

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *Direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès (*Athènes*) - **Prof. F. Bernstein** (*Göttingen*) - **Prof. A. E. Bunge** (*Buenos Aires*) - **Prof. F. P. Cantelli** (*Roma*) - **Prof. C. V. L. Charlier** (*Lund*) - **Prof. A. Flores de Lemus** (*Madrid*) - **Prof. M. Greenwood** (*London*) - **Dott. G. Jahn** (*Oslo*) - **Prof. A. Julin** (*Bruxelles*) - **Prof. H. W. Methorst** (*La Haye*) - **Prof. W. F. Ogburn** (*Chicago*) - **Prof. R. Pearl** (*Baltimore*) - **Prof. H. Westergaard** (*Copenhagen*)

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSEKRETAERE

Prof. Luigi Galvani - **Prof. Mario Saibante**

Vol. XI - N. 2.

15-VIII-1933.

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

C. Gini, M. Boldrini, L. Galvani, A. Venere. <i>Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni</i>	Pag. 3
E. Mezrath. <i>Anpassung von Flächen an zweidimensionale Kollektivgegenstände und ihre Auswertung für die Korrelations-theorie</i>	» 103
Curtis Bruen. <i>Five Variable Straight Line Diagram</i>	» 137
G. Lipatello. <i>La popolazione studentesca dell'Università di Grenoble</i>	» 151
Cassa Nazionale malattie per gli Addetti al Commercio. <i>Rettifica dei coefficienti di riduzione riportati nelle « Tavole di morbilità e di frequenza delle malattie per i prestatori d'opera del Commercio »</i>	» 207

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

La Rivista internazionale di Statistica METRON esce in fascicoli. Quattro fascicoli consecutivi costituiscono complessivamente un volume di 700-800 pagine.

METRON accoglie articoli originali di metodologia statistica e di applicazioni statistiche alle varie discipline, e rassegne o discussioni di risultati raggiunti col metodo statistico in diversi campi della scienza o tali da poter interessare il cultore della statistica. Pubblica altresì una bibliografia di tutte le opere e riviste ricevute in omaggio od in cambio.

Articoli e rassegne potranno essere scritti in italiano, francese, inglese o tedesco. I manoscritti in lingua francese, inglese o tedesca dovranno essere dattilografati.

La collaborazione non è retribuita. Gli autori riceveranno gratuitamente 25 estratti dei lavori pubblicati.

I manoscritti per la pubblicazione dovranno essere indirizzati al Prof. Corrado Gini, R. Università di Roma — Istituto di Statistica, oppure al membro del Comitato direttivo che rappresenta lo Stato a cui l'autore appartiene. Gli autori sono pregati di conservare copia del manoscritto inviato, poichè, nel caso che questo non venga pubblicato, la Direzione non ne garantisce la restituzione.

Al Prof. Corrado Gini dovranno pure essere indirizzate le richieste di cambi da parte di riviste o di altri periodici e ogni pubblicazione inviata in cambio od in omaggio.

Le richieste di abbonamenti, del pari che i versamenti, dovranno invece essere indirizzati alla Amministrazione del « Metron » presso l'Istituto di Statistica della R. Università di Roma — Via delle Terme di Diocleziano, 10.

Il prezzo di abbonamento per ciascun Volume è di 100 Lire Italiane e quello del fascicolo di 30 Lire Italiane, porto compreso.

La Revue Internationale de Statistique METRON paraît par livraisons. Quatre livraisons consécutives forment un volume de 700-800 pages.

METRON publie des articles originaux de méthodologie statistique et d'applications statistiques aux différentes disciplines, ainsi que des revues ou des discussions des résultats obtenus par la méthode statistique dans toutes les sciences ou bien intéressant les savants qui s'occupent de statistique.

METRON publie aussi une bibliographie de tous les ouvrages et revues reçues en hommage ou en échange.

Les articles et les revues pourront être écrites en français, en italien, en anglais ou en allemand. Les manuscrits en français, en anglais ou en allemand doivent être envoyés dactylographiés.

On enverra gratis aux auteurs 25 copies tirées à part de leurs travaux après publication.

On adressera les manuscrits pour la publication à M. le Prof. Corrado Gini, Istituto di Statistica, R. Università di Roma (Italie), ou bien au membre du comité de direction représentant le pays de l'auteur. On prie les auteurs de garder une copie du manuscrit qu'ils adressent à la Revue, car, en cas de non publication, la rédaction ne garantit pas de pouvoir le renvoyer.

Les demandes d'échange de la part des Revues et des autres périodiques, ainsi que toutes les publications envoyées en échange ou en hommage doivent aussi être adressées au Prof. Corrado Gini.

Les demandes de nouveaux abonnements, ainsi que tout paiement, devront être adressés à l'Administration du « Metron » auprès de l'Institut de Statistique de l'Université Royale de Rome — Via delle Terme di Diocleziano, 10, Roma, Italie.

Le prix d'abonnement par volume est fixé à 100 Lires It. et le prix par fascicule est de 30 Lires It. frais d'envoi compris.

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *Direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *prof. de Science des finances à l'Université d'Athènes (Grèce),*

Prof. F. Bernstein, *Direktor des Instituts für mathematische Statistik der Universität Göttingen (Deutschland).*

Prof. A. E. Bunge, *director gen. de Estadística de la Nación, Buenos Aires (Argentina).*

Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Roma (Italia).*

Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund (Schweden).*

Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Min. de Hacienda, Madrid (España).*

Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London (England).*

Dott. G. Jahn, *directeur du Bureau Central de Statistique de Norvège, Oslo (Norvège).*

Prof. A. Julin, *secrétaire général honoraire du Ministère de l'Industrie et du Travail et de la Prévoyance sociale, Bruxelles (Belgique).*

Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye (Pays-Bas).*

Prof. W. F. Ogburn, *professor of Sociology in the University of Chicago (U. S. A.).*

Prof. R. Pearl, *director of the Department of Biology of the School of Hygiene and Public Health, Baltimore (U. S. A.).*

Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen (Denmark).*

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — **Prof. Mario Saibante**

Vol. XI - N. 2

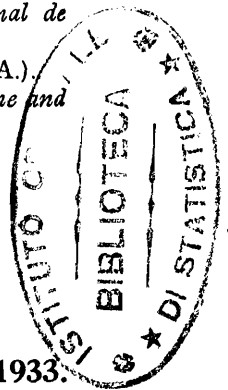
15-VIII-1933.

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

C. Gini, M. Boldrini, L. Galvani, A. Venere. <i>Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni</i>	Pag. 3
E. Merzrath. <i>Anpassung von Flächen an zweidimensionale Kollektivgegenstände und ihre Auswertung für die Korrelationstheorie</i>	» 103
Curtis Bruen. <i>Five Variable Straight Line Diagram</i>	» 137
G. Lucatello. <i>La popolazione studentesca dell'Università di Grenoble</i>	» 151
Cassa Nazionale malattie per gli Addetti al Commercio. <i>Rettifica dei coefficienti di riduzione riportati nelle «Tavole di morbilità e di frequenza delle malattie per i prestatori d'opera del Commercio»</i>	» 207

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL «METRON»
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA



ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

(Secondo l'ordine d'arrivo).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(D'après la date de reception).

ARTIKEL, DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGEKAMMT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(Nach der Reihenfolge des Eingangs)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTURE ISSUES.

(According to date of receipt)

- T. Salvemini.** *Sulla interpolazione grafica di istogrammi.*
- V. Castellano.** *Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione.*
- H. von Schelling.** *Die Konzentration einer Verteilung und ihre Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches.*
- C. E. Dieulefait.** *Sur les développements des fonctions des fréquences en séries de fonctions orthogonales.*
- N. Smirnoff.** *Ueber die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe.*
- P. R. Rider.** *The third and fourth Moments of the generalized Lexis Theory.*
- J. O. Irwin.** *Tests of Significance for differences between percentages based on small numbers.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articoli stessi, qualora vengano pubblicati.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue, pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriété littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

The Authors of papers sent for publication in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätze, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

C. GINI, M. BOLDRINI, I. GALVANI,
A. VENERE

Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni

SOMMARIO

PREMESSA.

INTRODUZIONE TEORICA.

1. Centro di gravità e centro mediano di una distribuzione di punti pesanti nel piano. — 2. Applicazione dei concetti esposti alla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione o di un territorio. — 3. Cenno sui vari sistemi di proiezione che si possono impiegare per la rappresentazione piana della superficie terrestre. — 4. Applicazioni pratiche dei vari centri e loro importanza. — 5. Centri di fenomeni connessi con la distribuzione della popolazione in un territorio. — 6. Latitudine e longitudine media ; latitudine e longitudine mediana. — 7. Linee mediane e linee medie.

APPLICAZIONI AD ALCUNE POPOLAZIONI E AD ALCUNI TERRITORI.

Centro di gravità. — 8. Cenni storici. — 9. Stati Uniti d'America. — 10. Russia. — 11. Confederazione Australiana. — 12. India. — 13. Giappone. — 14. Germania. — 15. Svezia. — 16. Italia. — 17. Polonia.

Centro mediano. — 18. Determinazione del centro mediano di una popolazione. — 19. Centro mediano della popolazione e del territorio italiano. — 20. Coordinate mediane. — 21. Calcolo delle coordinate mediane della popolazione italiana censita nel 1911 e nel 1921.

Centri territoriali. — 22. Altri centri riferiti al solo territorio italiano : confronti col centro di popolazione.

Centri nazionali di alcuni fenomeni. — 23. Confronto tra il centro di popolazione e il centro di alcuni fenomeni connessi con la distribuzione della popolazione. — 24. Determinazione indiretta del centro nazionale di alcuni fenomeni.

Altitudini medie e temperature medie. — 25. Altitudine media e mediana della popolazione italiana alle epoche dei vari censimenti. — 26. Influenza

dell'altimetria su alcuni fenomeni demografici. — 27. Altitudine media delle nascite e delle morti in base alla popolazione 1911. — 28. Altitudini medie dell'incremento di popolazione, dell'accrescimento naturale e del movimento migratorio. — 29. Altitudine media della popolazione, delle nascite, delle morti, dell'eccedenza naturale e della nuzialità (1881-1901). — 30. La temperatura media di un paese in relazione alla latitudine e all'altitudine. — 31. Temperatura media alla quale vive la popolazione italiana.

RIASSUNTO.

RÉSUMÉ.

PREMESSA.

Questo studio riassume e sistema un complesso di ricerche sui centri di popolazione eseguite durante un quindicennio per iniziativa del Prof. Corrado Gini, prima come delegato italiano in seno alla Commissione Scientifica Interalleata dell'Alimentazione, poi come privato studioso, e da ultimo come Presidente dell'Istituto Centrale di Statistica e come Presidente del Congresso Internazionale della Popolazione tenutosi in Roma nel settembre 1931. Le ricerche furono fatte in parte da lui personalmente o con la sua collaborazione e in parte sotto la sua guida. Nella parte direttiva egli fu assistito in un primo periodo dal Prof. Boldrini, ed in un secondo dal Prof. Galvani. Buona parte delle ricerche teoriche furono fatte in collaborazione col Prof. Galvani, mentre alle applicazioni alla popolazione italiana collaborarono particolarmente il Prof. Boldrini (e poi i suoi allievi, Prof. Uggè e Dott. Giglio) e la Dott.ssa Venere, la quale ha anche steso, sotto le direttive del Prof. Gini e con l'assistenza sua e del Prof. Galvani, la presente memoria.

Alcuni risultati contenuti in questo lavoro sono già stati pubblicati in una memoria del Prof. Gini sull'influenza di alcuni fattori sopra il fabbisogno alimentare dell'uomo medio, presentata nel 1918 alla Commissione Scientifica Interalleata dell'Alimentazione, apparsa negli Atti di detta Commissione e riprodotta nel « Nuovo Patto ».

Una estesa memoria preparata dai Proff. Gini e Boldrini e destinata ad essere pubblicata sul « Metron » fu annunciata da questa rivista fin dal 1-VI-1925, ma la sua pubblicazione fu sospesa in attesa che il Prof. Uggè estendesse i calcoli alle nuove provincie annesse all'Italia in seguito alla guerra vittoriosa, e che il Dott. Giglio compisse le sue ricerche sopra l'altitudine media.

La memoria del Prof. Uggè fu pubblicata in « Vita e Pensiero » e quella del Dott. Giglio è in corso di stampa.

Essendosi frattanto pubblicati i dati del censimento 1921, parve però opportuno di estendere a questi le ricerche, comprendendo in una sola pubblicazione i vecchi e i nuovi risultati.

Alcune questioni teoriche trovarono trattazione nella memoria dei Proff. Gini e Galvani *Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi* apparsa in « Metron », sulla quale apparve necessario richiamare l'attenzione degli studiosi americani in una nota del dicembre 1930 apparsa nel « Journal of the American Statistical Association ». Sviluppi successivi furono dati dal Prof. Galvani in una memoria presentata al Congresso Internazionale della Popolazione.

Nel presente studio vennero, naturalmente, citati diversi lavori pubblicati da studiosi di altri paesi, in particolare le memorie del Prof. Griffin, del Dott. Linders e del Dott. Scates, presentate, su invito del Prof. Gini, al Congresso Internazionale della popolazione; ed anche le applicazioni eseguite in vari paesi e particolarmente quelle fatte in Italia, indipendentemente dagli autori della presente memoria, dal Prof. Marinelli e pubblicate in *Curiosità Geografiche*, Vallardi, Milano, 1928.

Questo studio non è però completo, come i suoi autori avrebbero desiderato, dato che i calcoli dei centri della popolazione sono assai laboriosi. D'altra parte non è parso consigliabile ritardarne ulteriormente la pubblicazione, in quanto già si stanno elaborando i dati del censimento del 1931, che potranno formare materia ad ulteriori applicazioni dei concetti e dei metodi esposti e saggiati in questa memoria.

A preordinare tali applicazioni il prof. Gini, nella sua qualità di Presidente dell'Istituto Centrale di Statistica, aveva già disposto che le coordinate dei Comuni del Regno, fossero assunte con l'approssimazione di un minuto primo, anzichè di 15', per poter avere una più esatta determinazione dei centri di popolazione.

INTRODUZIONE TEORICA.

I. — *Centro di gravità e centro mediano di una distribuzione di punti pesanti nel piano.* — Si definisce centro di gravità o baricentro di un sistema S di punti materiali P_i aventi i pesi m_i , il punto di applicazione G della risultante del sistema di vettori paralleli e di ugual verso, rappresentativo dei pesi m_i dei singoli punti del sistema.

