		II		III		IV	
	(o.)	(c)	(o.)	(c.)	(o.)	(c.)	(o.)	(c.)
0	130	130	110	110	140	140	130	130
1	41	45·1	86	85·1	87	90·1	96	98·6
2	16	15·5	62	65·6	61	62·4	71	73·4
3	6	6	50	50·7	46	47·1	54	55·6
4	4	2·2	36	38	39	37·3	38	42·7
5			28	27·6	34	30·2	30	33·2
6			19	19·7	25	24·6	22	26·1
7			14	13·9	15	19·5	19	20·5
8			9	9·8	13	14·9	18	16
9			6	6·9	13	10·8	15	12·2
10			5	4·7	7	7·4	9	9
11					4	4 7	8	6·4
12					3	2·9	6	4·3
13							5	2·7
14							4	1·6
15							4	·9

(1) Come appare meglio dai dati che seguono nel testo.

Il raffronto fra distribuzione prevista e distribuzione effettiva dei numeri di matrimoni accertati nei singoli anni è limitato, in ciascuna categoria, alle regioni per le quali il numero medio annuo delle unioni non supera 10. Se si fossero comprese anche le altre regioni (Campania, Liguria, Piemonte, Lombardia e Sicilia per la categoria II; Sicilia per la III; Abruzzi, Sicilia e Campania per la IV) — al quale intento sarebbe occorso completare le tavole di Bortkiewicz — la maggior ampiezza delle variazioni osservate in confronto alle previste, nella IV categoria, sarebbe apparsa anche più evidente; giacchè mentre per le regioni comprese nel confronto la media delle grandezze Q' è 1·2, per quelle omesse sale a 1·9. Invece nella II categoria le due medie press' a poco coincidono.

Prospetto **5.**

Matrimoni fra nipote e zia.

REGIONI	Numero medio annuo dei matrimoni	Anni con numero di matrimoni uguale a													
		0		1		2		3		4		5		6 o più	
		o.	c.	o.	c.	o.	c.	o.	c.	o.	c.	o.	c.	o.	c.
Lazio	·1	9	9·05	1	·90		·05								
Veneto	·2	8	8·19	2	1·64		·16		·01						
Campania	·2	9	8·19		1·64	1	·16		·01						
Toscana	·2	8	8·19	2	1·64		·16		·01						
Abruzzi.	·2	8	8·19	2	1·64		·16		·01						
Puglie	·3	7	7·41	3	2·22		·33		·04						
Calabria	·3	7	7·41	3	2·22		·33		·04						
Sardegna.	·3	8	7·41	1	2·22	1	·33		·04						
Emilia	·4	7	6·70	2	2·68	1	·54		·07		·01				
Liguria.	·6	6	5·49	2	3·29	2	·99		·20		·03				
Piemonte.	·7	5	4·97	3	3·47	2	1·22		·28		·05		·01		
Lombardia	1·4	5	2·47		3·45	3	2·42		1·13	2	·39		·11		·03
Sicilia	2·1	2	1·23	4	2·57		2·70	2	1·89		·99	1	·42	1	·20
Somma . . .	..	89	84·90	25	29·58	10	9·55	2	3·73	2	1·47	1	·54	1	·23

Prospetto **6.**

Matrimoni fra zio e nipote.

REGIONI		Numero medio annuo dei matrimoni	Anni con numero di matrimoni uguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 o più
Marche . .	o.	·3	7	3															
	c.		7·41	2·22	·33	·04													
Umbria . .	o.	·5	6	3	1														
	c.		6·06	3·03	·76	·13	·02												
Basilicata .	o.	·6	6	3		1													
	c.		5·49	3·29	·99	·20	·03												
Sardegna .	o.	1·1	2	5	3														
	c.		3·33	3·66	2·01	·74	·20	·05	·01										
Emilia. . .	o.	2·2	1	3	2	2	1	1											
	c.		1·11	2·44	2·68	1·97	1·08	·48	·18	·05	·01								
Abruzzi . .	o.	2·8		3	1	3	2		1										
	c.		·61	1·70	2·38	2·23	1·56	·87	·41	·16	·06	·02							
Lazio . . .	o.	3·1	1	1	2	3		2		1									
	c.		·45	1·40	2·17	2·24	1·73	1·07	·55	·25	·10	·03	·01						
Puglie . . .	o.	3·6		3	1	2		1	1	2									
	c.		·27	·98	1·77	2·13	1·91	1·38	·83	·42	·19	·08	·03	·01					
Veneto. . .	o.	4·5	1		1	1	3	1		1	2								
	c.		·11	·50	1·13	1·69	1·90	1·71	1·28	·82	·46	·23	·10	·04	·02	·01			
Toscana . .	o.	5·4			1	2	2	2	1	1								1	
	c.		·04	·24	·66	1·19	1·60	1·73	1·56	1·20	·81	·49	·26	·13	·06	·02	·01		
Calabria. .	o.	8·9						2	2		1	1	1	1		1			1
	c.			·01	·05	·16	·36	·64	·94	1·20	1·33	1·32	1·17	·95	·70	·48	·31	·18	·20
Somma .	o.	..	24	24	12	14	8	9	5	5	3	1	1	1		1		1	1
	c.	..	24·88	19·47	14·93	12·72	10·39	7·93	5·76	4·10	2·96	2·17	1·57	1·13	·78	·51	·32	·18	·20

Prospetto 7.

Nubili spose a meno di 15 anni.

REGIONI		Numero medio annuo delle spose	Anni con numero di spose eguale a													
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 o più
Marche	o.	·1	9	1												
	c.		9·05	·90	·05											
Emilia	o.	·2	9		1											
	c.		8·19	1·64	·16	·01										
Lombardia	o.	·4	7	2	1											
	c.		6·70	2·68	·54	·07	·01									
Sardegna	o.	·5	7	2		1										
	c.		6·06	3·03	·76	·13	·02									
Veneto	o.	·6	6	2	2											
	c.		5·49	3·29	·99	·20	·03									
Toscana	o.	·6	5	4	1											
	c.		5·49	3·29	·99	·20	·03									
Liguria	o.	·8	5	3	1	1										
	c.		4·49	3·60	1·44	·38	·08	·01								
Piemonte	o.	1·7	2	3	3	1		1								
	c.		1·83	3·10	2·64	1·49	·64	·22	·06	·02						
Basilicata	o.	2·0	2	2	3	1	1	1								
	c.		1·35	2·71	2·71	1·81	·90	·36	·12	·03	·01					
Lazio	o.	2 4	1	4		3		1	1							
	c.		·91	2·18	2·61	2·09	1·25	·60	·24	·08	·03	·01				
Abruzzi	o.	3·4		2	2		3	2	1							
	c.		·33	1·13	1·93	2·18	1·86	1·26	·72	·35	·15	·06	·02	·01		
Campania	o.	6·5			1		1	1	4	1		1				1
	c.		·01	·10	·32	·69	1·12	1·45	1·57	1·46	1·19	·86	·56	·33	·18	·16
Puglie	o.	7·6						2	3			2	3			
	c.			·04	·14	·37	·70	1·06	1·34	1·45	1·38	1·17	·89	·61	·39	·46
Calabria	o.	8·7		1				1	1	1		3		1	1	1
	c.			·01	·06	·18	·40	·69	1·00	1·25	1·36	1·31	1·14	·90	·66	1·04
Somma	o.	..	53	26	15	7	5	9	10	2		6	3	1	1	2
	c.	..	49·90	27·70	15·34	9·80	7·04	5·65	5·05	4·64	4·12	3·41	2·61	1·85	1·23	1·66

Prospetto **8.**

Celibi sposi in età inferiore a 18 anni.

REGIONI		Numero medio annuo degli sposi	Anni con numero di sposi eguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 o più
Umbria . .	o.	·2	9		1															
	c.		8·19	1·64	·16	·01														
Sardegna .	o.	·4	7	2	1															
	c.		6·70	2·68	·54	·07	·01													
Lombardia.	o.	·9	5	2	2	1														
	c.		4·07	3·66	1·65	·49	·11	·02												
Marche . .	o.	·9	4	4	1	1														
	c.		4·07	3·66	1·65	·49	·11	·02												
Veneto. . .	o.	1·0	2	6	2															
	c.		3·68	3·68	1·84	·61	·15	·03	·01											
Liguria . .	o.	1·5	2	4	3			1												
	c.		2·23	3·35	2·51	1·26	·47	·14	·03	·01										
Emilia. . .	o.	2·1	2	2		5	1													
	c.		1·23	2·57	2·70	1·89	·99	·42	·15	·04	·01									
Basilicata .	o.	2·8		2	3	2	2		1											
	c.		·61	1·70	2·38	2·23	1·56	·87	·41	·16	·06	·02								
Piemonte .	o.	3·4		1		4	4	1												
	c.		·33	1·13	1·93	2·18	1 86	1·26	·72	·35	·15	·06	·02	·01						
Toscana . .	o.	3·8	1	1	2	1		3	1			1								
	c.		·22	·85	1·62	2·05	1·94	1·48	·94	·51	·24	·10	04	·01						
Lazio . . .	o.	5·2	1	1	1	2		1		1	1		1			1				
	c.		·06	·29	·75	1·29	1·68	1·75	1·51	1·12	·73	·42	·22	·10	·05	·02	·01			
Puglie . . .	o.	8·7	1					1			1	4		2					1	
	c.			·01	·06	·18	·40	·69	1·00	1·25	1·36	1·31	1·14	·90	·66	·44	·27	·16	·09	·08
Calabria . .	o.	9·5			1		1	1	1		1	1			1			1		2
	c.			·01	·03	·11	·25	·48	·76	1·04	1·23	1·30	1·23	1·07	·84	·62	·42	·27	·16	·18
Somma .	o.	..	34	25	17	16	8	8	3	1	3	6	1	2	1	1		1	1	2
	c.	..	31·39	25·23	17·82	12·86	9·53	7·16	5·53	4·48	3·78	3·21	2·65	2·09	1·55	1·08	·70	·43	·25	·26

11. — Un altro esempio di fenomeni demografici rari ho tratto dalle statistiche delle nascite, analizzando le variazioni di frequenza delle diverse categorie di parti multipli in due regioni italiane, negli anni dal 1900 al 1909. Sia in relazione alla somma dei parti che a quella delle donne atte a procreare, la probabilità di ciascuna categoria di parti è molto piccola, ond'è applicabile la [17 *ter*].