Esso dipende esclusivamente dalla configurazione del sistema e dalle masse dei singoli punti.

Se il sistema si suppone discreto, G è definito dall'equazione vettoriale

$$G - 0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (P_i - 0)}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

essendo 0 un punto arbitrario di riferimento.

Se, come noi supporremo, tutte le masse appartengono al medesimo piano, proiettando la (1) sugli assi di un generico sistema di coordinate con l'origine in 0 e giacente nello stesso piano, le coordinate x , y , di G risulteranno espresse dal sistema

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

dove x_i ed y_i designano le coordinate dei punti P_i del sistema. Queste formule mostrano che le coordinate del centro di gravità si ottengono come medie aritmetiche ponderate delle coordinate dei punti del dato sistema, ove per pesi si assumano le masse dei punti stessi. Da esse discende anche immediatamente la dimostrazione della proprietà associativa del baricentro. Infatti se il sistema S si considera scisso in due sistemi parziali S' ed S'' e sono m' ed m'' le masse totali di S' ed S'' e G' (\bar{x}' , \bar{y}'), G'' (\bar{x}'' , \bar{y}'') i rispettivi baricentri, sussistono le formule

$$\bar{x} = \frac{m' \bar{x}' + m'' \bar{x}''}{m' + m''}, \quad \bar{y} = \frac{m' \bar{y}' + m'' \bar{y}''}{m' + m''} \quad (3)$$

cioè: il baricentro G di S coincide con quello delle masse m' , m'' , supposte localizzate nei punti G' e G'' .

Ricordiamo che si definisce momento statico di una massa localizzata in un punto, rispetto ad una retta, il prodotto della massa per la sua distanza dalla retta. Facendo coincidere la retta con uno degli assi coordinati, per es. $x = 0$, si deduce allora dalla prima delle (2) che la somma dei momenti statici delle masse di un sistema piano rispetto ad una retta generica del suo piano, coincide col momento statico della massa totale supposta localizzata nel baricentro. Segue che il momento statico del sistema, rispetto ad ogni retta passante per il baricentro, è nullo.

Il baricentro ha anche la proprietà di rendere minimo il momento polare di 2° ordine del sistema, cioè esso è quel punto del piano rispetto al quale è minima la somma ponderata dei quadrati delle distanze dei punti del sistema. La condizione analitica è così espressa:

$$\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2] m_i = \text{minimo}$$

Se rispetto ad un punto P risulta minimo il momento polare (di 2° ordine), risulta nullo il momento statico del sistema rispetto a tutte le rette (del piano) che passano per P e viceversa, sicchè anche la proprietà di rendere minimo il momento polare (di 2° ord.) è caratteristica del baricentro e può essere assunta come definizione di esso. Le equazioni (2) rappresentano i baricentri dei due sistemi lineari che si ottengono proiettando il sistema dato S sugli assi x ed y rispettivamente. È ovvio che \bar{x} è interno al segmento minimo, contenente i punti rappresentativi del primo di tali sistemi lineari, e che \bar{y} gode della stessa proprietà rispetto al secondo. Analogamente G è interno al poligono convesso minimo che contiene tutti i punti del sistema S , poichè altrimenti esisterebbero infinite rette per G che lasciano tutto il sistema da una stessa banda, ipotesi questa incompatibile con la condizione che il momento statico deve essere nullo rispetto a tutte le rette passanti per il baricentro.

Ricordato il concetto e le principali proprietà del centro di gravità di una distribuzione S di punti pesanti sopra un piano, possiamo a considerare un altro punto atto a caratterizzare anch'esso, sotto un altro aspetto, la distribuzione S .

È questo il centro mediano della distribuzione, il quale si definisce come il punto del piano rispetto al quale risulta minima la somma ponderata delle distanze dagli altri punti della distribuzione data (ossia il momento polare del 1° ordine, e quindi anche lo scarto semplice medio) cioè

$$(I) \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2} \cdot m_i = \text{minimo}$$

dove \bar{x} ed \bar{y} stanno ad indicare le coordinate di questo punto ed m_i i pesi dei punti del sistema S.

Dalla (I) segue, derivando rispetto alle due variabili x ed y , che le coordinate del centro mediano debbono soddisfare le relazioni

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}) m_i}{\sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2}} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y}) m_i}{\sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2}} = 0 \end{array} \right.$$

ovvero le altre equivalenti

$$\sum_{i=1}^n m_i \cos \alpha_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n m_i \sin \alpha_i = 0 \quad (*).$$

Queste due ultime relazioni mostrano che il centro mediano gode della proprietà che, condotti da esso tanti vettori di moduli m_i nelle direzioni dei diversi punti della distribuzione, la loro somma è nulla.

Ne segue che la posizione del centro mediano non cambia qualora uno o più punti della distribuzione si spostino arbitrariamente lungo raggi uscenti dal centro stesso. Inoltre bisogna osservare che le equazioni (II) permettono la determinazione pratica delle coordinate del punto mediano soltanto nei casi più semplici, perchè esse costituiscono un sistema non lineare, anzi generalmente di grado molto elevato, rispetto ad x ed y . È, tuttavia, stato dimostrato (**)

(*) C. GINI e L. GALVANI. *Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi*. «Metron», Vol. VIII, 1929.

(**) L. GALVANI. *Sulla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione, con applicazioni alla popolazione italiana censita il 1° dicembre 1921*. «Atti del Congresso Internazionale per lo Studio dei Problemi della Popolazione». Roma, 1931.

che per una distribuzione di punti nel piano con frequenze arbitrarie, esiste una sola soluzione reale del sistema (II), (almeno quando fra i dati punti ne esiste uno non allineato con gli altri). In pratica è opportuno determinare le coppie di valori x, y , a ciascuna delle quali corrisponde un punto (centro mediano in senso stretto) appartenente alla distribuzione data, per cui sia minima la distanza complessiva da tutti gli altri punti della distribuzione. Godono di tale proprietà uno o più punti della distribuzione, non esterni ad un certo contorno convesso (*), internamente al quale cade la soluzione reale del sistema (II) (centro mediano in senso lato).

A proposito del centro mediano è d'uopo ricordare che esso venne definito, fin dal 1906, da D. I. MENDELEIEFF, che ebbe a chiamarlo « centro di convergenza ». Di tale punto lo SMIRNOFF ed il BOBRİK avrebbero studiato talune proprietà. Non ci è stato, però, possibile consultare le opere di questi tre autori.

Del resto, in riferimento a tre soli punti nel piano, il concetto e la determinazione di centro mediano si possono fare risalire a FERMAT e a TORRICELLI (vedasi, più oltre, n. 20).

La definizione analitica del centro mediano per una distribuzione lineare si ricava da quella per una distribuzione piana ponendo in essa $y = 0$. La formula diventa

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - \bar{x})^2} \cdot m_i = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \cdot m_i = \text{minimo}$$

dalla quale si ha

$$(II') \quad \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}) m_i}{|x_i - \bar{x}|} = 0.$$

La (II') si può porre sotto la forma

$$\sum_{i=1}^n m_i \operatorname{sg}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

dove $\operatorname{sg}(x_i - \bar{x})$ ha il valore ± 1 secondo che sia $x_i \geq \bar{x}$.

Se il sistema si considera composto di $\sum_{i=1}^n m_i$ masse unitarie, m_i delle quali localizzate nel punto x_i , da questa formula segue subito che

(*) L. GALVANI, I. c.

a destra e a sinistra del centro mediano si trovano uguali numeri di masse unitarie del sistema. Pertanto se $\sum_{i=1}^n m_i$ è pari, il centro mediano è indeterminato ed ogni punto del segmento da x_h a x_{h+1} ($\sum_{i=1}^h m_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i$) può essere considerato come punto mediano della distribuzione.

2. — *Applicazione dei concetti esposti alla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione o di un territorio.* — Prima di parlare dei metodi di calcolo adoperati per la determinazione del centro di gravità della popolazione di un territorio, riferiamo al caso specifico la definizione di tale centro. E precisamente per centro di gravità della popolazione di un determinato paese, s'intenderà il punto su cui potrebbe stare in bilico il territorio considerato, supposto piano, rigido e senza peso, qualora si supponesse che ciascun abitante avesse uno stesso peso. Questo centro si potrà poi individuare per mezzo delle sue coordinate geografiche, relative ad un meridiano e ad un parallelo scelti come elementi di riferimento.

Immagine geometrica del caso in esame (centro della popolazione) è una superficie su cui grava un insieme discreto di punti; si vuol determinare un punto tale che risulti minima la somma dei quadrati delle distanze di esso da tutti gli altri punti dell'insieme dato. Se il territorio su cui è distribuita la popolazione è sufficientemente ristretto, lo si può considerare piano senza commettere per questo un grave errore; se invece ciò non è possibile, occorre passare dalla superficie in esame ad una sua rappresentazione piana.

In generale, fissata una rappresentazione piana del territorio abitato dalla popolazione che si vuole considerare, e diviso codesto territorio in unità sufficientemente piccole, si suppone che la popolazione contenuta nel perimetro di ciascuna di queste unità sia concentrata nel rispettivo centro di figura. Tale ipotesi si può sempre ammettere, senza che porti ad errore sensibile, quando si scelga abbastanza piccola l'unità territoriale.

La rappresentazione geometrica di cui si parlava dianzi diventa allora una porzione di superficie piana su cui grava l'insieme discreto di punti pesanti costituito dai centri delle unità territoriali. Il peso di ciascun punto è dato dal numero degli abitanti contenuti nella rispettiva unità.

Si può quindi parlare di media aritmetica, o, con forma più espressiva, di centro di gravità della data popolazione; e similmente di centro mediano.

Siamo, in sostanza, ricondotti al caso di una seriazione a due dimensioni; le coordinate del centro di gravità, come abbiamo visto (n. 1), sono le medie aritmetiche ponderate delle coordinate dei punti, immagini delle coppie costituenti la seriazione data. Di modo che, basta infine considerare separatamente due seriazioni ad una dimensione, costituite dalle proiezioni dei punti del sistema su due assi cartesiani ortogonali, e determinare separatamente i centri di gravità delle due seriazioni ad una dimensione così ottenute (*).

Si può considerare un significato pratico che assumono gli anzi-detti centri di gravità delle due distribuzioni lineari situate sugli assi: si riconosce subito facilmente — nel caso che la rappresentazione piana del territorio sia ottenuta mediante una proiezione cilindrica equispaziata, come sempre qui supporremo — che essi rappresentano la latitudine e la longitudine alle quali vive, in media, la popolazione. Il centro di gravità di una popolazione è pertanto il punto di intersezione del meridiano e del parallelo che rappresentano la latitudine e la longitudine media a cui vive la popolazione.

Una variazione nella distribuzione della popolazione di un paese trae generalmente con sé lo spostamento del suo centro di gravità, il quale tuttavia non è relativo ad una sola distribuzione, ma ad infinite configurazioni aventi comune la caratteristica esposta nella definizione, e dipendenti dalle diverse combinazioni dei due elementi: numero degli individui e loro posizione sul territorio considerato.

Nel caso in cui la popolazione fosse uniformemente distribuita sul territorio considerato, il centro di gravità, relativo a questa distribuzione, coinciderebbe naturalmente con quello del territorio, ove si prescindesse dalla sua corografia, cioè si supponesse piano, rigido, di densità uniforme.

Analogamente, nello stesso caso, il centro mediano della popolazione coinciderebbe con quello del territorio.

A proposito del centro mediano della popolazione di un paese, si noti che è sufficiente, per i nostri scopi, determinare una re-

(*) Cfr. C. GINI e L. GALVANI, *Di talune estensioni*, ecc., già cit.

gione piana, alquanto ristretta (uguale all'unità territoriale scelta per il calcolo pratico) tale che sia minima rispetto alle regioni circostanti la somma delle distanze del suo centro da tutti gli altri punti della distribuzione.

3. — *Cenno sui vari sistemi di proiezione che si possono impiegare per la rappresentazione piana della superficie terrestre.* — Naturalmente il risultato dell'accennato calcolo del centro di gravità, è esatto e corrisponde alla definizione solo se inteso in relazione alla data rappresentazione piana. È ovvio, infatti, che al cambiare di questa, il risultato cambi e che esista corrispondenza tra la definizione e la determinazione solo quando sia fissata una certa rappresentazione piana. Non va, tuttavia, dimenticato che la superficie terrestre non è una superficie sviluppabile sopra un piano.

Altrettanto dicasi per il centro mediano.

Nella rappresentazione piana del globo terrestre s'incontrano, com'è noto, varie difficoltà: per la natura medesima della superficie da rappresentare non è possibile ridurre in egual proporzione tutte le distanze, cioè non esistono proiezioni isoperimetre; non è neppure possibile mantenere ad un tempo la proporzione delle aree e l'uguaglianza degli angoli. Per la costruzione di queste rappresentazioni piane, numerose proiezioni, dette compensative, furono ideate, in cui separatamente le aree o gli angoli risultano inalterati, mentre, in certo senso, i differenti errori degli elementi alterati si compensano.

Non è compito del presente lavoro esaminare di proposito le diverse proiezioni immaginate; basti soltanto accennare che il criterio di scelta non è assoluto e dipende da molti fattori: dalla grandezza e dalla posizione della regione che si considera, dall'uso a cui deve servire la carta, dalle caratteristiche che questa deve avere; sicchè la preferenza ad un sistema non è facile ad accordarsi in modo pienamente soddisfacente.

Si può talvolta, appunto in vista dello scopo a cui la rappresentazione deve servire, evitare una certa specie di errori e tollerarne altri.

Se si desidera che l'area di ciascuna regione considerata sia proporzionale a quella reale, cioè se non si vogliono commettere errori di area, si adoperano proiezioni equivalenti, che però non conservano gli angoli. Se interessa invece che le regioni conservino, nella rappresentazione, la stessa figura e gli stessi contorni che hanno in realtà,

si useranno le proiezioni conformi (o isogoniche), che però non conservano le aree.

Per i nostri scopi le proiezioni più usate sono quelle coniche e quelle cilindriche, che in particolare possono, sia le une che le altre, essere o equivalenti o isogoniche.

Per la determinazione del centro di gravità della popolazione e del territorio italiano è stata adoperata la proiezione cilindrica equispaziata, generalmente a maglie quadrate coi lati di 15', come si vedrà più oltre.

La deformazione portata da questa proiezione è molto forte nelle regioni polari, minore però che nella proiezione cilindrica equivalente; ma per le zone abbastanza vicine all'equatore il risultato che si ottiene è soddisfacente.

Il «Census Bureau», degli U.S.A., per la rappresentazione piana del territorio americano, ha invece adoperata la proiezione conica detta centrale prospettiva (con un cono tangente alla latitudine di 30°).