I valori di Q' per ciascuna regione e per ciascuna categoria di parti multipli sono raccolti nel prospetto 9. La loro media è:

$$1\cdot 1 \text{ per i parti tripli}$$
$$1\cdot 6 \text{ per i parti doppi.}$$

Anche qui Q' si discosta maggiormente dall'unità per il fenomeno meno raro (parti doppi) che per quello più raro (parti tripli). La differenza non può essere attribuita ad altra causa che alla maggior grandezza media (assoluta) delle variazioni delle probabilità più grandi, in confronto alle variazioni delle probabilità più piccole.

Il paragone (prospetto 10) fra la distribuzione effettiva del numero dei parti tripli delle varie categorie e quella prevista in base alla [18] mostra che le due distribuzioni press'a poco coincidono. Riassumo in breve i risultati del confronto.

Parti in numero di	(o.)	(c.)	Parti in numero superiore o eguale a	(o.)	(c.)
0-2	19	18·2	0.	80	80
3-4	21	23·1	1.	78	78
5-6	19	18·2	2.	73	71·3
7 o più	18	20·5	3.	61	61·3
			4.	46	50·1
			5.	37	38·7
			6.	30	28·7
			7.	18	20·5
			8.	14	13·9
			9.	9	9
			10.	9	5·5
			11.	6	3·2
			12.	3	1·7
			13.	1	·9

Prospetto **9.**

Parti multipli.

(1900-1909).

REGIONI	Categorie di parti		Numero medio annuo dei parti	Q'
Piemonte	Doppi	1 m. 1 f.	359	2·0
		2 m.	324	1·3
		2 f.	299	1·2
	Tripli	2 m. 1 f.	3·3	1·3
		2 f. 1 m.	2·5	1·0
		3 m.	3·1	·9
		3 f.	3·6	·9
Veneto	Doppi	1 m. 1 f.	675	2·0
		2 m.	585	1·2
		2 f.	526	1·9
	Tripli	2 m. 1 f.	6·9	1·2
		2 f. 1 m.	7·8	·8
		3 m.	5·3	1·4
		3 f.	6·0	1·4
Media	Parti doppi		461	1·6
	Parti tripli		6·4	1·1

Prospetto **10.**

Parti tripli.

REGIONI — Categorie di parti		Numero medio annuo dei parti	Anni con numero di parti eguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 o più
Piemonte:																	
2 m. 1 f.	o.	3·3	1	1	2	3		1	1		1						
	c.		·37	1·22	2·01	2·21	1·82	1·20	·66	·31	·13	·04	·02	·01			
2 f. 1 m.	o.	2·5	1	2	2	2	2	1									
	c.		·82	2·05	2·56	2·14	1·34	·67	·28	·10	·03	·01					
3 m.	o.	3·1		2	2	1	4		1								
	c.		·45	1·40	2·16	2·24	1·73	1·08	·55	·25	·10	·03	·01				
3 f.	o.	3·6			4	2	1		3								
	c.		·27	·98	1·77	2·13	1·91	1·38	·83	·42	·19	·08	·03	·01			
Veneto:																	
2 m. 1 f.	o.	6·9				2		1	2	1	2		1			1	
	c.		·01	·07	·24	·55	·95	1·31	1·51	1·49	1·28	·99	·68	·43	·25	·13	·11
2 f. 1 m.	o.	7·8						1	2	3	1		1	2			
	c.			·03	·13	·32	·63	·99	1·28	1·43	1·39	1·21	·94	·67	·43	·26	·29
3 m.	o.	5·3			1	3	1	2	1				1		1		
	c.		·05	·27	·70	1·24	1·64	1·74	1·54	1·16	·77	·45	·24	·12	·05	·02	·01
3 f.	o.	6·0			1	2	1	1	2		1			1	1		
	c.		·03	·15	·45	·89	1·34	1·61	1·61	1·38	1·03	·69	·41	·23	·11	·05	·02
Somma . . .	o.	..	2	5	12	15	9	7	12	4	5		3	3	2	1	
	c.	..	2·00	6·17	10·02	11·72	11·36	9·98	8·26	6·54	4·92	3·50	2·33	1·47	·84	·46	·43

12. — La probabilità di morte per pustola maligna e carbonchio è molto piccola in tutte le regioni italiane: in nessuna giunge a 0·00007. Ho analizzato le variazioni di codesta probabilità nelle regioni, ed in sedici provincie poco differenti tra loro per numero di abitanti [1]. La media aritmetica dei valori di Q' (prospetto 11) risulta eguale a 1·1 per le provincie, a 1·3 per le regioni. Per l'Italia si ha $Q'=2\cdot 3$. Col crescere del numero delle osservazioni, Q' aumenta, il che porge indizio della variabilità, nel tempo, della probabilità di morte considerata [2]. Di codesta variabilità porge conferma la differenza esistente fra i valori di Q' calcolati per popolazioni dov'è piccola la probabilità stessa e quelli calcolati per altre dov'è più alta. La media aritmetica dei valori di Q' è, infatti,

per le regioni	con ·19 a ·81 morti per 100,000 abitanti	1·0
	con 1·14 a 6·67 „	1·5
per le provincie	con ·5 a 3·6 morti (numero assoluto)	1·0
	con 9·4 a 32·6 „ „	1·2

Anche in questo esempio, la misura assoluta delle variazioni delle probabilità cresce con l'aumentare delle probabilità stesse.

L'analisi della distribuzione, per grandezza, dei numeri annui di morti è limitata alle 10 provincie con numero medio annuo inferiore a 10. Poichè per esse la media dei Q' è 1·0, si può prevedere che la [18] sia per adattarsi

(1) Le provincie sono scelte fra quelle che nei due ultimi censimenti contavano da 400 a 600 mila abitanti. Pertanto l'ordine di esse secondo il numero assoluto delle morti, a un dipresso corrisponde all'ordine secondo la probabilità di morte.

(2) Essa tende a diminuire. Dal quinquennio 1900-904 al sessennio 1905-910 il numero medio annuo dei morti in Italia discese da 365 a 310.

bene alla rappresentazione dei dati. I seguenti confronti, che riassumono i dati del prospetto 12, confermano la previsione.

Morti in numero di	(o.)	(c.)	Morti in numero superiore o uguale a	(o.)	(c.)
0	29	32·1	0	100	100
1	33	28·8	1	71	67·9
2	14	15·3	2	38	39·1
3 o più	24	23·8	3	24	23·8
			4	14	16·7
			5	13	13
			6	11	10·7
			7	9	9
			8	8	7·5
			9	6	6·1
			10	4	4·7

Prospetto **11**.

Morti per pustola maligna e carbonchio nelle varie regioni (1900-1910) ed in alcune provincie (1900-1909).

REGIONI	Numero medio annuo dei morti	Proporzione a un milione di abitanti	Q'	PROVINCIE	Numero medio annuo dei morti	Q'
Marche	2·8	2·6	·7	Treviso	·5	1·0
Veneto.	6·3	1·9	1·3	Bergamo	·8	1·3
Emilia.	7·9	3·2	·5	Pavia	·8	1·0
Lombardia. . .	8·8	2·0	·8	Padova	·8	·9
Liguria	9·2	8·1	1·4	Vicenza.	·9	·8
Umbria	11·5	17·0	2·0	Venezia	1·0	·9
Piemonte . . .	12·1	3·6	·8	Bologna	1·3	·9
Abruzzi	16·8	11·6	1·3	Brescia	1·7	·7
Lazio	17·5	14·0	1·2	Siracusa	3·6	1·2
Toscana	18·8	7·1	1·4	Salerno.	9·4	1·3
Puglie.	30·9	15·4	1·8	Foggia	11·1	1·4
Basilicata . . .	31·6	66·7	1·2	Reggio Calabria . . .	15·4	1·3
Sardegna . . .	33·1	40·0	1·3	Cosenza	15·8	1·1
Sicilia	40·8	11·4	1·6	Catanzaro	16·0	1·0
Campania . . .	41·8	13·1	1·2	Cagliari.	21·6	1·5
Calabria. . . .	45·2	32·2	1·6	Potenza	32·6	1·0
Media . . .	20·9	15·6	1·3	*Media* . . .	8·3	1·1
Italia	33·5	10·0	2·3			

Prospetto **12.**

Morti per pustola maligna e carbonchio.

PROVINCIE		Numero medio annuo dei morti	Anni con numero di morti eguale a											
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 o più
Treviso . . .	o.	·5	6	3	1									
	c.		6·06	3·03	·76	·13	·02							
Bergamo. . .	o.	·8	6	1	2	1								
	c.		4·49	3·60	1·44	·38	·08	·01						
Pavia	o.	·8	4	5		1								
	c.		4·49	3·60	1·44	·38	·08	·01						
Padova . . .	o.	·8	4	4	2									
	c.		4·49	3·60	1·44	·38	·08	·01						
Vicenza . . .	o.	·9	3	5	2									
	c.		4·07	3·66	1·65	·49	·11	·02						
Venezia . . .	o.	1·0	3	5	1	1								
	c.		3·68	3·68	1·84	·61	·15	·03	·01					
Bologna . . .	o.	1·3	2	5	1	2								
	c.		2·73	3·54	2·30	1·00	·33	·08	·02					
Brescia . . .	o.	1·7	1	3	4	2								
	c.		1·83	3·10	2·64	1·49	·64	·22	·06	·02				
Siracusa . . .	o.	3·6		2	1	3	1	1	1		1			
	c.		·27	·98	1·77	2·13	1·91	1·38	·83	·42	·19	·08	·03	·01
Salerno . . .	o.	9·4						1	1	1	1	2	3	1
	c.			·01	·04	·11	·27	·51	·79	1·06	1·25	1·31	1·23	3·42
Somma . . .	o.	. .	29	33	14	10	1	2	2	1	2	2	3	1
	c.		32·11	28·80	15·32	7·10	3·67	2·27	1·71	1·50	1·44	1·39	1·26	3·43

13. — Esamineremo ora la variabilità, nel tempo, dell'azione di altre cause di morte: alcoolismo cronico, febbri malariche, vaiuolo. La probabilità di morte per ciascuna di queste cause è molto piccola; in generale nei casi esaminati non supera 0·001. I prospetti 13 a 15 contengono i valori di Q' calcolati per le 16 provincie già considerate nel n. 12 (e inoltre, per il vaiuolo, per una diciassettesima, di popolazione poco differente dalle altre). La media aritmetica di codesti valori è:

per le morti da	alcoolismo cronico	2·0
	vaiuolo.	5·6
	febbri malariche	6·2

In ciascuna categoria di morti, col crescere della probabilità di morte aumenta Q', molto più celermente che nei casi finora esaminati. La media dei valori di Q' è, per le morti da:

alcoolismo .	1·5	nelle 8	provincie	con 1·9 a 7·1	morti
	2·5	„ 8	„	12·3 a 22·7	„
vaiuolo. . .	1·5	„ 5	„	·7 a 1·9	„
	2·6	„ 6	„	2·2 a 3·8	„
	12·0	„ 6	„	22 a 129	„
malaria . .	2·0	„ 5	„	2·9 a 6·7	„
	2·8	„ 3	„	12·9 a 32·3	„
	8·2	„ 3	„	103 a 186	„
	11·2	„ 5	„	293 a 635	„

Mentre nei precedenti esempi i valori di Q' in generale si mantenevano inferiori a 2 anche quando il numero medio annuo dei casi del fenomeno era abbastanza grande (vedansi p. es. i prospetti 2, 9, 11), e spesso erano molto prossimi ad 1, qui invece giungono talvolta a superare 20 e non sono quasi mai prossimi all'unità.

Dobbiamo conchiudere che la variabilità delle probabilità considerate è molto più forte negli ultimi che nei precedenti esempi. La misura assoluta delle variazioni appare in generale assai maggiore per le probabilità più alte che per le più basse. L'incremento di Q', corrispondentemente al crescere della probabilità, appare rapido sopratutto per le morti da vaiuolo. In codesto esempio sembra che debba presentarsi anche la circostanza *d*) del n. 7 (correlazione positiva fra i risultati delle varie osservazioni eseguite in ciascun anno in ogni singola provincia), oltre che la circostanza *b*) (variazione da anno ad anno della probabilità di morte). Il carattere epidemico e contagioso della malattia determina il concorso di entrambe le circostanze. Per la malaria, invece, e per l'alcoolismo non si può ritenere sensibile l'influsso della circostanza *d*); e le forti variazioni di Q' sono indice esclusivamente di grande variabilità, nel tempo, delle probabilità di morte.

Si può escludere *a priori* che la formola [18] si adatti bene a rappresentare la distribuzione delle cifre annue dei morti, giacchè anche nelle provincie dov'è molto piccola la probabilità di morte per ciascuna delle cause qui considerate, i valori di Q' sono notevolmente discosti da 1 (per le provincie con meno di 10 morti all'anno, la media dei valori di Q' è 1·5 per l'alcoolismo, 2·1 per il vaiuolo, 2·0 per la malaria). I prospetti 16 a 18 confermano l'esistenza di fortissime differenze tra le previsioni e la realtà. Le cifre estreme appariscono molto più frequentemente di quel che apparirebbero se le cifre annue rappresentassero, in ciascuna provincia, varianti accidentali di una aspettazione matematica costante nel tempo: la dispersione è molto più larga di quella che si avrebbe in siffatta ipotesi. Riassumiamo, col consueto metodo, i confronti fra i risultati dell'osservazione e le previsioni:

Alcoolismo cronico			Vaiuolo			Febbri malariche		
Morti in numero di	(o.)	(c.)	Morti in numero di	(o.)	(c.)	Morti in numero di	(o.)	(c.)
0-2.	39	26·9	0-1.	67	44·2	0-3.	26	16·8
3-4.	15	24·4	2-3.	23	38·0	4-5.	10	15·2
5 o più . . .	26	28·7	4 o più. . .	20	27·8	6 o più. . .	14	18 0

MORTI in numero superiore o eguale a	Alcoolismo cronico		Vaiuolo		Malaria	
	(o.)	(c.)	(o.)	(c.)	(o.)	(c.)
0.	80	80	110	110	50	50
1.	70	76	71	90·8	45	49·1
2.	62	66·2	43	65·8	38	46·2
3.	41	53·1	32	44·3	33	40·6
4.	37	40 1	20	27·7	24	33·2
5.	26	28·7	18	16	17	25·3
6.	21	19·7	12	8·4	14	18
7.	14	12·9	11	4	13	12
8.	10	8	9	1·8	12	7·5
9.	7	4·7	7	·7	9	4·4
10.	6	2·7	6	·3	7	2·4
11.	5	1·4			6	1·2
12.	3	·7			6	·6
13.					4	·3

Prospetto **13**.

Morti per alcoolismo cronico.

(1900-1909)

PROVINCIE	Numero medio annuo dei morti	Q'
Reggio Calabria	1·9	·9
Foggia	2·3	1·0
Siracusa	2·5	1·2
Potenza	3·2	1·3
Catanzaro	4·2	1·7
Salerno	5·1	1·6
Cosenza	5·2	1·7
Bologna	7·1	2·5
Pavia	12·3	1·7
Bergamo	15·3	1·7
Vicenza	18·2	2·9
Padova	18·3	2·4
Treviso	19·0	2·5
Venezia	19·7	2·2
Cagliari	21·8	4·0
Brescia	22·7	2·2
Media	11·2	2·0

Prospetto **14.**

Morti per vaiuolo.

(1900-1910).

PROVINCIE	Numero medio annuo dei morti	Q'
Venezia	·7	1·1
Treviso	·9	1·6
Bologna	·9	1·0
Pavia	1·1	1·4
Cagliari	1·9	2·3
Padova	2·2	2·1
Verona	2·2	2·5
Brescia	3·0	3·3
Bergamo	3·5	1·7
Catanzaro	3·6	4·1
Vicenza	3·8	2·0
Siracusa	22·0	5·2
Cosenza	26·6	8·8
Reggio Calabria	39·8	13·3
Potenza	45·3	13·2
Salerno	46·6	10·8
Foggia	129·1	20·6
Media	19·6	5·6

Prospetto **15**.

Morti per febbre da malaria.

(**1900-1909**).

PROVINCIE	Numero medio annuo dei morti	Q'
Vicenza	2·9	**1·4**
Treviso	4·3	**1·8**
Bergamo	4·4	**1·9**
Bologna	5·8	**2·3**
Brescia	6·7	**2·4**
Padova	12·9	**2·5**
Pavia	15·8	**2·7**
Venezia	32·3	**3·3**
Salerno	103	**9 7**
Reggio Calabria	135	**7·1**
Cosenza	186	**7·7**
Catanzaro	293	**10·3**
Potenza	405	**12·1**
Siracusa	439	**7·0**
Foggia	484	**14·4**
Cagliari	635	**12·3**
Media	173	**6·2**

Prospetto **16.**

Morti per alcoolismo cronico.

PROVINCIE		Numero medio annuo dei morti	Anni con numero di morti eguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 o più
Reggio Calabria	o.	1·9	1	3	4		2										
	c.		1·49	2·84	2·70	1·71	·81	·31	·10	·03	·01						
Foggia	o.	2·3	1	2	4		2	1									
	c.		1·00	2·30	2·65	2·03	1·17	·54	·21	·07	·02	·01					
Siracusa	o.	2·5	2	1	3		2	2									
	c.		·82	2·05	2·56	2·14	1·34	·67	·28	·10	·03	·01					
Potenza	o.	3·2	2		2	2	1	1	1	1							
	c.		·41	1·30	2·09	2·23	1·78	1·14	·61	·28	·11	·04	·01				
Catanzaro	o.	4·2	1	1	3	1			1	1	1			1			
	c.		·15	·63	1·32	1·85	1·95	1·63	1·14	·69	·36	·17	·07	·03	·01		
Salerno	o.	5·1	1	1	1		2		1	1	2			1			
	c.		·06	·31	·79	1·35	1·72	1·75	1·49	1·09	·69	·39	·20	·09	·04	·02	·01
Cosenza	o.	5·2	2		1		1		3	1		1			1		
	c.		·06	·29	·75	1·29	1·68	1·75	1·51	1·12	·73	·42	·22	·10	·05	·02	·01
Bologna	o.	7·1			3	1	1	1	1				1				2
	c.		·01	·06	·21	·49	·88	1·24	1·47	1·49	1·32	1·04	·74	·48	·28	·15	·14
Somma	o.	..	10	8	21	4	11	5	7	4	3	1	1	2	1		2
	c.		4·00	9·78	13·07	13·09	11·33	9·03	6·81	4·87	3·27	2·08	1·24	·70	·38	·19	·16

Prospetto **17**.

Morti per vaiuolo (1900-09).

PROVINCIE		Numero medio annuo dei morti	Anni con numero di morti eguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 o più
Venezia	o.	·8	4	5		1									
	c.		4·49	3·60	1·44	·38	·08	·01							
Bologna	o.	·9	4	4	1	1									
	c.		4·07	3·66	1·65	·49	·11	·02							
Treviso	o.	1·0	5	3	1			1							
	c.		3·68	3·68	1·84	·61	·15	·03	·01						
Pavia	o.	1·2	4	3	2			1							
	c.		3·01	3·62	2·17	·87	·26	·06	·01						
Cagliari	o.	2·1	5	1	1	1		1					1		
	c.		1·23	2·57	2·70	1·89	·99	·42	·15	·04	·01				
Padova	o.	2·4	3	3		2		1					1		
	c.		·91	2·18	2·61	2·09	1·25	·60	·24	·08	·03	·01			
Verona	o.	2·4	4	3		1			1						1
	c.		·91	2·18	2·61	2·09	1·25	·60	·24	·08	·03	·01			
Brescia	o.	3·3	2	3	2	2									1
	c.		·37	1·22	2·01	2·21	1·82	1·20	·66	·31	·13	·05	·02		
Bergamo	o.	3·9	2		2	2		1		1	1	1			
	c.		·20	·79	1·54	2·00	1·95	1·52	·99	·55	·27	·12	·04	·02	·01
Catanzaro	o.	3·9	3	3	1	1	1								1
	c.		·20	·79	1·54	2·00	1·95	1·52	·99	·55	·27	·12	·04	·02	·01
Vicenza	o.	4·1	3		1	1	1	1		1	1				1
	c.		·17	·68	1·39	1·91	1·95	1·60	1·09	·64	·33	·15	·06	·02	·01
Somma	o.	..	39	28	11	12	2	6	1	2	2	1	2		4
	c.		19·24	24·97	21·50	16·54	11·76	7·58	4·38	2·25	1·07	·46	·16	·06	·03

Prospetto **18.**

Morti per febbri da malaria.