In essa due successivi paralleli e meridiani distano di 1°, di modo che il territorio degli Stati Uniti venne diviso in larghi trapezi. Mentre, a causa della grande estensione di questo Paese e della speciale sua configurazione (estensione uniforme e senza molte frastagliature), si sente quasi l'opportunità di usare unità di superficie abbastanza grandi, questo sistema può tuttavia condurre ad inconvenienti non trascurabili: tale, per esempio, la poca verosimiglianza del riguardare come uniforme la distribuzione della popolazione in ciascuna unità territoriale. La scelta di larghe unità ha dato anche luogo ad una maggiore laboriosità di calcoli, poichè si è palesata la necessità di eseguire preventivamente il calcolo o la stima del centro di popolazione di ciascuna unità, e di considerare separatamente le grandi città perchè queste avrebbero portato ad uno spostamento del centro di gravità del trapezio dal suo centro di figura.

Usando invece unità territoriali notevolmente più piccole, è presumibile che senza inconvenienti si potrà pensare addensata nel centro di figura di ciascuna di esse la corrispondente popolazione. Il dovere operare sopra unità più numerose sarà largamente compensato dalla possibilità di esimersi dalla stima del centro di popolazione di ciascuna.

Per gli Stati Europei, anche prescindendo dalla minore esattezza nei risultati, data la loro piccola estensione e la loro forma irregolare, non sarebbe stato possibile adottare il sistema dei larghi trapezi. Siffatte unità territoriali sarebbero state infatti contenute intere,

nel paese considerato, soltanto un numero di volte assai ristretto e si sarebbero dovute troppo spesso frazionare le unità originando complicazioni evidenti.

Con speciale riguardo alla Penisola Italiana, di forma irregolarissima, di estensione relativamente non grande e di configurazione orizzontale assai frastagliata, era evidente che male le si addicesse una unità di superficie alta circa 111 km. e larga circa 82 km. alla latitudine media, una unità di superficie, cioè, di circa 9 mila km², che avrebbe costituito quasi un trentesimo dell'area totale del Regno entro gli antichi confini. Che l'unità adottata ora sia sufficientemente piccola è dimostrato anche dal fatto che un trapezio di 15' di lato, alla latitudine media italiana, ha una superficie di circa km² 570, superficie che è sorpassata soltanto da quella di 6 comuni italiani (*).

4. — *Applicazioni pratiche dei vari centri e loro importanza.*

Il centro mediano e il centro di gravità che, in contrapposto a quello mediano, possiamo denominare centro medio aritmetico o, per antonomasia, centro medio, forniscono ambedue, per quanto da punti di vista diversi, un indice sintetico della distribuzione della popolazione sopra un territorio supposto piano.

Ed invero cotesti indici, per loro natura, sono strettamente connessi al modo di distribuirsi della popolazione del Paese considerato. Onde l'esame del movimento secolare dei due centri in corrispondenza ai risultati dei successivi censimenti, e riferiti sempre alla stessa rappresentazione piana del territorio, può rendere palese, oltre che l'effetto delle modificazioni territoriali dovute a cause politiche, i lenti movimenti di massa della popolazione e il diverso accrescimento naturale delle varie regioni che costituiscono il territorio medesimo.

Dal punto di vista pratico, le applicazioni che richiedono l'uso dell'uno o dell'altro centro, possono variare a seconda dei diversi aspetti che giova considerare nel fenomeno in esame.

a) L'utilità dal calcolo del centro mediano si manifesta in molteplici circostanze concrete: da quelle particolari e ristrette a quelle di portata assai più generale e tali da interessare un intero popolo.

Per accennare a qualcuna delle prime, è evidente, per es., che

(*) Essi sono, in ordine di grandezza decrescente: Roma, Tempio Pausania, Ravenna, Noto, Cerignola e Sassari.

nella scelta del posto di installazione di una officina di distribuzione elettrica, è di massima importanza tener conto della distanza complessiva da tutti i punti che debbono essere alimentati dalla detta officina. Ciò riduce, infatti, le spese di impianto, le perdite di energia per irradiazione (effetto Joule), ecc. Altrettanto potrebbe ripetersi per una centrale telefonica.

Per una città che, avendo raggiunto un grande sviluppo, possa quindi ritenersi territorialmente stazionaria, può assumere grande importanza il problema della più razionale ubicazione di fondamentali servizi pubblici, i quali, per essere tali, debbono appunto rispondere allo scopo della massima e pronta loro utilizzazione da parte dei cittadini. Fra i tanti basti ricordare, ad es., la caserma dei vigili del fuoco.

A tale proposito non è inutile osservare che se i concetti di cui ora si espongono le applicazioni, uscissero dalla cerchia degli studiosi per penetrare in quella degli uomini di azione come sono coloro, ad es., cui incombe l'esame delle innovazioni da apportare nei piani regolatori delle grandi città, vari errori e inconvenienti, tanto spesso lamentati, sulla distribuzione poco razionale degli edifici e dei luoghi di più frequente e obbligato convegno (sede dello Stato Civile, tasse e imposte, mercato, ecc.) finirebbero, con evidente vantaggio della collettività, per essere eliminati.

Il luogo, dal punto di vista strategico, più importante in cui potrebbe installarsi un campo di difesa anti-aerea, e quello di convegno più conveniente per una effettiva adunata della popolazione, offrono altri esempi nei quali la localizzazione del centro mediano assume palese importanza.

Negli Stati federali ha spesso prevalso il concetto che nessuna delle città esistenti debba avere il privilegio di divenire la capitale, e nessuno degli Stati debba comprenderla nel proprio territorio, cosicchè una nuova città debba essere edificata in un territorio che non appartenga a nessuno Stato (territorio neutrale). Il MARINELLI (*) ricorda che nel 371 avanti l'E. V. la Lega Arcadica fondò Megalopoli, uniformandosi appunto a questi concetti, e analogamente nel 1793 gli Stati Uniti costruirono Washington in un territorio che quasi coincideva con il loro centro di popolazione e trasferirono ivi la capitale da Filadelfia.

(*) O. MARINELLI. *L'Italia demografica e il suo centro di popolazione in «Curiosità geografiche»*, pag. 150.

Il problema di scegliere una posizione centrale dove far sorgere la capitale si presenta di frequente nei paesi giovani che, con l'estendersi della colonizzazione, vengono via via a trovarsi saturati di popolazione nelle prime zone occupate. Infatti non esistono per essi tutti i motivi storici e le tradizioni che quasi unicamente e fortemente influirono nei paesi di antica civiltà sulla scelta della capitale. È naturale, quindi, che la scelta, dovendo rispondere solo a più semplici scopi amministrativi, debba avere il requisito di rendere minima la somma complessiva delle distanze da tutti gli altri punti.

In tali casi si presenta il problema di fissare il punto in cui dovrebbe, teoricamente, trovarsi la capitale di un paese in modo che la sua distanza media dagli abitanti, e praticamente dai luoghi abitati, fosse ridotta al minimo.

È evidente allora che occorre cercare un punto mediano, e non un punto medio. L'applicazione anzidetta si è presentata realmente, non molti anni fa, nel Brasile per la scelta della sede di una capitale federale.

Anche Canberra, capitale federale del Commonwealth dell'Australia, è stata costruita con il criterio anzidetto.

Il concetto di mediana (e anzi di longitudine mediana) si può pure applicare quando si voglia rendere minimo il divario tra l'ora astronomica e l'ora legale per gli abitanti distribuiti sul territorio di una vasta regione.

L'ora astronomica dipende soltanto dalla longitudine: si deve quindi determinare la longitudine mediana, cioè una longitudine tale da rendere minima la somma ponderata degli scarti, in valore assoluto, tra la longitudine degli abitanti e questa longitudine mediana.

b) Per quanto concerne le applicazioni del centro medio può dirsi che a volte si presentano fenomeni nei quali alcune grandezze da essi dipendenti crescono in ragione assai più rapida di quella che sarebbe espressa da una relazione in cui entrasse, ad es., la semplice distanza.

Così, per fare un caso, nel viaggio che gli abitanti di luoghi diversi debbono compiere per recarsi in un dato punto di convegno, la spesa e il disturbo da ciascuno di essi incontrati debbono evidentemente considerarsi crescenti in ragione più forte della distanza percorsa. Se può assumersi che l'una e l'altro aumentino in ragione del quadrato della distanza stessa, risulta rispondente l'uso del centro medio, che rende appunto minima la somma dei quadrati delle distanze.

L'uso di questo centro, oltre che da ragioni intrinseche, dipendenti dalla natura del fenomeno considerato, è spesso consigliato dalla facilità del suo calcolo e quest'ultimo fatto è decisivo a volte anche quando lo scopo concreto renderebbe più appropriato il calcolo del centro mediano.

Esaminata nei suoi concreti aspetti l'utilità delle molteplici applicazioni dei concetti di centro medio e di centro mediano di una popolazione, è bene fare anche un accenno di quella, non meno feconda, presentata dai concetti analoghi relativamente ad un territorio.

Il centro medio e il centro mediano di un territorio coincidono con gli analoghi della popolazione quando si supponga che essa sia uniformemente distribuita sopra il territorio stesso. La considerazione dei centri di territorio risulta opportuna quando si pensi alla utilità della loro determinazione, quale complemento a quella dei centri di popolazione per tutti i fenomeni che sono funzioni non solo della popolazione, ma anche della superficie territoriale.

Ove si rifletta, invero, alla utilità e all'importanza che dal punto di vista economico-sociale rivestono i confronti che si volessero istituire fra i centri di un dato territorio e quelli della popolazione che sopra quel territorio vive, e l'importanza che anche da un punto di vista politico può rivestire la determinazione quantitativa delle variazioni intervenute in un paese (nella sua struttura geografica e nella distribuzione dei suoi abitanti) in conseguenza di territori aggregati o distaccati dal paese stesso, non v'è chi non veda come il calcolo degli indici in questione, sia assai lungi dal costituire, come si è già detto, una semplice curiosità scientifica.

5. — *Centri di fenomeni connessi con la distribuzione della popolazione in un territorio.* — L'uso di tali indici si rileva poi particolarmente fecondo di risultati quando le indagini concernono i numerosi fenomeni (fra i quali, ad esempio, le nascite e le morti) per loro natura strettamente connessi con la distribuzione della popolazione in un territorio.

È chiaro infatti che, se gli abitanti contribuissero tutti in eguale misura a produrli, il centro (medio o mediano) di tali fenomeni coinciderebbe con il centro della popolazione. Così, se alle nascite e alle morti tutti gli abitanti di un paese partecipassero in maniera uniforme, il centro (medio o mediano) delle nascite e delle morti, cal-

colato analogamente al centro di popolazione, coinciderebbe con quest'ultimo. Uno spostamento verso il Nord o verso il Sud, o verso un'altra qualsiasi direzione, starebbe appunto ad indicare una maggiore fecondità, o, rispettivamente, mortalità degli abitanti del Nord, del Sud o di quella qualsiasi altra direzione. Del pari, se le condizioni di istruzione, di ricchezza, di attitudini, e via dicendo, di un paese, fossero uniformi e si volesse, ad es., determinare il centro della stampa periodica, calcolato nello stesso modo, esso coinciderebbe col centro della popolazione. Uno spostamento del centro della stampa periodica, rispetto al centro della popolazione, rivelerebbe, indirettamente, la differenza di istruzione, di ricchezza, di attitudini, degli abitanti delle varie zone del paese. Possiamo pertanto desumere, in modo sintetico, dal confronto della posizione dei centri di tutti quei fenomeni economico-sociali che, colla distribuzione degli abitanti sul territorio hanno più o meno diretta attinenza, la varia partecipazione degli abitanti delle diverse zone del Paese a quei fenomeni.

6. — *Latitudine e longitudine media ; latitudine e longitudine mediana.* — Abbiamo visto — assumendo come rappresentazione piana del territorio la proiezione cilindrica equispaziata — che il centro medio della popolazione si determina praticamente come intersezione del parallelo e del meridiano che rappresentano la latitudine e la longitudine media a cui vive la popolazione. Vediamo ora quale significato possano avere, considerate a sè, la latitudine e la longitudine media. Intanto, dalla definizione stessa di centro di gravità deriva che le coordinate medie della popolazione determinano rispettivamente il meridiano ed il parallelo che, nella detta rappresentazione piana, dividono ciascuno in due parti di uguale momento assoluto il territorio supposto piano, rigido e senza peso, su cui sono distribuiti i relativi abitanti, supposti tutti ugualmente pesanti.

Dal punto di vista analitico, e riferendoci alla solita distribuzione dei punti sul piano, è facile stabilire il significato delle due rette ora dette. Interpolando, infatti, col metodo dei minimi quadrati la distribuzione data con una retta parallela all'equatore, otterremo il parallelo a cui vive, in media, la popolazione. In modo analogo la longitudine media può interpretarsi come la retta, parallela al meridiano preso per origine, e interpolatrice della distribuzione data col metodo dei minimi quadrati. L'incontro di queste due rette

individua il centro medio per il quale passano tutte le altre rette interpolatrici nelle varie direzioni secondo il concetto dei minimi quadrati. Consideriamo diverse di queste rette, parallele a diverse direzioni date: a ciascuna di esse è associato uno scostamento quadratico medio: e due ne esistono, ortogonali fra di loro, delle quali l'una dà luogo allo scostamento quadratico medio minimo, l'altra al massimo.

È noto dalla teoria dei momenti d'inerzia che queste due rette coincidono con gli assi del così detto ellisse d'inerzia.

Come sarà veduto nel seguito del lavoro, di questo concetto è stata fatta dal LINDERS (*) una applicazione pratica alla popolazione della Svezia.

Ai fini di talune indagini può essere inoltre utile considerare, in luogo delle coordinate medie della popolazione, quelle che si possono dire le coordinate mediane. Queste si definiscono come le coordinate del punto d'intersezione di quel certo meridiano e di quel certo parallelo che dividono, ciascuno, in due parti ugualmente numerose, la popolazione di un dato territorio.

Più in generale, sulla rappresentazione piana di un certo territorio esistono infinite coppie di rette ortogonali bisecanti la popolazione in parti ugualmente numerose, e precisamente una coppia in corrispondenza a ogni direzione del piano, se il sistema dato si suppone continuo. *Il punto comune alle due rette di ciascuna coppia ortogonale varia generalmente da coppia a coppia.*

Se, invece, il sistema è discontinuo, fissata una direzione nel piano esistono in generale infinite rette mediane aventi la data direzione e che appartengono ad una certa striscia entro la quale non cadono punti del sistema; in tal caso quindi esistono in corrispondenza a ciascuna direzione del piano, infinite coppie di rette mediane ortogonali e non si può parlare a rigore di *un* punto d'intersezione.