PROVINCIE		Numero medio annuo dei morti	Anni con numero di morti eguale a														
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 o più
Vicenza	o.	2·9	1	3		3	1	1			1						
	c.		·55	1·60	2·31	2·24	1·62	·94	·45	·19	·07	·02	·01				
Treviso	o.	4·3	2		3		1		1		1	1	1				
	c.		·14	·58	1·26	1·80	1·93	1·66	1·19	·73	·39	·19	·08	·03	·01	·01	
Bergamo.	o.	4·4		2	1	4		1				1					1
	c.		·12	·54	1·19	1·74	1·91	1·69	1·24	·78	·43	·21	·09	·04	·01	·01	
Bologna	o.	5·8		2	1	1	2	1			1				1		1
	c.		·03	·18	·51	·98	1·43	1·65	1·60	1·33	·96	·62	·36	·19	·09	·04	·03
Brescia	o.	6·7	2			1	3			1					1		2
	c.		·01	·08	·28	·62	1·03	1·38	1·55	1·48	1·24	·92	·62	·38	·21	0·11	·09
Somma . . .	o.	..	5	7	5	9	7	3	1	1	3	2	1		2		4
	c.		·85	2·98	5·55	7·38	7·92	7·32	6·03	4·51	3·09	1·96	1·16	·64	·32	·17	·12

14. — La probabilità di morte per suicidio mediante impiccamento e per omicidio è molto piccola in tutte le provincie già considerate nei precedenti esempi; tuttavia da provincia a provincia varia notevolmente, come appare dai prospetti 19, 20. Dai quali si rileva che la media aritmetica dei valori di Q' è uguale a 1, sia per l'una che per l'altra causa di morte. Non appare decisa tendenza di Q' ad aumentare col crescere della probabilità di morte: la media dei valori di Q' (calcolati con due cifre decimali, mentre nei prospetti 19 e 20 è data una sola cifra decimale) è, per le morti da:

omicidio . . .	1·00	·86	per 4 provincie con	2·8 a 6·2 morti
		1·15	„ 4 „	7·4 a 12·7 „
	1·01	1·11	„ 4 „	16·1 a 33·4 „
		·92	„ 4 „	34·2 a 41·6 „
suicidio per impiccamento	·93	·89	per 4 provincie con	·5 a 1·5 morti
		·96	„ 4 „	2·4 a 5·0 „
	1·00	·83	„ 5 „	5·6 a 6·9 „
		1·21	„ 4 „	7·3 a 21·8 „

Per quanto i valori di Q' si mantengano sempre molto vicini a 1, non si può senz'altro escludere la variabilità, nel tempo, delle probabilità di morte. Giacchè pur sussistendo tale variabilità (circostanza *b*) del n. 7), la tendenza di Q' a superare 1, per effetto di essa, potrebbe venire compensata da una tendenza opposta, derivante dal variare della probabilità stessa, in ciascun anno, da osservazione a osservazione (circostanza *c*). Se questa ipotesi è conforme al vero, dovremo ottenere valori di Q' superiori a 1 facendo aumentare il numero delle osservazioni (riunendo, per esempio, le provincie a gruppi di 4, di 8, di 16) in ciascun anno, come appare dalla formola [11^{bis}]. Aggruppando insieme le provincie (esclusa, nell'esempio dei suicidii, quella di Brescia, per ridurre a 16 anche in codesto esempio il numero delle provincie considerate), si ottengono i seguenti risultati:

PROVINCIE (nell'ordine dei prospetti 19 e 20 esclusa Brescia nel 20)	Morti per omicidio			Morti per suicidio mediante impiccamento		
	Numero medio annuo	Q'		Numero medio annuo	Q'	
Le prime quattro	18·1	·87	Media 1·08	4·1	·59	Media ·96
Le successive quattro . . .	39·4	1·24		13·1	1·19	
Le successive quattro . . .	105·8	1·29		24·9	·68	
Le ultime quattro	146·7	·93		47·4	1·37	
Le prime otto	57·5	·95	Media 1·01	17·2	1·13	Media 1·25
Le ultime otto.	252·5	1·07		72·3	1·36	
Tutte sedici insieme. . . .	310	1·15		89·5	1·45	

Mentre nel caso degli omicidii il valore di Q' non mostra tendenza ben definita ad aumentare nè col crescere del numero delle osservazioni (cioè nel passaggio da singole provincie a gruppi sempre più comprensivi), nè col crescere della probabilità di morte, nel caso dei suicidii entrambe le tendenze, specialmente la prima, appariscono manifeste nei nuovi aggruppamenti eseguiti. Possiamo escludere — poichè il valore di Q' sale per l'insieme delle 16 provincie a 1·45 — che la probabilità di morte per suicidio mediante impiccamento sia rimasta costante, nel periodo di osservazione (1); e possiamo accertare (dalla elaborazione per gruppi di otto provincie) che la misura assoluta della sua variazione è, in generale, alquanto maggiore là dove la probabilità stessa è meno piccola. Per la probabilità di morte

(1) Dal quinquennio 1900-04 al 1905-09 il numero dei morti per suicidio mediante impiccamento è aumentato da 422 a 537. All'aumento delle cifre assolute corrisponde aumento della probabilità di morte.

per omicidio, il valore di Q' supera di poco 1 anche per il gruppo di 16 provincie, riunite insieme; onde resteremmo in dubbio se la probabilità sia costante, ove l'analisi della distribuzione, nel tempo, delle variazioni nel numero dei morti non permettesse di escludere codesta ipotesi. Troviamo, infatti, in ordine cronologico, per i dieci anni dal 1900 al 1909, i seguenti scostamenti da 310, media decennale: -16, -30, $+3$, -26, -2, $+12$, 0, $+7$, $+38$, $+14$. Si manifesta evidente la tendenza all'aumento della probabilità di morte.

La distribuzione, per grandezza, delle cifre di morti nei singoli anni, per le provincie nelle quali il numero medio annuo delle morti non è superiore a 10, è rappresentata abbastanza bene, nell'uno e nell'altro esempio, dalla formola [18]. Lo attestano i seguenti confronti sintetici (vedi anche prospetti 21, 22).

MORTI in numero di	Morti per omicidio		Morti per suicidio mediante impiccamento		MORTI in numero superiore o eguale a	Morti per omicidio		Morti per suicidio mediante impiccamento	
	(o.)	(c.)	(o.)	(c.)		(o.)	(c.)	(o.)	(c.)
0-1.	19	15·9	37	37·9	0.	60	60	160	160
2-3.			32	32·8	1.	60	59·1	145	142·3
4-5.	10	15·5	32	28·8	2.	57	56·3	123	122·1
6-7.	19	13·2	29	25·9	3.	53	51	109	104·6
8 o più. . . .	12	15·4	30	34·6	4.	41	44	91	89·3
					5.	36	36·3	75	74·7
					6.	31	28·6	59	60·4
					7.	20	21·5	40	46·8
					8.	12	15·4	30	34·6
					9.	10	10·5	20	24·3
					10.	9	6·8	15	16·3
					11.	5	4·2	13	10·5
					12.	2	2·5	8	6·4
					13.			6	3·8
					14.			4	2·1

Prospetto **19**.

Morti per omicidio.

(1900-1909).

PROVINCIE	Numero medio annuo dei morti	Q'
Treviso	2·8	·9
Venezia	4·2	·8
Vicenza	4·9	1·0
Padova	6·2	·7
Pavia	7·4	1·4
Bergamo	8·4	1·0
Bologna	10·9	1·0
Brescia	12·7	1·2
Siracusa	16·1	·8
Cagliari	25·4	1·4
Potenza	30·9	·9
Reggio Calabria	33·4	1·3
Cosenza	34·2	·8
Foggia	34·3	1·0
Salerno	36·6	·8
Catanzaro	41·6	1·1
Media . . .	19·4	1·0

Prospetto **20.**

Suicidii per impiccamento.

(1900-1909).

PROVINCIE	Numero medio annuo dei suicidii	Q'
Reggio Calabria	·5	1·0
Catanzaro	·9	·6
Cosenza	1·2	1·0
Salerno	1·5	1·0
Foggia	2·4	·7
Bergamo	2·6	·8
Siracusa	3·1	1·1
Potenza	5·0	1·2
Padova	5·6	·8
Verona	5·9	·6
Brescia	6·4	1·2
Vicenza	6·5	·7
Cagliari	6·9	·9
Pavia	7·3	1·3
Venezia	8·8	1·2
Treviso	9·5	1·2
Bologna	21·8	1·1
Media	5·6	1·0

Prospetto **21**.

Morti per omicidio.

PROVINCIE		Numero medio annuo dei morti	Anni con numero di morti eguale a 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 o più
Treviso . . .	o.	2·8		2	2	4	1		1									
	c.		·61	1·70	2·38	2·23	1·56	·87	·41	·16	·06	·02						
Venezia . . .	o.	4·2			1	3	3		2	1								
	c.		·15	·63	1·32	1·85	1·95	1·63	1·14	·69	·36	·17	·07	·03	·01			
Vicenza . . .	o.	4·9		1		2	1	2	2	1		1						
	c.		·07	·37	·90	1·46	1·79	1·75	1·43	1·00	·62	·33	·16	·07	·03	·01	·01	
Padova . . .	o.	6·2				1		2	3	3			1					
	.		·02	·12	·39	·80	1·25	1·55	1·60	1·42	1·10	·76	·47	·27	·14	·06	·03	·02
Pavia	o.	7·4				2		1	2	2			1		1			1
	c.		·01	·04	·17	·41	·76	1·13	1·40	1·48	1·36	1·12	·83	·56	·34	·20	·10	·09
Bergamo. . .	o.	8·4			1				1	1	2		2	3				
	c.			·02	·08	·22	·47	·78	1·10	1·32	1·38	1·29	1·08	·83	·58	·37	·23	·25
Somma . . .	o.	..		3	4	12	5	5	11	8	2	1	4	3	1			1
	c.		·86	2·88	5·24	6·97	7·78	7·71	7·08	6·07	4·88	3·69	2·61	1·76	1·10	·64	·37	·36

Prospetto **22.**

Suicidii per impiccamento.

PROVINCIE		Numero medio annuo dei suicidii	Anni con numero di suicidii eguale a																
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 o più
Reggio Calabria.	o.	·5	6	3	1														
	c.		6·06	3·03	·76	·13	·02												
Catanzaro .	o.	·9	2	7	1														
	c.		4·07	3·66	1·65	·49	·11	·02											
Cosenza . .	o.	1·2	2	6	1		1												
	c.		3·01	3·62	2·17	·87	·26	·06	·01										
Salerno . .	o.	1·5	2	3	4		1												
	c.		2·23	3·35	2·51	1·26	·47	·14	·03	·01									
Foggia. . .	o.	2·4		2	4	2	2												
	c.		·91	2·18	2·61	2·09	1·25	·60	·24	·08	·03	·01							
Bergamo. .	o.	2·6	1	1	1	5	2												
	c.		·74	1·93	2·51	2·18	1·41	·74	·32	·12	·04	·01							
Siracusa . .	o.	3·1	2		1	3	1	2	1										
	c.		·45	1·40	2·17	2·24	1·73	1·07	·55	·25	·10	·03	·01						
Potenza . .	o.	5·0				3	3	1	2						1				
	c.		·07	·34	·84	1·41	1·76	1·76	1·46	1·04	·65	·36	·18	·08	·03	·01	·01		
Padova. . .	o.	5·6				1	3	1	2	1	1	1							
	c.		·04	·21	·59	1·08	1·51	1·70	1·58	1·27	·89	·55	·31	·16	·07	·03	·01		
Verona. . .	o.	5·9				1		3	3	1	2								
	c.		·03	·16	·48	·94	1·38	1·63	1·60	1·35	1·00	·65	·39	·21	·10	·05	·02	·01	
Brescia. . .	o.	6·4			1		1	3	1	1	1			2					
	c.		·02	·11	·34	·72	1·16	1·49	1·58	1·45	1·16	·82	·53	·31	·16	·08	·04	·02	·01
Vicenza . .	o.	6·5				1		1	3	2	2	1							
	c.		·01	·10	·32	·69	1·12	1·45	1·57	1·46	1·19	·86	·56	·33	·18	·09	·04	·02	·01
Cagliari . .	o.	6·9				1	1	1	1	1	2	2	1						
	c.		·01	·07	·24	·55	·95	1·31	1·51	1·49	1·28	·99	·68	·43	·25	·13	·06	·03	·02
Pavia . . .	o.	7·3				1	1	1	2	2		1				2			
	c.		·01	·05	·18	·44	·80	1·17	1·42	1·48	1·35	1·09	·80	·53	·32	·18	·09	·05	·04
Venezia . .	o.	8·8						2	2	1	1			2			1	1	
	c.			·01	·06	·17	·38	·66	·97	1·22	1·34	1·32	1·16	·93	·68	·46	·29	·17	·18
Treviso . .	o.	9·5						1	2	1	1		1	1	1		1		1
	c.			·01	·03	·11	·25	·48	·76	1·04	1·23	1·30	1·23	1·07	·84	·62	·42	·27	·34
Somma . . .	o.	..	15	22	14	18	16	16	19	10	10	5	2	5	2	2	2	1	1
	c.		17·66	20·23	17·46	15·37	14·56	14·28	13·60	12·26	10·26	7·99	5·85	4·05	2·63	1·65	·98	·57	·60

15. — I due ultimi esempi che prenderemo in esame son tratti dalle statistiche della delinquenza. Elaborando le serie che indicano il numero annuo degli omicidii denunziati, dal 1896 al 1905, nelle sedici provincie già precedentemente considerate, e quelle delle condanne di donne per omicidio semplice consumato, nelle varie regioni italiane, dal 1890 al 1910, ho ottenuto i valori di Q' raccolti nei prospetti 23 e 24. La media di essi è 1·8 nel primo, ·95 nel secondo esempio.

L'aumento di Q', col crescere della probabilità del fenomeno studiato, è sensibile nel primo esempio (denunzie di omicidii), minimo nel secondo (condanne di donne). Si hanno le seguenti medie aritmetiche dei valori di Q':

I	1·4	per 6 provincie	con	6·6 a 13·2	omicidii
	1·3	„ 3	„	19·8 a 38·6	„
	2·4	„ 7	„	64·1 a 95	„
II	·90	per 6 regioni	con	·02 a ·08	condanne per 100,000 donne di oltre 9 anni.
	·98	„ 8	„	·12 a ·85	„ „

La probabilità del primo fenomeno appare assai variabile nel tempo [1]; quella del secondo invece scarsamente variabile, come risulta anche dal valore di Q' calcolato per

---

(1) Codesto risultato appare, a prima vista, in contraddizione con quello del n. 14, dove abbiamo trovato presso che costante la probabilità *di morte* per omicidio. Ma la contraddizione scompare quando si abbia riguardo alla differenza dei periodi considerati (in un caso 1900-09, nell'altro 1896-1905) ed anche alle forti divergenze fra la statistica penale e quella delle cause di morte (intorno alle ragioni delle quali divergenze v. *Statistica giudiziaria penale*, 1905-06).

Il numero degli omicidii denunziati, nel periodo 1896-1905, è diminuito da 3,929 nel primo a 3,126 nel secondo quinquennio, per l'insieme delle 16 provincie.

Il numero medio annuo delle condanne di donne per omicidio semplice consumato, in Italia, è stato di 26 nel periodo 1890-94, di 23·5 nel 1895-900.

l'Italia intera, che è molto prossimo all'unità (1·12). La grandezza media delle variazioni della probabilità cresce, nel primo esempio, col crescere della probabilità stessa.

La formola [18] è idonea alla rappresentazione delle serie statistiche indicanti il numero di condanne di donne nei diversi anni nelle singole regioni (v. prospetto 25). Avvertasi che, per semplificare i calcoli, essa venne applicata per il periodo decennale 1890-99, non per l'intero undicennio.

Condanne in numero di	(o.)	(c.)	Condanne in numero superiore o eguale a	(o.)	(c.)
0.	53	**56·0**	0.	140	**140**
1-2.	51	**47·3**	1.	87	**84**
3 o più	36	**36·7**	2.	51	**53·8**
			3.	36	**36·7**
			4.	28	**25·4**
			5.	17	**17·5**
			6.	11	**11·9**
			7.	7	**7·7**
			8.	4	**4·7**
			9.	3	**2·7**

Prospetto **23.**

Omicidii denunciati.

(1896-1905).

PROVINCIE	Numero medio annuo degli omicidii	Q'
Treviso	6·6	1·2
Bergamo	8·5	1·8
Padova	9·7	·9
Pavia	11·0	1·7
Vicenza	12·0	1·7
Venezia	13·2	1·0
Brescia	19·8	1·2
Bologna	23·7	1·3
Siracusa	38·6	1·3
Cosenza	64·1	1·9
Reggio Calabria	66·6	2·6
Salerno	76·1	1·8
Potenza	79·7	1·5
Cagliari	87·6	1·4
Catanzaro	93·3	3·6
Foggia	95·0	3·9
Media	44·1	1·8

Prospetto **24**.

Donne condannate per omicidio volontario semplice consumato.

(1890-1900).

REGIONI	Numero medio annuo di condanne	Proporzione a 1 milione di donne di oltre 9 anni	Q'
Liguria	·09	·2	**1·0**
Piemonte	·27	·2	**1·2**
Toscana	·36	·4	**·8**
Sardegna	·36	1·2	**·8**
Emilia	·45	·5	**·8**
Marche ed Umbria	·55	·8	**·9**
Veneto	·64	·5	**·6**
Lazio	1·27	2·8	**1·5**
Abruzzi	1·73	2·9	**·9**
Basilicata	1·73	8·5	**1·2**
Calabria	2·55	4·5	**·8**
Puglie	3·27	4·3	**·7**
Sicilia	5·18	3·8	**·5**
Campania	6·18	4·8	**1·3**
Media	1·76	2·5	**·9**
Italia	24·63	1·9	**1·1**

Prospetto **25.**

Donne condannate per omicidio volontario semplice consumato.

REGIONI		Numero medio annuo delle condanne	Anni con numero di condanne eguale a											
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 o più
Liguria	o.	·1	9	1										
	c.		9·05	·90	·05									
Piemonte	o.	·3	8	1	1									
	c.		7·41	2·22	·33	·04								
Toscana	o.	·3	7	3										
	c.		7·41	2·22	·33	·04								
Emilia	o.	·4	6	4										
	c.		6·70	2·68	·54	·07	·01							
Sardegna	o.	·4	6	4										
	c.		6·70	2·68	·54	·07	·01							
Marche ed Umbria.	o.	·5	6	3	1									
	c.		6·06	3·03	·76	·13	·02							
Veneto.	o.	·6	4	6										
	c.		5·49	3·29	·99	·20	·03							
Lazio	o.	1·3	4	3	2				1					
	c.		2·73	3·54	2·30	1·00	·33	·08	·02					
Abruzzi	o.	1·8	1	4	2	2	1							
	c.		1·65	2·97	2·68	1·61	·72	·26	·08	·02	·01			
Basilicata	o.	1·9	2	2	4		1	1						
	c.		1·49	2·84	2·70	1·71	·81	·31	·10	·03	·01			
Calabria	o.	2·5		3	2	3	1	1						
	c.		·82	2·05	2·56	2·14	1·34	·67	·28	·10	·03	·01		
Puglie	o.	3·1		1	2	3	3	1						
	c.		·45	1·40	2·17	2·24	1·73	1·07	·55	·25	·10	·03	·01	
Sicilia.	o.	5·3					3	3	2	2				
	c.		·05	·27	·70	1·24	1·64	1·74	1·54	1·16	·77	·45	·24	·20
Campania	o.	6·2		1	1		2		1	1	1	1	1	1
	c.		·02	·12	·39	·80	1·25	1·55	1·60	1·42	1·10	·76	·47	·52
Somma . . .	o.	..	53	36	15	8	11	6	4	3	1	1	1	1
	c.		56·03	30·21	17·04	11·29	7·89	5·68	4·17	2·98	2·02	1·25	·72	·72

IV.

16. — Nella prima parte di questo studio si è proposto, a rappresentare il modo di manifestazione di fenomeni collettivi, uno schema più generale di quelli finora applicati, il quale comprende il caso di variabilità dell'aspettazione matematica del fenomeno da osservazione a osservazione e da serie a serie di osservazioni, e quello di correlazione fra le singole manifestazioni del fenomeno.

Nella seconda parte si è spiegato il modo di applicazione dello schema stesso all'analisi dei fenomeni collettivi; e si è mostrato come dalla dispersione dei risultati di più serie di osservazioni intorno alla loro media si possa indurre la variabilità dell'aspettazione matematica del fenomeno considerato e la correlazione fra le singole manifestazioni di questo.