La molteplicità di coppie di rette mediane in corrispondenza a una certa direzione si può tuttavia eliminare mediante convenzioni analoghe a quelle che si assumono per rendere univoca la definizione di mediana in una distribuzione lineare.

Supponiamo che il sistema sia continuo; fissata una direzione d_1 ,

(*) A. F. LINDERS. *Ueber die Berechnung des Schwerpunkts und der Trägheitsellipse einer Bevölkerung*. «Atti del Congresso Internazionale per lo studio dei problemi della popolazione». Roma, 1931.

sul piano, sia m_1 la mediana del sistema di direzione d_1 , e m'_1 la mediana normale a questa. Indichiamo con O_1 il punto d'intersezione delle rette m_1 e m'_1 . Se con O_2 indichiamo il punto d'intersezione delle mediane m_2 e m'_2 , coordinate alla direzione $d_2 \mp d_1$, in generale, come si è detto, O_2 risulta distinto da O_1 .

Consideriamo, per esempio, un sistema costituito da tutti i punti di un cerchio; se è O il centro del cerchio e OA la semiretta, origine del sistema polare di riferimento, sia $K \alpha^2$ la densità costante delle masse del sistema situate sui raggi vettori di coordinate angolari $+\alpha$ e $-\alpha$. La retta OA costituisce la mediana del sistema nella direzione $\alpha = 0$. La mediana di direzione $\alpha = \frac{\pi}{2}$, associata alla precedente, la incontra in un punto O_1 situato, rispetto a O , dalla banda opposta di A . La mediana in una direzione generica α interseca la OA in un punto compreso tra O e O_1 . Al crescere di α da O a $\frac{\pi}{2}$, tale punto d'intersezione percorre con continuità il segmento OO_1 ; al crescere di α da $\frac{\pi}{2}$ a π , esso percorre il segmento in senso opposto da O_1 ad O . Quest'ultima proposizione risulta subito dalla considerazione della mediana di direzione $\alpha' = \alpha - \pi$, nel caso in cui $\alpha > \frac{\pi}{2}$, data la simmetria del sistema rispetto alla retta OA .

Ciò posto, consideriamo una direzione generica, ad es. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. La mediana m_2 avente tale direzione interseca la OA in un punto \bar{O} compreso tra O e O_1 . La m'_2 corrisponde al valore di $\alpha = \frac{4\pi}{6}$, essa interseca la OA nello stesso punto nel quale questa è intersecata dalla $\alpha = \frac{2\pi}{6}$, quindi in un punto compreso tra \bar{O} e O_1 . Ne segue che le rette m_2 e m'_2 s'intersecano in un punto O_2 situato fuori della OA .

Il MARINELLI ha proposto di chiamare il punto O , quando le direzioni scelte sono quelle dei meridiani e dei paralleli « centro di simmetria », ma questa denominazione sembra poco opportuna in quanto non si tratta effettivamente di un centro, ma del punto d'intersezione di due mediane ortogonali, che in generale cambierebbe qualora fossero scelte altre direzioni.

Infine il detto punto di intersezione del meridiano mediano col parallelo mediano, è stato fin qui designato nelle pubblicazioni del « Census Bureau » degli Stati Uniti come « median point », benchè esso sia evidentemente tutt'altra cosa dal centro o punto mediano.

Il punto di inserzione delle coordinate mediane è stato considerato anche dal MENDELEIEFF (cfr. n. 1), che lo ha chiamato, per quanto impropriamente, centro mediano.

7. — *Linee mediane e linee medie.* — In pratica oltre che la considerazione delle rette mediane può servire quella delle linee mediane della popolazione o del territorio.

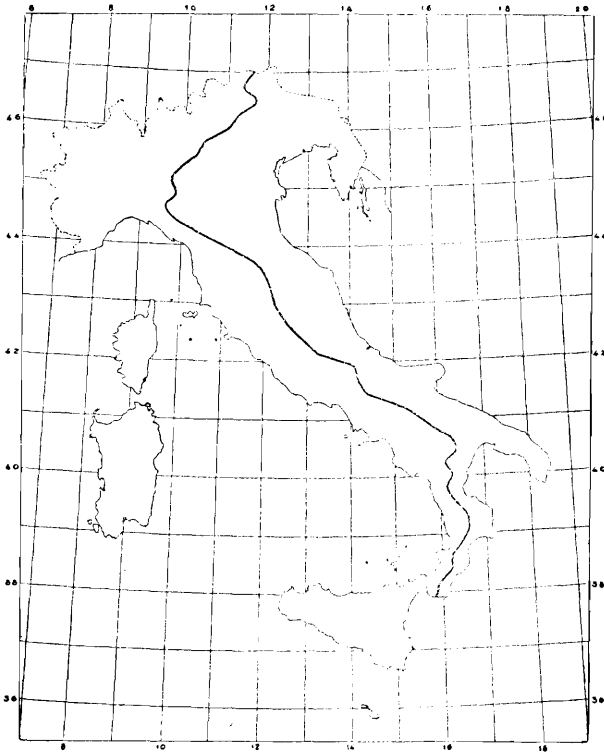


Fig. 1.

Definiremo linea mediana connessa ad una direzione data quella linea che ha la stessa proprietà delle rette mediane, non solo rispetto all'intera popolazione, ma anche rispetto alla popolazione compresa in qualunque striscia (infinitesima) di territorio avente la

direzione assegnata. L'andamento della linea mediana della popolazione o del territorio che deve essere servito da una strada, una ferrovia, un acquedotto, ecc., costituisce uno degli elementi determinativi del tracciato. La fig. 1 rappresenta, per la nostra Penisola, la linea mediana coordinata alla direzione dei paralleli.

In taluni casi potrebbe essere opportuno considerare invece della linea mediana la linea media relativa a una certa direzione, che si definirebbe analogamente come insieme dei punti medi delle popolazioni comprese nelle striscie (infinitesime) parallele a quella direzione.

APPLICAZIONI AD ALCUNE POPOLAZIONI E AD ALCUNI TERRITORI.

Centro di gravità.

8. — *Cenni storici.* — Risalendo nel tempo si trovano molti esempi di popoli e di città che pretesero di trovarsi nel centro del mondo o del loro paese.

« Così — scrisse il MARINELLI (*) — il nostro pensiero corre spontaneamente a quell'ombelico di pietra che, nel tempio di Delfo, segnava il centro della Grecia, e, nello stesso tempo, del mondo intero. In America, nello Stato del Dakota settentrionale Fargo, « the biggest little city in the World », possiede l'Ogden Monument che indicava la ubicazione del centro geografico degli Stati Uniti, e a Cuzco, capitale del Perù precolombiano, si adorava un ombelico che indicava il centro dell'Impero degli Inca e del mondo. In Egitto, in una moschea del Cairo, i Mussulmani venerano l'ombelico della Terra ».

E potrebbero trovarsi numerosi altri esempi.

Naturalmente questi pretesi punti centrali precedettero la scoperta della sfericità della terra ebbero origine, oppure dalla ignoranza di questo fatto, poichè posta tale sfericità, il centro veniva ad essere trasportato in profondità ; alla superficie ogni città poteva ugualmente considerarsi un centro del mondo. Venuta meno la ragione a tale genere di ricerche, le indagini degli studiosi da allora si volsero alla determinazione, sulla superficie terrestre, del centro di questa o di quella regione. La Sicilia ebbe, in tal modo, il suo centro che può dirsi tracciato dalla natura stessa : nel Lago di Pergusa o Castrogiovanni. Anche l'Italia, e se ne ha notizia dalla Storia natu-

(*) O. MARINELLI. *Curiosità geografiche*, 1928, pag. 21 e segg.

rale di Plinio, lo ebbe presso il Lago di Cutilia (oggi Paterno) non lontano da Cittaducale, nel territorio di Rieti. Probabilmente Plinio ne ebbe notizia dal reatino Varrone, che presumibilmente determinò il centro d'Italia ammettendo il concetto che esso dovesse trovarsi sulla linea mediana della Penisola. Per determinare allora la sua posizione, bastava stabilire dove cadesse la metà della lunghezza della linea stessa (*).

Plinio c'informa anche fra quali estremi gli antichi determinassero la lunghezza d'Italia, poichè ci indica che questa raggiunge fra Aosta e Reggio, 1.020 miglia, lunghezza alquanto esagerata, derivata probabilmente dall'aver fatto il computo basandosi sulla lunghezza delle strade, le quali non erano rettilinee.

Il Lago di Cutilia, poi, è posto quasi esattamente a metà distanza fra la sponda tirrenica e quella adriatica.

Il problema potè risorgere nel Medio Evo, per la considerazione del centro della Terra emersa, la « gran secca » di DANTE, supposta agglomerata in un solo emisfero, e per il fatto che tornavano ad essere accettati, per l'autorità della tradizione, i concetti geografici primitivi riportati nella Bibbia.

Per tacere di quanto è stato scritto nel periodo ulteriore, negli anni più prossimi a noi, numerose pubblicazioni riguardanti vari centri di popolazione, le loro definizioni e le loro proprietà, si sono diffuse fra gli studiosi e hanno destato nuovo interesse per questo argomento.

9. — *Stati Uniti d'America.* — La determinazione del centro di gravità della popolazione apparisce — riteniamo per la prima volta — nei volumi del censimento degli Stati Uniti del Nord America sin dal 1910 (*Thirteenth Census of the United States*, 1910, vol. I).

I centri di gravità riportati nel citato volume si riferiscono alla popolazione data dai censimenti succedutisi dal 1790, ed il calcolo di essi ebbe anche lo scopo di fornire un indice del variare della distribuzione territoriale degli abitanti. Le successive determinazioni del centro di gravità degli Stati Uniti d'America acquistano particolare importanza ove se ne consideri il nesso col processo storico di popolamento di questo vasto paese. Tale processo di popola-

(*) Cfr. anche: VIRGILIO, *Aen.* Lib. VII, v. 564 e seguenti; come pure: P. CARRERA, *Saggio topografico politico economico di tutto il distretto allodiale di Città Ducale*, Aquila 1788.

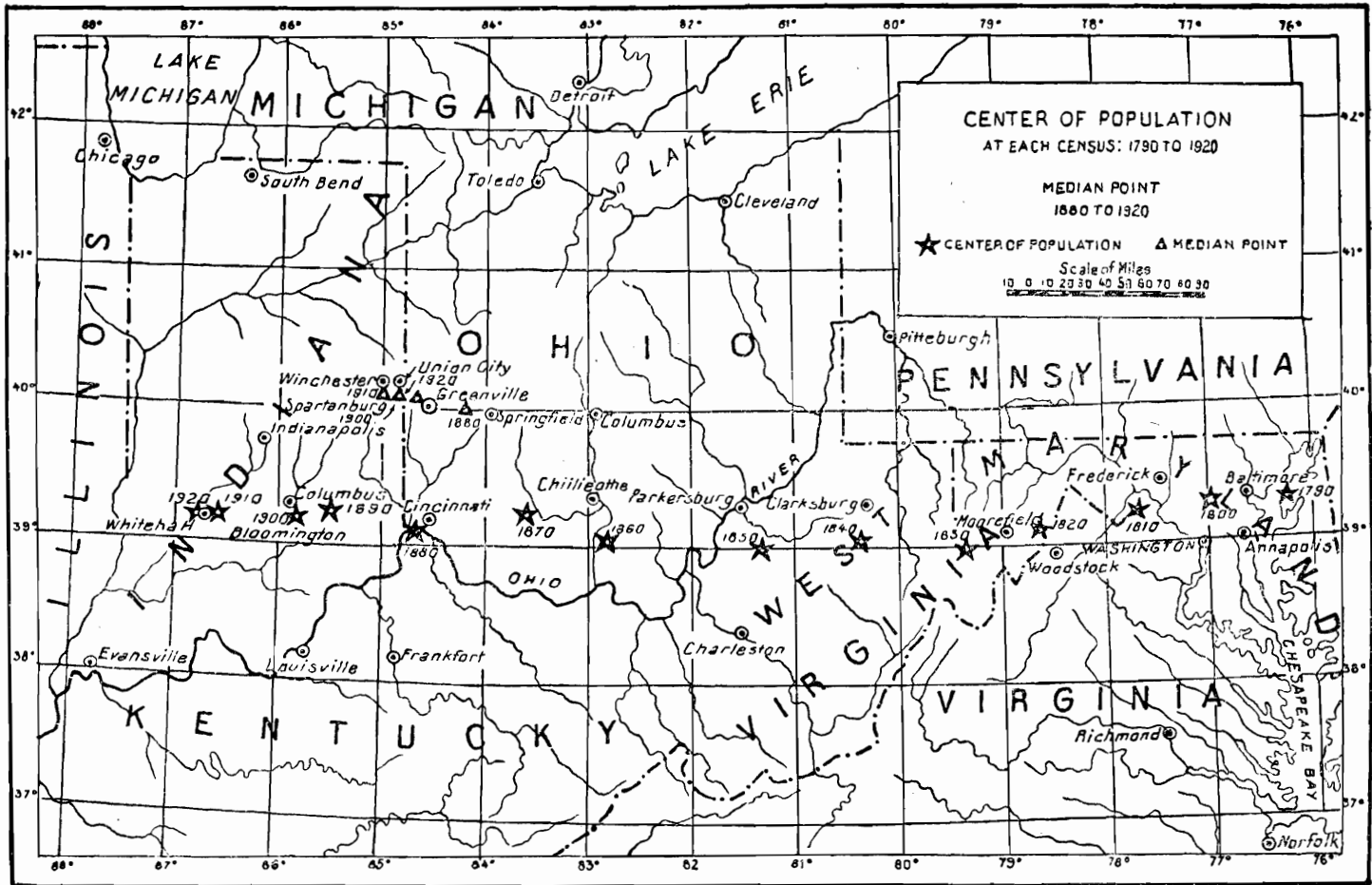


Fig. 2.

mento dovuto, come è noto, in gran parte alla immigrazione da parte della popolazione degli Stati Europei, ebbe inizio negli Stati verso l'Atlantico, e, con la saturazione di questi ultimi, proseguì verso le regioni del centro per concludersi nel lontano occidente.