Le conclusioni della prima e della seconda parte sono raccolte nei n. 7 e 8.

Nella terza parte si è eseguito un saggio di applicazioni all'analisi della variazione di frequenza di fenomeni collettivi rari. Si è accertato che, per siffatti fenomeni:

corrispondentemente alle previsioni teoriche, il valore della grandezza Q', assunta a indice della dispersione, si mantiene sempre piccolo. Quello dei fenomeni rari non è che un caso particolare compreso nella formola generale [17 *bis*], dalla quale risulta che il confine superiore dei valori di Q' si abbassa col diminuire del numero complessivo dei casi accertati del fenomeno;

si ottengono, però, valori di Q' sensibilmente differenti — a pari probabilità — secondo la natura dei fenomeni, dalla quale dipende la misura delle variazioni nella loro frequenza e la misura delle correlazioni fra i singoli casi;

per ciascuna specie di fenomeni, il valore di Q' in generale si abbassa col diminuire della probabilità del fenomeno; ciò attesta che la misura media delle variazioni di codesta probabilità tende a diminuire insieme con la probabilità stessa (1);

per conseguenza, da fenomeni la probabilità dei quali varia da serie a serie di osservazioni, però in misura non molto forte, si ottengono valori di Q' prossimi all'unità, quando la probabilità media del fenomeno è molto piccola;

quando Q' differisce di poco da 1 e il numero dei casi accertati è piccolo, la formola [18] si adatta bene a rappresentare la distribuzione, per grandezza, dei numeri di casi di fenomeni collettivi accertati in più serie di osservazioni.

---

(1) Per le probabilità medie molto grandi l'ampiezza media delle deviazioni possibili diminuisce con l'accostarsi ad 1 della probabilità, perchè la media dei valori assoluti degli scostamenti di un numero qualsiasi di probabilità dalla loro media aritmetica P' non può superare il limite $2\ (P'-P'^2)$, che raggiunge il suo massimo valore quando $P' = (1 - P')$, quando cioè $P' = 0{\cdot}5$.

Ma per le probabilità piccolissime una piccola variabilità assoluta può essere grande relativamente, mentre per le probabilità grandissime è di necessità molto piccola anche relativamente. Onde il trovare valori di Q' prossimi ad 1 ci sorprende molto più nel primo che nel secondo caso, sul quale non si è fermata l'attenzione degli studiosi (lo ha notato, però, Gini, *Giornale degli economisti*, 1908, II. 658). È da avvertire inoltre che la formola [18] in pratica è applicabile soltanto alla rappresentazione del numero di casi in cui si manifestano fenomeni rari, e non può servire ad ottenere, per sottrazione, il numero di casi in cui si manifestano fenomeni frequentissimi. Perchè fosse consentita la seconda applicazione dovrebbe il numero delle osservazioni mantenersi rigorosamente costante nelle diverse serie, mentre per la prima basta che si mantenga costante in modo assai largamente approssimativo.

LE VARIAZIONI DELLA MORTALITÀ

DA GENERAZIONE A GENERAZIONE

IN SVEZIA

I. — Lo studio dell'ordine di estinzione di generazioni determinate è rimasto, finora, insoddisfatto desiderio della scienza demografica. Le tavole di sopravvivenza formate secondo la mortalità di persone *viventi* in dati periodi non bastano a supplir quelle che si otterrebbero dall'osservazione di persone *nate* in dati periodi, perchè se mostrano gli effetti della mortalità dominante in un certo intervallo di tempo, non rivelano chiaramente come la resistenza organica di un gruppo di persone coetanee dipenda dalla selezione per morti che la generazione cui esso appartiene ha subìta nelle precedenti età.

Il raffronto di più tavole di mortalità per generazioni determinate gioverebbe a stabilire se per avventura la diminuzione delle morti infantili, ostacolando l'eliminazione dei meno adatti alla vita, riesca biologicamente ed economicamente dannosa. Dalla sopravvivenza dei meno adatti potrebbero risentir danno la generazione cui essi appartengono — della quale verrebbe peggiorata la *qualità* media, e le successive — che ne riceverebbero contributo di prole meno vigorosa. Economicamente riuscirebbe nociva la riduzione della mortalità infantile anche se le vite sottratte alla implacabile dea cadessero sotto la sua falce prima d'aver toccato la soglia della giovinezza; chè il guadagno ottenuto di qualche anno d'esistenza sarebbe, nei riguardi economici, del tutto passivo.

Molti indizi, invero, degli effetti biologici ed economici che derivano dall'abbassarsi della quota dei morti nell'infanzia si possono desumere dal confronto di serie di tavole di sopravvivenza calcolate secondo la mortalità di gruppi contemporaneamente viventi. Ma soltanto dove sia costantemente stazionaria, in tutte le età, la frequenza delle morti, i due tipi di tavole si equivalgono. Altrimenti, se la mortalità va decrescendo, nel tempo, in tutte le età, le tavole calcolate su osservazioni di viventi in un periodo indicano un incremento della probabilità di morte, con l'età, più rapido di quello che si manifesta per i nati in un periodo. Avviene il contrario se la mortalità va crescendo, nel tempo.

È dunque troppo ardito estendere le conclusioni più generali tratte da osservazioni di *viventi* in singoli periodi alla mortalità dei *nati* in singoli periodi (1)?

Chiederemo all'esperienza una risposta.

2. — Le statistiche svedesi, comprendendo ormai un periodo di 160 anni, consentono di ricostituire l'ordine di estinzione dei nati dal 1751 in poi. A codesto intento non basterebbero i dati dei censimenti, se pur fossero del tutto esatti, non permettendo di distinguere le variazioni dovute a morte da quelle derivate da movimento migratorio. Dove le emigrazioni — come in Svezia — sono più numerose delle immigrazioni, il numero dei superstiti di ciascuna generazione indicato dai censimenti è inferiore al vero. Conviene quindi, per ciascuna età, stabilire quale sia la frequenza delle morti tra gli individui appartenenti ad ogni data ge-

(1) Tale estensione fu tentata da Beneduce (*Giornale degli economisti*, novembre 1907) e dall'autore del presente studio (*La mortalità secondo l'età*, Roma, Bocca, 1908).

nerazione, *viventi in Svezia;* e in base ai coefficienti così determinati costruire tavole di mortalità, prescindendo dai movimenti migratorii.

3. — Ho classificato in cinque generazioni — comprendente ciascuna i nati in trent'anni consecutivi — i nati nel periodo 1751-1900.

Ho ottenuto la probabilità, alla nascita, di morire entro il primo quinquennio di età, riferendo il numero dei bambini morti in ciascun periodo trentennale a quello dei nati vivi nel periodo stesso. L'errore derivante dal fatto che in ciascun trentennio muoiono, fra 0 e 5 anni d'età, un certo numero di nati nei cinque anni precedenti, e che da altro canto una parte dei nati nel trentennio muoiono, in età inferiore a 5 anni, nel quinquennio successivo, è valutabile soltanto per il periodo 1871-1900. Il numero dei morti fra 0 e 5 anni d'età in codesto periodo supera di 4 per 1000 il numero dei nati nel suddetto periodo che sono morti avanti dei 5 anni. La misura dell'errore è certamente più lieve per i periodi antecedenti, per i quali non è possibile determinarla esattamente; onde mi è parso lecito rinunziare ad ogni correzione.

Per la determinazione della mortalità oltre i 5 anni ho ragionato nel modo seguente:

I morti in età di anni 5-10 nel periodo $\left\{\begin{array}{l}1756\text{-}85\\1786\text{-}815\\1816\text{-}45\\1846\text{-}75\\1876\text{-}905\end{array}\right\}$ provengono in massima parte (circa 9/10) dai nati dal periodo $\left\{\begin{array}{l}1751\text{-}80\\1781\text{-}810\\1811\text{-}40\\1841\text{-}70\\1871\text{-}900\end{array}\right\}$; pertanto i coefficienti di mortalità (1) per

(1) Rapporti fra il numero medio annuo dei morti e quello dei viventi in età da 5 a 10 anni. Il numero medio dei viventi fu determinato secondo i risultati dei censimenti quinquennali, con le correzioni di

l'età 5-10, calcolati per i periodi 1756-85, ecc. misurano con molta approssimazione la frequenza delle morti avvenute in codesta età fra i nati nei trentennii 1751-80, ecc.

Analogamente, per le età da 10 a 15 anni venne adottato per la prima generazione il coefficiente di mortalità del periodo 1761-90, per la seconda quello del periodo 1791-820, ecc.; e in modo consimile si procedette per le successive età.

I rapporti di mortalità così determinati costituiscono una prima serie di elementi di confronto fra le diverse generazioni.

4. — La probabilità, all' età x, di sopravvivere all'età $x + 5$, si può ricavare dal coefficiente di mortalità (k) per l'età x, $x + 5$, secondo la formola:

$$(2 - 5\,k) : (2 + 5\,k).$$

L'approssimazione della precedente formola cessa di essere soddisfacente — anche a scopi puramente demografici — quando k supera 0,1; onde ho ritenuto opportuno applicarla soltanto ai coefficienti per i gruppi di età fra 5 e 70 anni, fermando a quest'ultimo limite le tavole di sopravvivenza calcolate per le varie generazioni. Nelle quali tavole è indicato soltanto il numero dei sopravviventi alle età espresse da multiplo di 5 ed inoltre all'età di un anno.

5. — Dalle tavole di sopravvivenza ho ricavata la distribuzione per età dei morti e il numero medio degli anni vissuti da ciascun componente la generazione [o da ciascun superstite a 15 anni] fra l'età di 15 e quella di 60 anni,

---

Sundbärg (*Statistisk Tidskrift*, 1903, pag. 212 e seg.), in base alla formola: $\frac{1}{12}\left(V_0 + V_{30} + 2\left\{V_5 + V_{10} + V_{15} + V_{20} + V_{25}\right\}\right)$, nella quale V indica il numero dei viventi, 0 l'istante iniziale e 30 l'istante finale del trentennio di osservazione.

dato che può assumersi a misura della durata media della vita economicamente produttiva [1].

6. — Non mi parve opportuno applicare metodi più raffinati di quelli sopra esposti, perchè al molto maggior dispendio di lavoro avrebbe corrisposto tenue guadagno di approssimazione (non essendo il materiale statistico immune da errori gravi almeno quanto quelli che possono derivare dall'impiego dei metodi meno perfetti), perchè gli errori commessi sono piccoli in relazione alle fortissime differenze accertate fra la mortalità delle varie generazioni e perchè, infine, manifestandosi sempre nel medesimo senso, alterano di poco i risultati dei confronti.

---

(1) V. MORTARA, *op. cit.*, e *Jahrb. für Nationalökonomie und Statistik*, 1908.

Tavola **I.**

Coefficienti di mortalità.

ETÀ	Numero medio annuo dei morti per 10,000 viventi in ciascun gruppo di età (1) nati nel periodo													
	1691-1720		**1721-1750**		**1751-1780**		**1781-1810**		**1811-1840**		**1841-1870**		**1871-1900**	
	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine
0-5					3 428	3 254	3 275	3 050	2 733	2 458	2 484	2 220	1 946	1 736
5-10.					141	130	111	104	78	72	94	88	69	70
10-15.					82	72	62	57	46	43	47	46	34	38
15-20.					73	67	63	61	51	50	49	47		
20-25.					95	78	91	74	80	59	69	54		
25-30.					100	85	104	84	82	66	72	64		
30-35.			124	123	122	108	119	96	93	78	72	68		
35-40.			131	116	136	118	139	109	109	92	77	73		
40-45.			184	158	169	144	173	126	125	101	88	78		
45-50.			200	153	208	150	210	142	143	107				
50-55.			262	198	289	210	256	181	171	128				
55-60.			301	231	363	273	309	232	218	168				
60-65.	472	399	493	405	495	395	418	336	283	232				
65-70.	662	563	673	584	659	551	578	492	403	343				
70-75.	985	903	1 049	934	983	851	836	721	610	537				
75-80.	1 322	1 201	1 507	1 347	1 477	1 307	1 230	1 065						
80-85.	2 127	1 956	2 322	2 126	2 156	1 910	1 850	1 582						
85-90.	2 936	2 607	3 330	3 073	3 025	2 719	2 759	2 415						

(1) Per il gruppo di età da 0 a 5 anni, le cifre del prospetto indicano quanti su 10,000 nati muoiano senza avere raggiunto l'età di 5 anni.

Tabella **II.**

Variazioni percentuali dei coefficienti di mortalità.

ETÀ	Variazione percentuale nel numero dei morti, per 10,000 viventi (1) in ciascun gruppo d'età, dalla generazione											
	1691-1720		1721-1750		1751-1780		1781-1810		1811-1840		1841-1870	
	alla generazione											
	1721-1750		1751-1780		1781-1810		1811-1840		1841-1870		1871-1900	
	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M.	F.
0-5. . . .					— 4·5	— 6·3	— 17	— 19	— 9·1	— 9·7	— 22	— 22
5-10 . . .					— 21	— 22	— 29	— 29	+ 19	+ 22	— 26	— 19
10-15 . . .					— 24	— 21	— 27	— 24	+ 2·8	+ 5·2	— 28	— 17
15-20 . . .					— 14	— 8	— 18	— 18	— 5·2	— 6·6		
20-25 . . .					— 4·0	— 4·4	— 13	— 20	— 13	— 8·5		
25-30 . . .					+ 3·5	— 0·7	— 21	— 22	— 12	— 2·9		
30-35 . . .			— 2·3	— 12	— 1·9	— 12	— 22	— 19	— 22	— 13		
35-40 . . .			+ 3·6	+ 1·2	+ 2·6	— 7·6	— 22	— 16	— 30	— 20		
40-45 . . .			— 8·4	— 8·9	+ 2·3	— 13	— 28	— 19	— 30	— 23		
45-50 . . .			+ 4·0	— 2·1	+ 0·7	— 5·5	— 32	— 25				
50-55 . . .			+ 10	+ 6·1	— 11	— 14	— 33	— 29				
55-60 . . .			+ 21	+ 19	— 15	— 15	— 29	— 28				
60-65 . . .	+ 4 4	+ 1·5	+ 0·5	— 2·4	— 16	— 15	— 32	— 31				
65-70 . . .	+ 1·7	+ 3·8	— 2·2	— 5·7	— 12	— 11	— 30	— 30				
70-75 . . .	+ 6·5	+ 3·5	— 6·3	— 8·9	— 15	— 15	— 27	— 25				
75-80 . . .	+ 14	+ 12	— 2·0	— 3·0	— 17	— 18						
80-85 . . .	+ 9·2	+ 8·7	— 7·2	— 10	— 14	— 17						
85-90 . . .	+ 13	+ 18	— 9·2	— 12	— 8·8	— 11						

(1) Per l'età 0-5 è indicata la variazione percentuale nel numero dei morti fra 0 e 5 anni per 10,000 nati vivi.

7. — Nella tavola I sono raccolti i coefficienti di mortalità per gruppi quinquennali d'età e nella II sono indicate le variazioni percentuali di questi da generazione a generazione.

Per quanto è lecito indurre dai dati incompleti che si possiedono, la mortalità dei nati nei periodi 1691-1720 e 1721-1750 non dovette differire di molto da quella della generazione 1751-80, la prima che sia dato seguire in tutto il corso dell'esistenza.

La tendenza alla diminuzione della mortalità comincia ad apparire ben determinata nel confronto fra la generazione 1781-810 e la precedente. In tutte le età per il sesso femminile, e in quasi tutte anche per il maschile, si osserva riduzione nella frequenza delle morti; l'intensità di tale riduzione è massima fra 5 e 15 anni (da 21 a 24 per 100) ma è considerevole anche nelle età fra 50 e 90.

La successiva generazione segna un progresso anche maggiore, giacchè vede accelerarsi la diminuzione della mortalità in tutte le età.

Invece i nati nel trentennio 1841-70, se nei primi cinque anni d'età sono stati colpiti da mortalità più mite di quella sofferta dalla precedente generazione, hanno pagato più grave decima fra 5 e 15 anni. Però i coefficienti di mortalità si mantengono, anche per codeste età, più bassi di quelli osservati nelle generazioni nate avanti il 1841; e dopo i 15 anni riprende la diminuzione di frequenza delle morti, anche in confronto ai nati fra il 1841 e il 1870.

Infine la generazione dei nati nel trentennio 1871-900, che possiamo seguire soltanto nei primi tre lustri d'età, mostra una mortalità più bassa di tutte le precedenti, ed inferiore di oltre due quinti a quella della generazione 1751-80.

Prescindendo dal peggioramento della mortalità fra 5 e 15 anni, pei nati del periodo 1841-70, in generale le variazioni dei coefficienti di mortalità da generazione a generazione sono negative. L'eccezione dianzi ricordata pare doversi attribuire ad una transitoria recrudescenza di malattie epidemiche, principalmente del vaiuolo (1).

Non conviene qui esaminare le cause di diminuzione della mortalità, le quali sono ormai generalmente note, mentre il nostro studio non reca nuovo contributo alla loro determinazione. Pare invece opportuno rivolgere l'attenzione alla dipendenza della mortalità di ciascuna età da quella delle età precedenti, dipendenza che le nostre tavole pongono in luce meglio delle tavole di mortalità per gruppi contemporaneamente viventi.

---

(1) V. Sundbärg, *Bevölkerungsstatistik Schwedens*, Stockholm, Norstedt, 1907.

Tavola **III.**

Confronto fra tavole di mortalità per singole generazioni e per gruppi contemporaneamente viventi.

(*Popolazione femminile*).

ETÀ $x, x + 5$	Numero medio annuo delle donne morte in età $x, x + 5$ su 10,000 viventi (1)			Numero medio annuo delle donne morte in età $x, x + 5$ su 10,000 viventi (1)		
	nate nel periodo **1751-80**	nel periodo **1751-1800**		nate nel periodo **1811-40**	nel periodo **1851-1900**	
(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*) = (*b*) — (*c*)	(*e*)	(*f*)	(*g*) = (*e*) — (*f*)
0-5	3 251	3 176	78	2 458	1 933	525
5-10	130·2	126·3	3·9	72·0	81·1	— 9·1
10-15	71·7	65·3	6·4	43·3	42·9	0·4
15-20	66·5	65·0	1·5	49·9	46·8	3·1
20-25	77·7	73·4	4·3	59·1	55·4	3·7
25-30	84·9	91·2	— 6·3	65·5	63·7	1·8
30-35	108·1	114·2	— 6·1	77·8	71·7	6·1
35-40	117·8	114·1	3·7	91·7	82·5	9·2
40-45	144·4	152·1	— 7·7	101·2	92·4	8·8
45-50	149·8	155·0	— 5·2	106·6	102·5	4·1
50-55	209·8	196·9	12·9	128·3	130·7	— 2·4
55-60	273·3	245·8	27·5	167·6	177·5	— 9·9
60-65	395·3	385·8	9·5	232·3	263·5	— 31·2
65-70	551·1	563·3	— 12·2	343·3	403·8	— 60·5
70-75	851·1	897·8	— 46·7	537·4	636·2	— 98·8
75-80	1 307	1 271	36			
80-85	1 910	1 914	— 4			
85-90	2 719	2 518	201			

(1) Per l'età 0-5: morte fra 0 e 5 anni su 10,000 nate vive in ciascun periodo.

8. — L'aspetto generale delle curve di mortalità (rappresentata in funzione dell'età) non si discosta da quello delle consimili curve desunte da tavole per gruppi contemporaneamente viventi. Dal massimo del primo anno di età la frequenza delle morti discende fino ad un minimo prima dei 15 anni; poi prende a salire: rapidamente fin verso 20 anni, lentamente fra 20 e 50, e sempre più rapidamente da 50 in poi. Per tutte le generazioni si osserva un rallentamento nella ascesa della mortalità femminile fra 45 e 50 anni (connesso, senza dubbio, con la cessazione dell'attività procreatrice); per le generazioni maschili più recenti si nota un fenomeno analogo fra 20 e 35 anni d'età. Poichè da 50 anni in poi la frequenza delle morti aumenta in progressione sempre più rapida, nè la formola di Gompertz, nè quella di Makeham sono adatte a rappresentarla [1].