Ora, i centri di gravità calcolati nelle diverse epoche, pur mantenendosi all'incirca sul medesimo parallelo, il 39°, si sono venuti successivamente spostando da Est ad Ovest, dando così una chiara idea dell'accennato processo. (V. Fig. 2, riportata dalla Relazione del Censimento 1920). Nel metodo adoperato dal « Bureau of the Census » ed esposto nel citato volume, si suppone dapprima provvisoriamente il centro nel punto di incrocio di un meridiano e di un parallelo assunti come assi dei momenti, e si determina poi la correzione, in longitudine e in latitudine, da apportare al meridiano e al parallelo presi come assi per ottenere il centro di gravità.

Divisa la superficie degli Stati Uniti in aree limitate da meridiani e paralleli consecutivi, alla distanza di un grado, ossia in trapezi di lato eguale a un grado, si determina la popolazione contenuta nella superficie limitata dal perimetro di ciascuno di essi.

Si suppone poi, che il centro di gravità della popolazione di ogni trapezio cada nel suo centro di figura, a meno che ciò non sia manifestamente inammissibile, nel qual caso il centro è stimato nel modo più approssimato possibile.

È chiamato momento Nord, e rispettivamente momento Sud, il prodotto della popolazione di una data area per la sua distanza misurata in minuti di arco, dal parallelo fissato, secondo che quest'area sia situata a Nord o a Sud del parallelo stesso. Analogamente si definiscono i momenti Est ed Ovest, con la differenza però che questa volta le distanze dal meridiano sono necessariamente misurate in miglia a causa della diversa lunghezza dei gradi e dei minuti alle diverse latitudini. Nelle elaborazioni del « Census Bureau » non è, invero, applicata la proiezione cilindrica equispaziata, come è nel seguito fatto per alcune applicazioni alla popolazione italiana.

La popolazione delle principali città, dedotta da quella del rispettivo trapezio, viene considerata a parte: si ripete per esse l'analogo calcolo.

Si determinano infine le differenze tra la somma dei momenti Nord e quella dei momenti Sud, tra la somma dei momenti Est e quella dei momenti Ovest; poi, dividendo ciascuna delle due differenze per il totale della popolazione, si ottengono le correzioni che si debbono apportare rispettivamente alla latitudine e alla longitu-

dine, assunte provvisoriamente come latitudine e come longitudine media.

L'Alaska ed i territori staccati dalla Confederazione non sono stati considerati.

I centri ottenuti per la popolazione esistente alla fine di ogni decennio, dal 1790 al 1920, sono i seguenti:

TAV. I.

Coordinate del centro di gravità della popolazione degli Stati Uniti del Nord America dal 1790 al 1920.

ANNI	Coordinate del centro di gravità		ANNI	Coordinate del centro di gravità	
	Latitudine Nord	Longitudine Est		Latitudine Nord	Longitudine Est
1790	39° 16' 30"	76° 11' 12"	1860	39° 0' 24"	82° 48' 48"
1800	39° 16' 6"	76° 56' 30"	1870	39° 12' 0"	83° 35' 42"
1810	39° 11' 30"	77° 37' 12"	1880	39° 4' 8"	84° 39' 40"
1820	39° 5' 42"	78° 33' 0"	1890	39° 11' 56"	85° 32' 53"
1830	38° 57' 54"	79° 16' 54"	1900	39° 9' 36"	85° 48' 54"
1840	39° 2' 0"	80° 18' 0"	1910	39° 10' 12"	86° 32' 20"
1850	38° 59' 0"	81° 19' 0"	1920	39° 10' 21"	86° 43' 15"

10. — *Russia*. — In una recente pubblicazione russa, del Laboratorio centografico D. I. MENDELEIEFF (*) divulgata a scopo di celebrazione di un quindicennio di attività dell'Istituto stesso (ottobre 1917-1932), viene fatta menzione di un'opera del geografo D. I. MENDELEIEFF (*Contributo alla cognizione della Russia*, 7^a ediz. 1912).

In tale opera, che non ci è però stato possibile consultare, questo Autore ricorda i metodi impiegati negli Stati Uniti per la determinazione dei centri, e calcola egli stesso per la Russia i centri di gravità relativi al territorio, alla popolazione e ad altri fenomeni. L'A. ha opportunamente tenuto conto della circostanza che un territorio così vasto come quello della Russia non può essere riguardato come

(*) *Centrografia I*, Leningrado 1933; il lavoro è corredato da una bibliografia, non completa però: non è fatta menzione di nessuno dei lavori italiani precedentemente apparsi.

piano. Perciò egli ha considerato il problema di determinare il centro di gravità per una distribuzione di masse (popolazione) sopra la superficie terrestre, supposta sferica, intendendo per tale il punto in cui la risultante dei pesi applicati ai diversi punti della distribuzione considerata incontra la superficie terrestre. Con semplici considerazioni di trigonometria sferica egli ha trovato, indicando con Λ e Φ la longitudine e la latitudine del centro di gravità, con N il peso o popolazione totale, con $\lambda_i, \varphi_i, n_i$ la longitudine, la latitudine e il peso o popolazione di ciascun elemento della distribuzione :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} N \cos \Phi \cos \Lambda = \sum n_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ N \cos \Phi \sin \Lambda = \sum n_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ N \sin \Phi = \sum n_i \sin \varphi_i \end{array} \right.$$

dalle quali equazioni è facile ricavare Λ e Φ .

Successivamente un altro russo, il WEINBERG, ha proposto per il calcolo delle coordinate del centro di gravità le formule seguenti :

$$(2) \quad \Phi = \frac{\sum n_i \varphi_i}{\sum n_i}, \quad \Lambda = \frac{\sum n_i \lambda_i \cos \varphi_i}{\sum n_i \cos \varphi_i}.$$

Infine il Laboratorio centografico D. I. MENDELEIEFF (*) ha applicato alla determinazione dei molteplici centri di gravità relativi alla U. R. S. S., sia per l'intero territorio che per le sue grandi circoscrizioni, due formule (SWIATLÓWSKI), ottenute da quelle di WEINBERG, lasciando la prima invariata e sostituendo alla seconda la

$$\Lambda = \frac{\sum n_i \lambda_i S_i}{S_x \sum n_i},$$

dove S_i ed S_x sono la lunghezza di r° di parallelo alla latitudine φ_i e alla latitudine Φ .

(*) Si tratta di un Istituto di Stato di recente creazione, ma che ha già assunto ampie proporzioni e che si applica, per i più svariati fenomeni, specialmente economici, nella totalità e nei singoli territori dell'U. R. S. S., alla determinazione dei centri e dei loro spostamenti attraverso il tempo.

Non sarà privo di interesse riferire che il Laboratorio centografico comprende 10 sezioni, distribuite in due divisioni, delle quali la prima dedicata alle questioni generali e teoriche, e la seconda alle ricerche geoeconomiche.

Ci limitiamo a riportare queste due sole indicazioni :

Territorio U. R. S. S.	$\Lambda = 84,5$	(da Greenwich),	$\Phi = 56,9$
Popolazione	» (1926) $\Lambda = 47,0$	»	$\Phi = 51,7$

II. — *Confederazione Australiana.* — Per la popolazione dell'Australia, censita nel 1911 (*) sono stati calcolati il centro della popolazione e quello del territorio; però il KNIBBS, che ha pubblicato la relazione generale, non ha indicato il metodo seguito. Anche per 1921 (**), la relazione non dà alcun riferimento sul procedimento usato per la determinazione dei centri della popolazione e del territorio. Benchè nella relazione del 1911 manchi qualunque accenno alla definizione del centro di popolazione, data la competenza del KNIBBS, possiamo ritenere che il calcolo riguardi effettivamente il centro di gravità. Anche per il 1921 saremmo portati ad escludere ogni equivoco ed a ritenere che il calcolo fosse stato eseguito in modo analogo al 1911, se non avessimo riscontrato nei risultati riguardanti i centri territoriali una circostanza atta a suscitare qualche dubbio.

Dalla relazione del 1921 risulta infatti che tanto i centri del territorio dei vari Stati quanto quello del Commonwealth, variano dal 1911 al 1921. Fatta eccezione del « Federal Capital Territory », che nel 1911 era compreso nel « New South Wales », gli altri Stati non hanno subito variazioni di territorio, come ce lo attestano anche le carte annesse ai Volumi dei due censimenti e che riportano, oltre alla densità e ai centri di superficie e popolazione, la superficie di ciascuno Stato e quella totale del Commonwealth; non si riesce quindi a capire come il centro di un territorio rimasto invariato possa avere subito una diversa localizzazione. Può darsi tuttavia che il divario fra i due risultati sia originato da una diversità di procedimento, o da un diverso metodo di proiezione usato nella rappresentazione piana del territorio preso in considerazione: è da augurarsi che nei volumi del 1931 si espongano e la definizione e il modo di determinazione dei centri in questione. Poichè i dati relativi ai diversi

(*) *Census of the Commonwealth of Australia, taken for the night between the 2nd and 3rd april 1911*, Vol. I. Statistician's Report, Melbourne, 1917, p. 426.

(**) *Census of the Commonwealth of Australia, taken for the night between the 3rd and 4th april 1921*, Vol. II comprising parts XVII to XXIX of the Detailed Tables and Statistician's Report, pag. 365.

Stati non sono interamente confrontabili, crediamo opportuno riportare solo i risultati per l'intero Paese :

COORDINATE	Centro del territorio		Centro della popolazione	
	1911	1921	1911	1921
Latitudine Sud	25° 39'	25° 44'	33° 57'	33° 47'
Longitudine Est	134° 2'	134° 17'	145° 34'	145° 33'

12. — *India*. — Il volume XXV della serie relativa al Censimento indiano del 1921, il quale si riferisce allo Stato di Travancore (Trivandrum 1922), dà le seguenti coordinate del centro medio del territorio dello Stato.

Centro medio del territorio $\left\{ \begin{array}{l} 9^{\circ}25'40'' \text{ Lat. N.} \\ 76^{\circ}51'00'' \text{ Long. E (Greenwich).} \end{array} \right.$

Per gli Stati di Rajputana e Ajmer-Merwara, nel Vol. XXIV (Calcutta 1923) relativo pure al censimento del 1921, sono descritte le posizioni dei centri medi del territorio e della popolazione, senza peraltro indicarne le coordinate geografiche. Il centro di popolazione (1921) giaceva nella Provincia di Ajmer-Merwara (Ajmer Sub-Division) a 10 miglia a S E di Ajmer City; il centro del territorio era a circa 55 miglia ad Est di Jodhpur City.

Nel Vol. V relativo al censimento 1931 del Bengala e Sikkim (Calcutta 1933) è riportata la seguente tabella indicante le distanze in miglia del centro della popolazione, corrispondente alle epoche dei diversi censimenti, dal punto comune ai distretti di Jessore, Nadia e Faridpur. Tali distanze sono misurate nel senso dei meridiani e nel senso dei paralleli.

Anni	Centro della popolazione	
1872	S — 2,0	W — 7,2
1881	N — 0,3	W — 4,4
1891	S — 0,5	W — 1,6
1901	S — 0,5	W — 0,6
1911	N — 0,4	E — 1,9
1921	N — 0,4	E — 5,6
1931	S — 1,2	E — 7,0

Si trova inoltre :

Centro medio del territorio $\left\{ \begin{array}{l} 23^{\circ} 43' 24'' \text{ Lat N;} \\ 89^{\circ} 28' 30'' \text{ Long E.} \end{array} \right.$

13. — *Giappone*. — La determinazione del centro di gravità della popolazione è stata fatta anche per una parte del territorio giapponese (Hokkaido) da K. TAKAOKA (*).

I calcoli (in numero di 12) sono stati eseguiti relativamente alle popolazioni dall'anno 1869 al 1925, per intervalli di 4 o 5 anni. Il metodo adoperato non è proprio quello usato dagli americani, per il fatto che le statistiche giapponesi non permettono di ottenere le cifre occorrenti al calcolo per i distretti fittizi in cui gli americani dividono il territorio, e perchè Hokkaido ha una superficie ben più limitata di quella degli Stati Uniti.

Per unità territoriali si sono prese le più piccole circoscrizioni amministrative, e cioè i Comuni e le città, e come centro di gravità di queste unità il luogo in cui è situato il Municipio.

I risultati sono esposti nella tabella che segue.

TAV. II.

*Coordinate del centro di gravità
della popolazione di Hokkaido (Giappone) dal 1869 al 1925.*

ANNI	Popolazione	Coordinate del centro di gravità della popolazione	
		Latitudine Nord	Longitudine Est
1869	58.467	42° 6' 20"	140° 39' 30"
1873	171.491	42° 19' 40"	140° 41' 40"
1881	240.391	42° 18' 50"	140° 57' 0"
1886	303.746	42° 29' 40"	140° 57' 15"
1890	427.128	42° 35' 55"	141° 7' 45"
1894	616.650	42° 40' 30"	141° 16' 10"
1898	853.251	42° 48' 0"	141° 22' 0"
1902	1.045.831	43° 0' 0"	141° 26' 30"
1907	1.300.079	43° 0' 49"	141° 40' 50"
1912	1.739.099	43° 4' 31"	141° 34' 36"
1920	2.359.183	43° 10' 38"	141° 55' 34"
1925	2.498.679	43° 9' 40"	141° 55' 30"

dal 1869 al 1912 = Popolazione residente

dal 1920 al 1925 = Popolazione presente

(*) *Der Schwerpunkt der Bevölkerung (Center of population) Hokkaido, Japan*. XIX Session de l'Institut International de Statistique, Tokio, 1930.

L'esame della tabella mostra che il centro di gravità della popolazione di Hokkaido si è mosso sempre verso Nord-Est, lungo la linea che, partendo dal punto di incontro del 42° parallelo col meridiano $140^{\circ}30'$, forma col parallelo 42° un angolo di 50° in direzione Nord-Est.

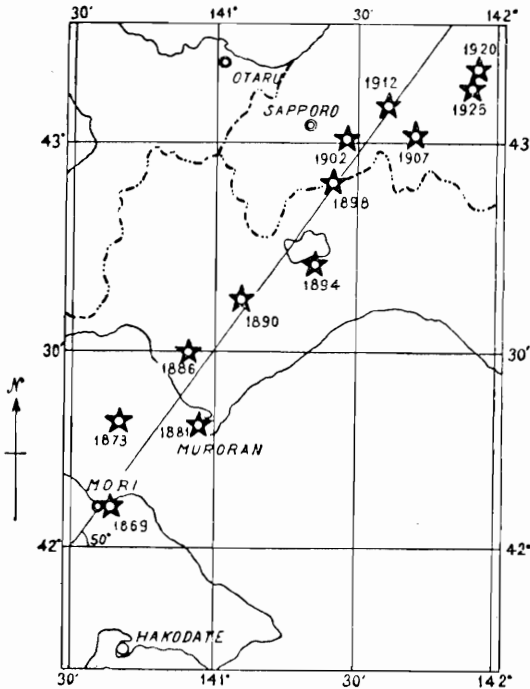


Fig. 3.