Il confronto [2] delle nostre tavole con le tavole di mortalità svedesi per gruppi contemporaneamente viventi (tavola III) mostra che mentre nel periodo anteriore al 1800 le curve di mortalità dell'uno e dell'altro tipo press'a poco coincidevano, invece le generazioni più recenti attraversano nei primi anni d'età una mortalità più grave, negli ultimi una mortalità meno grave di quella che si osserva in un periodo situato a distanza press'a poco eguale dall'origine e dalla completa estinzione delle generazioni stesse. In altri termini, la curva di mortalità per gruppi contemporaneamente viventi sale col progredire dell'età, più rapidamente

(1) Per la Svezia, codeste formole non si adattano bene neppure alla rappresentazione delle curve di mortalità per gruppi contemporaneamente viventi.

(2) Nella tavola III sono eseguiti soltanto due confronti, che possono valere come esempi tipici. Dati per altri confronti si trovano in Sundbärg (*Bev. Schw.*, tab. 54) e nelle pubblicazioni annuali sul movimento della popolazione di Svezia.

delle curve riferentisi a singole generazioni. Nel paragonare tavole antiche con tavole recenti di mortalità per gruppi viventi contemporaneamente bisogna dunque tener conto della differenza che è tra esse: le prime possono assumersi, senza grave errore, a rappresentar la mortalità di generazioni realmente esistite, le seconde no. Nel confronto fra tavole antiche e recenti apparirà, in generale, minore del vero la diminuzione di mortalità nelle età mature ed avanzate, in rapporto alla corrispondente diminuzione nelle età infantili e giovanili.

Tavola **IV**.

Superstiti di 10,000 nati, a varie età.

ETÀ x	Sopravviventi all'età x, di 10,000 nati vivi nel periodo									
	1751-1780		1781-1810		1811-1840		1841-1870		1871-1900	
	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M	F.	M.	F.
0	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000
1	7 830	8 024	7 908	8 135	8 159	8 407	8 433	8 662	8 765	8 961
5	6 572	6 746	6 725	6 950	7 267	7 542	7 516	7 780	8 054	8 264
10	6 124	6 321	6 362	6 596	6 988	7 275	7 172	7 447	7 779	7 981
15	5 879	6 098	6 167	6 411	6 830	7 120	7 006	7 279	7 649	7 833
20	5 669	5 898	5 977	6 218	6 657	6 944	6 837	7 112		
25	5 407	5 674	5 711	5 992	6 397	6 742	6 605	6 922		
30	5 142	5 437	5 422	5 744	6 141	6 525	6 372	6 705		
35	4 839	5 150	5 108	5 476	5 863	6 276	6 145	6 482		
40	4 522	4 855	4 765	5 186	5 552	5 994	5 915	6 248		
45	4 155	4 517	4 370	4 870	5 216	5 698	5 660	6 010		
50	3 745	4 191	3 935	4 537	4 856	5 403				
55	3 239	3 773	3 461	4 143	4 457	5 067				
60	2 700	3 290	2 965	3 690	3 907	4 659				
65	2 105	2 699	2 404	3 118	3 470	4 148				
70	1 510	2 045	1 797	2 435	2 834	3 492				

Tavola V.

Variazioni nel numero dei superstiti a varie età.

ETÀ x	Aumento nel numero dei sopravviventi all'età x su 10,000 nati vivi dal periodo 1751-1780 al periodo							
	1781-1810		1811-1840		1841-1870		1871-1900	
	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M.	F.
1	78	111	329	383	603	638	935	937
5	153	204	695	796	944	1 034	1 482	1 518
10	238	275	864	954	1 048	1 126	1 655	1 660
15	288	313	951	1 022	1 127	1 181	1 770	1 735
20	308	320	988	1 046	1 168	1 214		
25	304	318	990	1 068	1 198	1 248		
30	280	307	999	1 088	1 230	1 268		
35	269	326	1 024	1 126	1 306	1 332		
40	243	331	1 030	1 139	1 393	1 393		
45	215	353	1 061	1 181	1 505	1 493		
50	190	346	1 111	1 212				
55	222	370	1 218	1 294				
60	265	400	1 297	1 369				
65	299	419	1 365	1 449				
70	287	390	1 324	1 447				

9. — Le tavole di sopravvivenza (tavola IV) mostrano che a tutte le età (almeno fino a quella di 70 anni) ciascuna generazione ha un numero di superstiti maggiore che la precedente. La riduzione della mortalità infantile non è scontata nell'adolescenza; anzi l'incremento dei superstiti a 1 anno è superato da quello dei superstiti a 5 e questo a sua volta è sempre minore del guadagno di sopravviventi a 10 ed a 15 anni. Quattro quinti dei nati nell'ultimo trentennio del secolo XIX raggiungono l'età di 15 anni, che era toccata soltanto da tre quinti dei nati fra il 1751 e il 1780. E, sebbene la frequenza delle nascite sia notevolmente diminuita, poichè nel periodo più recente sopravvivono a 15 anni 2220 dei 2883 nati vivi in ciascun anno per 10,000 abitanti, mentre nel più antico sopravvivevano soltanto 2054 di 3424 nati, si ottiene maggior somma di energia economica con minore sperpero di energie biologiche (riduzione nel numero dei parti) ed economiche (riduzione nella spesa di allevamento di individui morti prima dei 15 anni).

I fatti, pertanto, non giustificano il timore, manifestato da alcuni economisti, che la diminuzione della mortalità infantile, non conseguendo altro effetto se non un breve prolungamento dell'esistenza di creature disadatte alla vita, abbia a risolversi in un danno economico. Anzi, come appare dalla tavola V, il risparmio di vite ottenuto nei primi anni di età dalle generazioni più recenti, si accresce nel seguito della loro esistenza. Aggiungiamo qui alcuni confronti fra ciascuna generazione e quella immediatamente precedente:

ALL'ETÀ di anni	Per ogni 10,000 nati la generazione dei nati nel periodo indicato ha ottenuto in confronto alla precedente un risparmio di vite					
	1781-1810		1811-1840		1841-1870	
	M.	F.	M.	F.	M.	F.
15.	288	313	663	709	176	159
55.	215	353	846	828	444	312
65.	299	419	1 066	1 030		

Non danno, adunque, bensì vantaggio economico proviene dalla riduzione della mortalità. Ad un tempo cresce il numero di coloro che iniziano il periodo economicamente attivo dell'esistenza, e cresce, in maggior misura, il numero di coloro che giungono a terminarlo. Per esempio la generazione 1811-40 aggiunge (in confronto alla precedente) un risparmio di 403 vite (per ogni 10,000 nati), fra 15 e 65 anni a quello di 663 conseguito prima dei 15 anni. Da generazione a generazione aumenta la durata media della vita economicamente produttiva, come risulta dai seguenti dati:

	Numero medio degli anni vissuti fra le età di 15 e 60 anni					
	da ciascun componente della generazione			da ciascun superstite a 15 anni della generazione		
	1751-80	1781-810	1811-40	1751-80	1781-810	1811-40
Maschio	20·5	21·7	25·3	34·9	35·1	37·0
Femmina.	22·1	23·6	27·3	36·2	36·8	38·3

Tavola **VI.**

Distribuzione per età dei morti.

ETÀ $x, x+n$	Morti in età compresa fra x e $x+n$, di 10,000 nati vivi nel periodo									
	1751–1780		1781–1810		1811–1840		1841–1870		1871–1900	
	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine	Maschi	Femmine
0–1	2 170	1 976	2 092	1 865	1 841	1 593	1 567	1 338	1 235	1 039
1–5	1 258	1 278	1 183	1 185	892	865	917	882	711	697
5–15.	693	648	558	539	437	422	510	501	405	431
15-25.	472	424	456	419	433	378	401	357		
25-35.	538	524	603	516	534	466	460	440		
35-45.	684	633	738	606	647	578	485	472		
45-55.	916	744	909	727	759	631				
55-65.	1 134	1 074	1 057	1 025	987	919				
65-ω.	2 105	2 699	2 404	3 118	3 470	4 148				

Tavola **VII.**

Variazioni nella distribuzione per età dei morti.

ETÀ $x, x+n$	Variazione nel numero dei morti in età compresa fra x e $x+n$, su 10,000 nati vivi, dal periodo 1751-1780 al periodo							
	1781-1810		1811-1840		1841-1870		1871-1900	
	M.	F.	M.	F.	M.	F.	M.	F.
0-1	— 78	— 111	— 329	— 383	— 603	— 638	— 935	— 937
1-5	— 75	— 93	— 366	— 413	— 341	— 396	— 547	— 581
5-15.	— 135	— 109	— 256	— 226	— 183	— 147	— 288	— 217
15-25.	— 16	— 5	— 39	— 46	— 71	— 67		
25-35.	+ 35	— 8	— 34	— 58	— 108	— 84		
35-45.	+ 54	— 27	— 37	— 55	— 199	— 161		
45-55.	— 7	— 17	— 157	— 113				
55-65.	— 77	— 49	— 147	— 155				
65-ω	+ 299	+ 419	+ 1 365	+ 1 449				

10. — L'aver accertato che alla riduzione delle morti infantili non corrisponde aggravamento nella mortalità degli adulti non consente senz'altro di affermare che la resistenza media di questi ultimi all'azione delle cause di morte sia aumentata, non ostante la meno rigorosa selezione. Giacchè gli effetti di una diminuzione di resistenza possono essere più che compensati da quelli delle migliorate condizioni igieniche e sanitarie. È lecito tuttavia osservare che il risparmio di vite infantili è contrabbilanciato da aumento di morti soltanto nelle età senili, non lungi dal termine normale dell'esistenza degli uomini sani; onde non sembra troppo ardito indurre che la maggior parte delle persone sottratte a precoce fine siano dotate di normale idoneità all'esistenza e non rappresentino, come taluno propende a ritenere, gli *scarti* della specie.

A conferma di codesta conclusione si può addurre anche il fatto che i nati negli anni più recenti, frutti di generazioni, le quali furono sottoposte a mortalità relativamente mite, soffrono una mortalità anche inferiore a quella delle generazioni stesse, che pur provenivano da altre decimate gravemente nell'infanzia e quindi — secondo i selezionisti a oltranza — più vigorose (1). In ogni modo, nessun indizio consente di ritenere che la diminuzione della mortalità, apparsa economicamente utile, sia biologicamente dannosa.

---

(1) I confronti internazionali porgono ulteriori argomenti. In Svezia la diminuzione della mortalità è cominciata almeno un secolo prima che nella maggior parte degli altri paesi europei. Eppure, nonostante la meno severa scelta, gli adulti non appaiono dotati di vigoria fisica inferiore a quella delle altre popolazioni.