La figura 3 qui riportata e indicante i centri di gravità calcolati per le diverse epoche, mette in evidenza come il detto centro sia andato spostandosi con sensibile regolarità verso il Nord Est, circostanza che si può confrontare con l'analogo regolare spostamento del centro di gravità degli Stati Uniti, il quale si muove dal 1790 sempre lungo il 39° parallelo Nord verso Ovest.

Questo sistematico e regolare spostarsi del centro di gravità è una caratteristica dei paesi aperti alle immigrazioni, come del resto era da attendersi.

Infatti, persistendo la causa del loro popolamento ed agendo sempre nello stesso senso, il centro di gravità, indice sintetico della

distribuzione della popolazione, deve rispecchiare il modificarsi di questa distribuzione.

14. — *Germania*. — Pochi lavori tedeschi si occupano del concetto di centro di gravità applicato alla popolazione di un paese; la maggior parte di essi si limita a dare la definizione di detto centro ed a riportare i risultati dei calcoli eseguiti dall'ufficio statistico degli Stati Uniti d'America e relativi alla popolazione di quel territorio.

Fanno eccezione, lo studio di F. BURKHARDT comparso nell'«*Allgemeines Statistisches Archiv*» (*), in cui l'argomento, non solo riceve una trattazione relativamente estesa, ma viene presentato in modo pressochè completo, ed altri lavori, dello stesso BURKHARDT e di WEGEMANN, nei quali sono esposti i vari calcoli eseguiti per i territori germanici, in diverse epoche.

Negli studi più recenti si trovano esposte ampiamente le ragioni pratiche che consigliano la determinazione del centro di gravità della popolazione (**).

Una prima esposizione dettagliata del metodo di calcolo usato per la determinazione del centro di gravità della popolazione degli S. U. d'America, insieme coi risultati ottenuti dal WEGEMANN per la popolazione ed il territorio della Germania, è riportata nel 49° Volume delle «*Petermanns Mitteilungen*». Nella determinazione del centro di gravità per l'anno 1900 furono scelte come unità territoriali i circondari prussiani e le corrispondenti unità amministrative degli altri Stati Federali. Nel calcolo retrospettivo eseguito per il 1816 e 1867 furono invece scelti i circondari governatoriali prussiani e i corrispondenti circondari amministrativi degli altri Stati Federali. Le città e i centri con più di 5.000 abitanti furono considerati a parte. Come carta geografica fu scelta quella del VOGEL e gli assi scelti come riferimento furono il 51° di latitudine Nord e il 9° 30' di longitudine Est (da Parigi).

La precisione dei calcoli relativi al 1816 e al 1867 è minore di quella relativa al 1900 perchè per i circondari di campagna poterono essere adoperati solo 79 centri di gravità.

(*) F. BURKHARDT. *Der Statistische Schwerpunkt und seine Bedeutung*. «*Allgemeines Statistisches Archiv*», 1929, pag. 478-483.

(**) ARTHUR FREIHERR VON FIRCKS. *Bevölkerungslehre und Bevölkerungspolitik*, 1898, pag. 41.

GEORG VON MAYR. *Statistik und Gesellschaftslehre*, Band. II, 2 Auflage, 1926, pag. 85.

Il calcolo ha portato ai risultati seguenti :

ANNI	Coordinate del centro di gravità della Germania	
	Latitudine Nord	Longitudine Est
1816	51° 15'	11° 24' 45"
1867	51° 19'	11° 25' 12"
1900	51° 20' 55"	11° 36' 31"

I punti individuati da queste coordinate sono situati rispettivamente tra Wieche e Lossa ; a Rossleben presso l'Unstrut, e a tre chilometri a nord di Nebra presso l'Unstrut ; punti situati tutti e tre nella provincia di Sachsen.

Il centro di gravità della popolazione germanica si è dunque spostato dal 1816 al 1900 verso la capitale del Reich in direzione N.E.

Il calcolo del centro di gravità della superficie procede analogamente a quello della popolazione con la differenza che, alla popolazione, viene sostituita la superficie del circondario.

Divisa la superficie della Germania in 478 unità territoriali, si è trovato il punto 51°, 41' 20" Lat. Nord e 13° 3' 20" Long. Est, situato a circa 11 chilometri a nord di Torgan ed a circa 36 chilometri a Nord e 100 chilometri ad Est del centro della popolazione.

L'Ufficio statistico del Württemberg ha pure esso calcolato il centro di gravità del territorio e quello della popolazione (*). Il primo si trova ad alcune centinaia di metri da Welheim presso Teck ; ed il secondo, basato sul censimento della popolazione dell'8 ottobre 1919, cadeva esattamente a Esslingen. Nel 1834, al primo censimento dello Zollverein, si trovava invece a circa 1 chilometro a sud di Deizisau ; esso si è dunque spostato attraverso il tempo, in direzione N. W. di circa 6 chilometri.

Il BURKHARDT, già citato, nel « Deutsches Statistisches Zentralblatt » (***) riferisce inoltre che è stato calcolato il centro di gravità della popolazione e del territorio della Sassonia, e ne riporta i risultati. Secondo questi, il centro della popolazione sassone durante il

(*) « Mitteilungen des Württembergischen Statistischen Landesamtes », 1923, pag. 160-161.

(**) *Der Bevölkerungsschwerpunkt*, in « Deutsches Statistisches Zentralblatt », 1924, coll. 9, 10, 11.

periodo 1849-1910 si è spostato quasi linearmente in direzione N.W. verso Lipsia e precisamente di 7,8 chilometri verso occidente e di 3,6 chilometri verso settentrione. Nel 1910 il centro di gravità di quella popolazione cadeva nel Comune di Falkenau presso Hainichen. Il centro di gravità del territorio cadeva invece nel Comune di Grossschirma presso Freiberg, spostato di circa 18 chilometri da questo punto.

L'Autore osserva che le cause che producono lo spostamento del centro di gravità possono riassumersi nelle seguenti: eccedenza della immigrazione sulla emigrazione, eccedenza dei nati vivi sui morti, prolungamento della durata della vita. Anzi aggiunge che, per riconoscere quale tra le cause anzidette, sia la preponderante nei riguardi dello spostamento del centro di gravità, giova procedere nel modo seguente: calcolare il centro di gravità dei punti nei quali esiste eccedenza di immigrati su emigrati; quello relativo ai punti in cui si verifica il caso contrario, ed infine il centro di gravità dei punti in cui esiste un'eccedenza di nati vivi sui morti. Ponendo a raffronto questi centri, quello fra essi verso cui, in misura maggiore, si sposterà il centro di gravità della popolazione indicherà quale è la causa preponderante dello spostamento del centro di gravità.

Naturalmente, queste cause — e l'A. avrebbe fatto bene a metterlo in evidenza — determinano uno spostamento del centro di gravità, solo quando sono differenti le intensità con cui esse si manifestano nei diversi punti della distribuzione. Se infatti, in ciascun punto, il fenomeno aumentasse o diminuisse nella stessa proporzione, il centro di gravità non verrebbe per questo a cambiare di posizione.

Per la Sassonia, ad es., il centro di gravità degli immigrati è situato a N. W. del centro di gravità della popolazione dell'intero Paese, mentre quello dell'eccedenza degli immigrati è situato presso il N. E.; quello dell'eccedenza dei nati vivi sui morti è lievemente spostato verso il S. W. sempre rispetto al centro di gravità della popolazione. Da ciò si deduce che la maggiore eccedenza della immigrazione verso il Nord, provoca lo spostamento in quella direzione del centro di gravità della popolazione, mentre lo spostamento verso W. è dovuto in parte alla maggiore eccedenza dell'immigrazione verso l'Ovest, ed in parte, più lieve però, alla eccedenza delle nascite nell'Ovest.

In un altro articolo sulla stessa Rivista (*) il BURKHARDT ri-

(*) *Verschiebung des Bevölkerungsschwerpunktes*, « Deutsches Statistisches Zentralblatt » 1927, n. 7-8, coll. 107, 108, 109, 110.

prende a considerare il centro di gravità della popolazione sassone e asserisce che esso si è spostato dal 1910 al 1925 in direzione Nord di circa un chilometro. Il centro di gravità della eccedenza dei nati vivi sui morti è, rispetto al centro di gravità del 1910, situato in direzione S. W. (6,4 chilometri a Sud e 7,8 chilometri a Ovest); quello dell'eccedenza degli immigrati sugli emigrati si trova a N. W. (14 chilometri a Nord e 13,52 chilometri a Ovest); quello dell'eccedenza degli emigrati sugli immigrati è a S. W. (23,92 chilometri a Sud e 21,06 a Ovest) del centro di gravità del 1910.

Il centro di gravità dell'Impero Germanico ha subito uno spostamento dal 1900 al 1910, di circa 4 chilometri verso est e di 1,4 chilometri verso nord (in direzione di Berlino).

Per la popolazione censita nel 1910, ma contenuta nel nuovo territorio, il centro di gravità sta a 22 chilometri ad Ovest e a 1,4 chilometri a Sud del centro di gravità relativo alla popolazione del 1910, distribuita sul vecchio territorio. Tale spostamento è dovuto al fatto che le perdite di popolazione sono state più cospicue ad oriente che ad occidente.

Il centro di gravità della popolazione dei territori staccati dal Reich in conseguenza dei trattati di pace, era, nel 1910, situato a circa 220 chilometri ad Est e 14 chilometri a Nord del centro di gravità della popolazione relativa alla stessa epoca, ma distribuita sul nuovo territorio, e situato a circa 20 chilometri ad oriente di Hoyersuwerda.

Il centro di gravità della popolazione del nuovo territorio del Reich si è spostato, dal 1910 al 1925, di 6 chilometri verso Ovest e si trova nei pressi della città di Heldrungen a circa 34 chilometri a Nord di Weimar. Nel detto periodo, quindi, lo spostamento di questo centro porta a concludere che nel periodo 1910-1925 l'accrescimento della popolazione si sia verificato nell'Occidente in misura maggiore che nell'Oriente e che invece l'accrescimento del Nord e quello del Sud si bilanciano.

15. — *Svezia*. — Per la popolazione svedese è stata eseguita la determinazione del centro di gravità dal LINDERS (*), con applicazione delle formule del MENDELEIEFF, già riportate.

(*) A. F. LINDERS. *Ueber die Berechnung des Schwerpunkts und der Trägtheitsellipse einer Bevölkerung*. « Atti del Congresso Internazionale per lo studio dei problemi della popolazione ». Roma, 1931, già cit.

Il LINDERS determina anche l'ellisse d'inerzia e la relativa direzione principale, e propone che quest'ultima venga ad accompagnare sempre, nelle relazioni ai censimenti, la determinazione dei centri di popolazione, perchè la ritiene, anche più del centro di gravità, indice significativo del modo di distribuirsi della popolazione sul territorio considerato.

I risultati ottenuti per la popolazione svedese nel 1920 sono i seguenti:

$$\Lambda = 15^{\circ}16' \text{ (ad } E \text{ di Greenwich)} \quad \Phi = 58^{\circ}59' \text{ (} N \text{)}.$$

Per quanto riguarda la direzione principale l'A. ha trovato che la popolazione è concentrata in massima misura attorno ad una retta che (attraversa il centro di gravità e) forma un angolo di 19° verso Est con la direzione Nord.

16. — *Italia.* — Descriviamo ora particolarmente il procedimento usato in Italia per la determinazione del centro medio o di gravità della popolazione.

Avendo avuto bisogno di conoscere la latitudine media alla quale viveva la popolazione italiana, per alcune ricerche sul fabbisogno alimentare dell'uomo medio (*) il GINI, cercò, in collaborazione col BOLDRINI, il centro medio della popolazione presente del Regno entro i vecchi confini, censita il 10 giugno 1911 (**). Il calcolo fu eseguito allora una prima volta con un processo simile a quello usato dagli americani, adoperando cioè come unità territoriali dei trapezi di cui la lunghezza dei lati era, nel senso della latitudine di $15'$, e di $30'$ nel senso della longitudine.

Successivamente il lavoro preparatorio ed il calcolo furono completamente rifatti, perchè occorreva conoscere, per le ricerche che si esporranno, la latitudine e la longitudine dei singoli Comuni, i centri di popolazione delle varie unità amministrative e delle grandi ripartizioni geografiche del Regno. Per unità territoriali si scelsero anche questa seconda volta dei trapezi, più piccoli però, perchè aventi, tanto

(*) Vedasi C. S. I. R. (Commission Scientifique Internationale du Ravitaillement). C. GINI. *Sull'influenza di alcuni fattori sopra il fabbisogno alimentare dell'uomo medio*. Roma, Bertero, 1919, pag. 6, comparso anche ne « Il Nuovo Patto » Rassegna Italiana di Pensiero e di Azione. Roma, 1919. Ripubblicato in *Problemi sociologici della guerra*, Bologna, 1921.

(**) *Censimento generale della Popolazione del Regno d'Italia al 10 giugno 1911*, vol. I. Roma, Bertero, 1914.

nel senso della latitudine, quanto in quello della longitudine, 15' di lato. Queste unità territoriali, a parità di latitudine, sono circa la sedicesima parte dei trapezi usati dagli americani.

Praticamente si è proceduto così: scelta la rappresentazione piana del territorio italiano data da una carta politica speciale (*) e tracciati sopra di essa paralleli e meridiani successivi ad intervalli di 15', è stata attribuita ai Comuni, il cui capoluogo era contenuto in un trapezio, la latitudine e la longitudine del centro di figura del trapezio stesso (**). Poichè nella carta adoperata la longitudine 0 corrisponde al meridiano di Roma (Monte Mario), per asse delle ordinate è stato adottato questo meridiano, e si è convenuto, com'è nella consuetudine, di far precedere dal segno (—) le longitudini occidentali e dal segno (+) quelle orientali.

Eseguito questo lavoro preliminare, si sono applicate le formule (2) del n°. 1 successivamente ad insiemi via via più comprensivi, e ne sono risultati i centri medi della popolazione, delle provincie, dei compartimenti, delle grandi suddivisioni geografiche (Italia Settentrionale, Centrale e Meridionale) del Regno entro i vecchi confini.

(*) È stata adoperata la Carta politica speciale del Regno d'Italia, con la indicazione delle circoscrizioni amministrative (comprese quelle dei singoli Comuni), ecc., alla scala di 1 : 500.000, costruita da E. FRITZSCHE, pubblicata dall'Istituto Cartografico Italiano, Roma, 1893.

(**) In sostanza l'aver assunto come coordinate del centro di ciascun trapezio la longitudine e la latitudine (cioè ampiezze angolari e non lunghezze, benchè i gradi di parallelo — ed a rigore anche di meridiano — abbiano lunghezze dipendenti dalla latitudine) equivale ad avere assunto come rappresentazione del territorio quella cilindrica equispaziata.

Coordinate geografiche del centro di gravità della popolazione italiana censita il 10 giugno 1911 nelle Provincie, nei Compartimenti, nelle Ripartizioni geografiche e nel Regno (entro gli antichi confini). Comuni in cui cadono i centri di gravità e coordinate geografiche dei Capoluoghi di Provincia.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Coordinate geografiche del centro di gravità		Comuni nei quali cadono i centri di gravità della popolazione	Coordinate dei Capo- luoghi di Provincia	
	latitudine	longitudine		latitudine	longitudine
Alessandria	44°52'	—3°54'	Alessandria	44°55'	—3°51'
Cuneo	44°32'	—4°45'	Fossano	44°24'	—4°55'
Novara	45°35'	—4° 6'	Gattinara	45°27'	—3°51'
Torino	45°14'	—4°53'	Nole	45° 4'	—4°48'
PIEMONTE	45° 6'	—4°27'	Aramengo (Alessandria)	—	—
Genova	44°20'	—3°28'	In mare	44°25'	—3°32'
Porto Maurizio . .	43°54'	—4°38'	Badalucco	43°53'	—4°27'
LIGURIA	44°17'	—3°36'	In mare	—	—
Bergamo	45°43'	—2°43'	Scanzo	45°42'	—2°48'
Brescia	45°35'	—2°13'	Concesio	45°32'	—2°15'
Como	45°51'	—3°22'	Rovenna	45°48'	—3°23'
Cremona	45°13'	—2°29'	S. Martino in Beliseto	45° 8'	—2°27'
Mantova	45° 6'	—1°40'	Cerese	45°10'	—1°41'
Milano	45°28'	—3°18'	Milano	45°28'	—3°17'
Pavia	45° 8'	—3°25'	Zinasco	45°11'	—3°20'
Sondrio	46°12'	—2°37'	Spriana	46°10'	—2°36'
LOMBARDIA	45°30'	—2°53'	Casirate d'Adda (Bergamo)	—	—
Belluno	46°12'	—0°20'	Sospirolo	46° 8'	—0°14'
Padova	45°21'	—0°38'	Abano Bagni	45°24'	—0°37'
Rovigo	45° 3'	—0°38'	Rovigo	45° 4'	—0°42'
Treviso	45°46'	—0°13'	Povegliano	45°40'	—0°15'

Segue :

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Coordinate geografiche del centro di gravità		Comuni nei quali cadono i centri di gravità della popolazione	Coordinate dei Capo- luoghi di Provincia	
	latitudine	longitudine		latitudine	longitudine
Udine	46° 5'	+0°34'	Coscano	46° 4'	+0°44'
Venezia	45°26'	—0° 7'	Venezia	45°26'	—0° 9'
Verona	45°22'	—1°20'	Zevio	45°26'	—1°30'
Vicenza	45°38'	—0°57'	Villaverla	45°33'	—0°55'
VENETO	45°37'	—0°25'	Piombino Dese (Padova)	—	—
Bologna	44°25'	—1° 6'	Pianoro	44°30'	—1° 7'
Ferrara	44°46'	—0°47'	Ferrara	44°50'	—0°51'
Forlì	44° 4'	—0° 8'	Longiano	44°13'	—0°25'
Modena	44°37'	—1°33'	Modena	44°39'	—1°32'
Parma	44°46'	—2°17'	Collecchio	44°48'	—2° 9'
Piacenza	44°57'	—2°47'	Podenzano	45° 3'	—2°46'
Ravenna	44°22'	—0°30'	Cotignola	44°25'	—0°16'
Reggio Emilia	44°43'	—1°51'	Reggio Emilia	44°42'	—1°50'
EMILIA	44°34'	—1°21'	Piumazzo (Bolo- gna)	—	—
Arezzo	43°31'	—0°37'	Capolona	43°28'	—0°35'
Firenze	43°46'	—1°15'	Firenze	43°46'	—1°13'
Grosseto	42°49'	—1°12'	Grosseto	42°46'	—1°21'
Livorno	43°27'	—2° 8'	In mare	43°33'	—2°10'
Lucca	43°54'	—1°55'	Lucca	43°51'	—1°58'
Massa Carrara	44°13'	—2°22'	Fivizzano	44° 3'	—2°19'
Pisa	43°31'	—1°54'	Lorenzana	43°43'	—2° 4'
Siena	43°14'	—1°10'	Monteroni d'Arbia	43°19'	—1° 8'
TOSCANA	43°38'	—1°27'	Castel Fiorentino (Firenze)	—	—
Ancona	43°32'	+0°49'	Iesi	43°37'	+1° 3'
Ascoli Piceno	42°59'	+1°11'	Montalto Marche	42°51'	+1° 6'
Macerata	43°14'	+0°53'	Tolentino	43°18'	+1° 0'
Pesaro Urbino	43°45'	+0°16'	Urbino	43°54'	+0°24'
MARCHE	43°23'	+0°47'	Cingoli (Macerata)	—	—

Segue :

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Coordinate geografiche del centro di gravità		Comuni nei quali cadono i centri di gravità della popolazione	Coordinate dei Capo- luoghi di Provincia	
	latitudine	longitudine		latitudine	longitudine
Perugia-UMBRIA	42°50'	+0° 6'	Montecastello di Vibio	43° 7'	—0° 6'
Roma-LAZIO (*)	41°55'	+0°12'	Roma	41°54'	—0° 6'
Aquila	42°11'	+1° 4'	Rocca di Mezzo	42°21'	+0°58'
Campobasso	41°40'	+2° 9'	Limosano	41°34'	+2°13'
Chieti	42°10'	+1°53'	S. Eusanio del San- gro	42°21'	+1°42'
Teramo	42°34'	+1°24'	Cellino	42°40'	+1°14'
ABRUZZI	42° 8'	+1°37'	S. Eufemia a Ma- iella (Chieti)	40°55'	+2°19'
Avellino	40°59'	+2°33'	Luogosano	40°55'	+2°19'
Benevento	41°14'	+2°17'	Fragneto Monforte	41° 8'	+2°19'
Caserta	41°15'	+1°37'	Teano	41° 4'	+1°52'
Napoli	40°51'	+1°50'	Napoli	40°51'	+1°47'
Salerno	40°33'	+2°33'	Eboli	40°42'	+2°19'
CAMPANIA	40°56'	+2° 2'	S. Vitaliano (Ca- serta)	—	—
Bari	40°50'	+4°14'	Altamura	41° 8'	+4°26'
Foggia	41°31'	+3° 8'	Foggia	41°28'	+3° 5'
Lecce	40°21'	+5°22'	S. Pancrazio Sa- lentino	40°21'	+5°42'
PUGLIE	40°54'	+4°24'	Acquaviva delle Fonti (Bari)	—	—
Potenza-BASILICA- TA (ora LUCANIA)	40°32'	+3°33'	Trivigno	40°38'	+3°20'
Catanzaro	38°51'	+3°59'	Cortale	38°54'	+4° 8'

(*) Il centro della popolazione del Lazio è calcolato considerando la popolazione di Roma come situata tutta ad Est di Monte Mario, cioè come compresa fra 0 e + 15' di longitudine Est. Se invece si considera la popolazione di Roma come posta tutta alla longitudine 0, si ottiene per la popolazione del Lazio una longitudine media di + 0°12'.

Segue :

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Coordinate geografiche del centro di gravità		Comuni nei quali cadono i centri di gravità della popolazione	Coordinate dei Capoluoghi di Provincia	
	latitudine	longitudine		latitudine	longitudine
Cosenza	39°35'	+3°48'	Tarsia	39°18'	+3°49'
Reggio Calabria	38°17'	+3°31'	Oppido Mamertina	38° 7'	+3°12'
CALABRIA	38°55'	+3°46'	Sambiase (Catan- zaro)	—	—
Caltanissetta	37°25'	+1°40'	Pietraperza	37°29'	+1°36'
Catania	37°35'	+2°25'	Paternò	37°30'	+2°37'
Girgenti	37°25'	+1° 7'	Aragona	37°19'	+1° 7'
Messina	38° 5'	+2°42'	Mazzarrà S. An- drea	38°12'	+3° 5'
Palermo	38° 1'	+1° 0'	Misilmeri	38° 7'	+0°53'
Siracusa	36°59'	+2°28'	Noto	37° 3'	+2°50'
Trapani	37°54'	+0°15'	Calatafimi	38° 3'	+0° 2'
SICILIA	37°40'	+1°44'	Villarosa (Calta- nissetta)	—	—
Cagliari	39°35'	—3°31'	Furtei	39°13'	—3°22'
Sassari	40°37'	—3°32'	Ozieri	40°44'	—3°53'
SARDEGNA	39°59'	—3°32'	Samugheo (Ca- gliari)	—	—
Italia Settentrionale	45°11'	—2°26'	Tredossi (Cremona)	—	—
Italia Centrale	42°55'	—0° 3'	Collarzone (Peru- gia)	—	—
Italia Meridionale	40°31'	+3° 9'	Satriano di Luca- nia (Potenza)	—	—
REGNO D'ITALIA (entro gli an- tichi confini).	42°48'	—0°22'	Ficulle (Perugia)	—	—

N. B. — La massima parte delle coordinate geografiche dei capoluoghi di provincia corrispondono alla posizione dell'osservatorio meteorologico, e sono ricavate dall'Elenco delle Stazioni meteorologiche italiane pubblicato dal R. Ufficio di Meteorologia e Geodinamica (Roma, 1917). Siccome in tale elenco le longitudini par-

tono dal Collegio Romano, esse sono state riportate alle longitudini di Monte Mario, mediante uno spostamento verso ovest di un minuto primo. Le coordinate dei capoluoghi di provincia, che non hanno osservatorio, sono state ricavate dalla carta del Touring Club Italiano al 250 mila, dalla quale pur si sono rilevati i Comuni nei quali cadono i centri della popolazione.

Il centro della popolazione italiana veniva così determinato per la popolazione presente al 10 giugno 1911 a 42°48' di latitudine Nord e a —0° 22' di longitudine Ovest (da Monte Mario) nel Comune di Ficulles, in Provincia di Perugia (*).

Importa rilevare che, col primo calcolo, usando cioè unità territoriali aventi un lato di 15' ed uno di 30' si erano ottenuti risultati in cui la longitudine coincideva con quella ottenuta adoperando unità territoriali aventi 15' di lato, mentre la latitudine era discordante di alcuni secondi, che con l'arrotondamento erano diventati un minuto primo e cioè circa 1,85 km.

L'unità scelta dapprima era dunque già sufficientemente piccola per il territorio italiano.

Questo risultato ottenuto da GINI e BOLDRINI fu allora potuto da essi controllare, per gentile concessione dell'Autore, con il risultato, che ancora non era stato pubblicato, del calcolo di O. MARINELLI, il quale aveva pure determinato il centro della popolazione

(*) Per chi volesse avere notizie più precise, si può aggiungere che il centro della popolazione è lasciato qualche centinaio di metri ad Ovest della strada Orvieto-Ficulles ed a meno di 500 metri ad Est della retta congiungente Ficulles-Orvieto, a 4 km. e mezzo a sud est del capoluogo del Comune di Ficulles, un km. circa ad Oriente del Castello Sala ed a circa km. 9 ½ a Nord Ovest del punto trigonometrico della città di Orvieto.

In linea d'aria Ficulles dista 80 km. circa da Rieti, nel cui territorio si troverebbe, secondo la tradizione, il centro d'Italia. Infatti sulla piazza S. Ruffo della città, una pietra terragna, collocatavi in sostituzione di un capitello, ivi esistente fin dalla metà del secolo XVI, porta la scritta: *Medium totius Italiae*. Varrone però, come abbiamo già detto, vorrebbe che il centro d'Italia non giacesse proprio nella città, ma nel Lago di Cutilia. « In Agro reatino Cutiliae, Italiae umbilicus » dice Plinio, e un'opinione analoga era seguita nel Medio Evo, come risulta da una terzina del « Dittamondo » di Fazio degli Uberti.

Per alcune di queste notizie vedasi: Guida Reatina del 1933; Cenni storici dell'Avv. STEFANO MARCUCCI, e anche O. MARINELLI. *Alla ricerca del centro geografico d'Italia*. « Rivista Mensile del Touring Club Italiano », 1919, pag. 297 e seguenti.

italiana al 10 giugno 1911 (*) seguendo, almeno nei criteri informatori, il metodo americano.

Secondo i calcoli del MARINELLI il centro della popolazione italiana (1911) sarebbe caduto a $42^{\circ}48'$ di latitudine Nord e a $-0^{\circ}13'$ di longitudine Ovest. Il risultato quanto alla latitudine è identico, mentre per la longitudine il meridiano stabilito dal MARINELLI cadrebbe $9'$ (pari a circa 12 km.) ad Est di quello individuato da GINI e BOLDRINI.

Circa il divario che può sorgere nei risultati di queste ricerche, qualora il calcolo venisse ripetuto, il MARINELLI (**) nota: « appare evidente come la posizione assegnata al centro medio di una regione dipenda dall'esattezza del materiale cartografico di cui si dispone, nonchè dalla maggiore o minore precisione dei calcoli, talchè ogni qualvolta questi si rinnovarono o fossero per rinnovarsi si ottenne o si otterrebbe un risultato diverso ».

Per suggerimento di GINI, l'UGGÈ (***) , approfittando del fatto che il censimento austriaco, eseguito nel dicembre 1910, poteva ritenersi quasi contemporaneo a quello italiano del 10 giugno 1911, e tale quindi da offrire, per le nuove provincie, un dato di popolazione praticamente omogeneo rispetto a quello usato da GINI e BOLDRINI, estese il calcolo del centro medio alle nuove Provincie e al Regno nei nuovi confini. Nella determinazione l'UGGÈ adoperò lo stesso procedimento usato da GINI e BOLDRINI. Lo spostamento del nuovo centro rispetto all'antecedente permise di misurare sinteticamente la modificazione avvenuta nella distribuzione geografica della popolazione italiana per effetto delle recenti annessioni. Inoltre la determinazione

(*) Nell'articolo *L'Italia demografica e il suo centro di popolazione* in « *Cu-riosità Geografiche* » Vallardi (Milano 1928), il MARINELLI, confrontando le migrazioni del centro di popolazione degli Stati Uniti e quello dell'Italia, ci fa conoscere i centri di popolazione dell'Italia all'epoca dei vari censimenti dal 1861 al 1921.

L'A. espone una cartina, in cui sono segnate le posizioni dei centri alle diverse epoche, dalla quale si può vedere che il centro dal 1861 al 1881 ha subito un forte spostamento in direzione nord-sud, e nel 1921 è ritornato in una posizione vicina a quella occupata nel 1861, descrivendo una linea chiusa e subendo uno spostamento relativamente breve (in tutto 45 km.) a paragone di quello subito dal centro di gravità degli Stati Uniti. Esso infatti ha percorso in 150 anni circa 900 km. in direzione quasi costante.

(**) O. MARINELLI. *Alla ricerca del centro geografico d'Italia*, op. cit. pag. 26.

(***) ALBINO UGGÈ. *Il centro di popolazione dell'Italia nei nuovi confini*. Milano, Società Editrice « Vita e Pensiero » (senza data).

del nuovo centro acquistava maggiore utilità, in quanto poteva fornire eventualmente un termine di confronto con le successive determinazioni del centro di popolazione del Regno nei nuovi confini.

Era naturale prevedere che lo spostamento di detto centro fosse maggiore nel senso della latitudine che in quello della longitudine a causa della posizione delle terre redente; ed infatti ciò è confermato dai risultati che qui appresso riportiamo, unitamente a quelli già noti per i vecchi confini:

Centro di gravità della popolazione italiana 1911		
	Regno vecchi confini	Regno nuovi confini
Latitudine Nord	42°48'	42°56'
Longitudine Ovest	— 0°22'	— 0°19'

Il MARINELLI (*) trovava invece il centro di popolazione del nuovo Regno nel Comune di S. Vito in Monte, spostato di poco meno di 15 km. verso il Nord rispetto a quello del Regno nei vecchi confini. Egli aveva calcolato anche il centro di popolazione dell'Italia naturale, cioè del territorio ottenuto aggiungendo a quello attuale le terre verso la Francia e la Svizzera che mancano a completare la Regione Italiana nei suoi limiti fisici, con i relativi abitanti. Non pare invece che il Marinelli considerasse le isole italiane soggette ad altri Stati. Detto centro è spostato di poco più di 10 km. verso occidente rispetto al centro dell'Italia entro i vecchi confini.

Assunto alla presidenza dell'Istituto Centrale di Statistica ed ultimata la pubblicazione dei dati relativi al censimento del 1921, il prof. GINI volle che i calcoli del centro di gravità fossero eseguiti anche per la popolazione italiana censita al 1° dicembre 1921. La determinazione venne fatta presso l'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia dal GALVANI, che fu coadiuvato dalla dott. VENERE, sia per la distribuzione della popolazione negli elementi territoriali prescelti, sia per l'esecuzione dei calcoli (**). Venne adottata come rappresentazione piana quella cilindrica equispaziata, con maglie quadrate di 15' di lato. Al punto di mezzo di ciascuna

(*) *L'Italia demografica e il suo centro*, ecc. in «Curiosità geografiche», op. cit., pag. 149.

(**) Cfr. L. GALVANI, *Sulla determinazione del centro di gravità*, ecc., già citato.

maglia quadrata venne assegnata la popolazione dei Comuni i cui centri, segnati sulla carta fondamentale, cadevano nella maglia stessa. Riportati poi su due assi cartesiani ortogonali, costituiti da un meridiano e da un parallelo di riferimento, le somme orizzontali e verticali di tutte le colonne e le righe dei quadrati allineati, si venne ad avere su ciascuno degli assi una distribuzione di punti (aventi ognuno come peso una certa popolazione), e di ognuna di queste distribuzioni si determinò il centro di gravità. Il punto avente per ascissa e per ordinata rispettivamente quelle del centro di gravità sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate era il centro cercato.

Così si operò sia per i vecchi che per i nuovi confini, trovando rispettivamente :

Centro di gravità della popolazione italiana 1921		
	Regno vecchi confini	Regno nuovi confini
Latitudine Nord	42° 46' 59"	42° 54' 38"
Longitudine Ovest	— 0° 19' 46"	— 0° 18' 3"

Lo spostamento verso Nord della latitudine e il minor valore della longitudine rispetto a Roma, che caratterizzano la posizione del centro di gravità della popolazione entro i nuovi confini, porgono fedele immagine della intervenuta modificazione nel modo di distribuirsi della popolazione per effetto delle nuove regioni annesse al Regno.

Ed invero, ove si consideri la posizione geografica di queste, la grandezza e il senso dello spostamento del centro risultano quali, anche da considerazioni a priori, sarebbe stato facile prevedere, se non misurare.

Per comodità del lettore riassumiamo i risultati concernenti il centro di gravità della popolazione italiana nella seguente tabella :

Coordinate del centro di gravità della popolazione italiana.

Secondo i calcoli di	Vecchi confini			
	1911		1921	
	Latitudine Nord	Longitudine Ovest	Latitudine Nord	Longitudine Ovest
Marinelli	42° 48'	— 0° 13'	—	—
Gini e Boldrini	42° 48'	— 0° 22'	—	—
Uggè	—	—	—	—
Galvani	—	—	42° 46' 59"	— 0° 19' 46"

Secondo i calcoli di	Nuovi confini			
	1911		1921	
	Latitudine Nord	Longitudine Ovest	Latitudine Nord	Longitudine Ovest
Marinelli	—	—	—	—
Gini e Boldrini	—	—	—	—
Uggè (*)	42° 56'	—0° 19'	—	—
Galvani	—	—	42° 54' 38"	—0° 18' 3"

17. *Polonia*. — Infine la Sig.ra HALINA RADLICZ (**), applicando le formule del WEINBERG, ha calcolato il centro di gravità della superficie della Polonia :

$$51^{\circ} 48' 23'',2 \text{ lat. N}$$

$$22^{\circ} 44' 15'',7 \text{ long. E (Greenwich),}$$

quelli delle unità amministrative territoriali e quelli delle città con più di 10.000 abitanti. Non ha, però, determinato i centri di popolazione. È quindi da presumere che le formule del WEINBERG, che l'A. riporta, siano state applicate assumendo i pesi (popolazioni) delle varie unità territoriali uguali alla superficie di queste unità.

La memoria della RADLICZ è seguita da un articolo di E. SZTURM DE SZTREM (***) .

Centro mediano.

18. — *Determinazione del centro mediano di una popolazione.* — Mentre l'individuare il centro medio non presenta difficoltà e non richiede calcoli eccessivamente laboriosi, la determinazione del centro mediano, cioè di quel punto rispetto al quale risulta minima la somma delle distanze degli altri punti (pesati con le rispettive popolazioni) non è cosa facile, poichè essa dipende in generale da equazioni non semplici.

(*) Utilizzando anche i dati del Censimento austriaco del dicembre 1910.

(**) *Metody centrograficzne i ich zastosowanie do terytorjum Polski (Les méthodes centrographiques et leur application au territoire de la Pologne)*, « Revue trimestrielle de Statistique de la République Polonaise » 1931.

(***) *Uwagi o metodzie centrograficznej*, I. c.

Si è già detto (cfr. n. 1) che la prima definizione esatta di centro mediano sarebbe stata enunciata dal MENDELEIEFF (centro di convergenza). Però la prima determinazione del centro mediano in una serie statistica dipendente da due mutabili o da due variabili (insieme a due dimensioni) è stata eseguita da C. GINI e L. GALVANI nella loro memoria: *Di talune estensioni del concetto di media*, etc., già cit. L'applicazione dello stesso concetto al caso concreto di una popolazione è stata fatta da L. GALVANI e da DOUGLAS R. SCATES, rispettivamente nelle memorie: *Sulla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione, con applicazioni alla popolazione italiana censita il 1° dicembre 1921*, e: *Locating the median of the population in the United States*, presentate, l'una e l'altra, al Congresso Internazionale per lo studio dei problemi della popolazione. (Roma, settembre 1931) (*).

La prima di queste memorie (GALVANI) contiene anzitutto una parte teorica dedicata alla dimostrazione dell'unicità del centro mediano, alla distinzione del concetto fondamentale di centro mediano in quelli di « centro mediano in senso lato » e « centro mediano in senso stretto », all'utilizzazione di quest'ultimo per la ricerca approssimata del primo; a questa parte teorica segue la pratica applicazione alla popolazione e al territorio italiano, nei vecchi e nei nuovi confini.

La seconda memoria (SCATES) espone anzitutto alcuni criteri ed accorgimenti che possono utilmente essere impiegati in questo genere di ricerche.

Come si è visto (cfr. n. 1) il centro mediano di una distribuzione piana soddisfa alla condizione di rendere nulla la somma (ponderata) dei coseni e la somma dei seni degli angoli che la direzione positiva dell'asse x forma rispettivamente con le congiungenti il centro stesso con i diversi punti in cui si suppone concentrata la popolazione delle varie unità territoriali. Come conseguenza di tale proprietà del centro mediano, segnalata da C. GINI e L. GALVANI, lo SCATES osserva che mentre un errore di posizione di un punto, commesso lungo una radiale uscente dal centro mediano, non pregiudica

(*) Alla fine della citata comunicazione, lo SCATES richiama l'attenzione sopra un altro centro che potrebbe presentare qualche interesse. Questo centro dovrebbe essere tale da rendere per quanto è possibile uguale, per tutti gli abitanti di un territorio, il cammino richiesto per giungere ad esso. In altri termini esso dovrebbe soddisfare alla condizione di rendere minima la variabilità delle distanze. L' A. non va oltre questa definizione.

dica la esatta determinazione di tale centro, un errore di posizione di un punto della distribuzione in altro senso ha effetto sulla localizzazione del centro mediano e diventa tanto più pregiudizievole quanto minore è la sua distanza dal centro.

Tale comportamento degli errori palesa l'opportunità di scegliere, in prossimità del centro, unità di piccola area e abbastanza strette nella direzione normale a quella della retta ove si presume giacere il centro mediano e sulla quale si reputa conveniente scegliere dei centri mediani provvisori.

Per la popolazione degli Stati Uniti secondo il censimento del 1930 lo SCATES ha proceduto alla divisione del territorio in unità territoriali contenenti poco più di un milione di abitanti ciascuna. Le città richiedevano speciale attenzione, e così quelle con oltre 300.000 abitanti furono accentrate in una unità, in altri casi furono invece formati multipli dell'unità dando alla posizione il corrispondente peso.

Per determinare la posizione del centro mediano è necessario calcolare la somma totale delle distanze dei punti da ciascuno dei centri considerati.

Poichè interessa solo la distanza e non la direzione, lo SCATES osserva che la popolazione si può distribuire in tante classi racchiuse in corone circolari a diverse distanze da quel punto considerato in prima approssimazione come centro mediano. Se, pertanto, si sommano tutti gli abitanti contenuti in ciascuna corona circolare, ciascuna somma sarà costituita da abitanti che si trovano ad uguale distanza dal centro considerato (distanza che può quindi essere raccolta a fattore comune).

Il procedimento va ripetuto per tutti i centri provvisori presi in esame.

Il calcolo — continua lo SCATES — potrebbe essere fatto con un lucido su cui siano state descritte le varie corone circolari racchiudenti il territorio, come pure con un filo di ferro o un nastro di celluloido munito di una scala graduata. Fissando l'origine della scala sul centro provvisorio si procede come prima, perchè il filo o il nastro possono essere girati in tutte le posizioni e le distanze si possono conoscere leggendole sulla scala graduata.

La prima approssimazione del centro mediano è una approssimazione per stima. L'accuratezza di essa non ha conseguenze sul risultato finale, ma se risulta appropriata, può ridurre il lavoro richiesto. Condotta una retta, in direzione qualsiasi per il centro sti-

mato, si considerano su di essa vari centri provvisori e se ne calcolano le relative somme delle distanze dagli altri punti. Quello fra tali centri che dà luogo alla somma minima costituisce la seconda approssimazione del centro mediano.

La normale condotta per quest'ultimo alla retta di prima passerà per il centro mediano o gli si approssimerà. La vicinanza dipende dalla asimmetria della distribuzione intorno alla normale e dalla distanza della linea dei centri provvisori dal centro mediano. (Se la distribuzione è simmetrica intorno alla normale, il centro mediano giacerà sulla normale). Il processo va così continuato, e fornisce successive approssimazioni del centro mediano.

Come si vede, il metodo dello SCATES presuppone implicitamente l'unicità del centro mediano, e pertanto acquista rigore soltanto dalla dimostrazione di tale unicità data dal GALVANI (*).

Per la popolazione degli Stati Uniti nel 1930, il punto ottenuto dopo la terza approssimazione può, a giudizio dello SCATES, considerarsi sufficientemente vicino al ricercato centro mediano. Tale punto cade nella Contea di Montgomery nell'Ohio, a circa 15 miglia a N. W. della città di Dayton e a quasi 30 miglia ad Est del confine fra gli Stati di Indiana e Ohio, sulla congiungente Indianopoli e Colombo.

19. — *Centro mediano della popolazione e del territorio italiano.* — Per l'Italia il centro mediano in senso stretto, è stato determinato sia relativamente alla popolazione presente censita nel 1921, sia per il territorio, nei vecchi e nei nuovi confini, da L. GALVANI (memoria testè citata).

Si disponeva della carta, già utilizzata per la determinazione del centro di gravità, che dava sia la rappresentazione piana dell'Italia in proiezione cilindrica equispaziata, sia la distribuzione della popolazione secondo la posizione geografica, ossia la popolazione contenuta in ogni maglia avente un quarto di grado in latitudine e un quarto di grado in longitudine. La popolazione di ogni quadrato elementare era supposta agglomerata nel centro del quadrato stesso.

Per comodità di calcolo si era preparato un lucido su cui era stato riportato lo stesso sistema di maglie quadrate; e scelto il centro di una maglia come origine, si erano calcolate le distanze da esso dei centri di ogni altra maglia; in ciascuna casella si era

(*) L. GALVANI. *Sulla determinazione del centro di gravità, ecc.*, già cit.

inscritta la corrispondente distanza dall'origine. Dopo ciò, fissata a stima la regione nella quale presumibilmente sarebbe stato contenuto il centro mediano, si sovrapponeva il lucido alla carta fondamentale, in maniera che il quadrato contenente l'origine venisse a coincidere con una delle caselle della detta regione.

Si rendeva così agevole calcolare la somma dei prodotti delle distanze dei quadrati per le corrispondenti popolazioni. Il lucido forniva infatti le distanze e permetteva di leggere in trasparenza la cifra della popolazione scritta sulla carta.

Ripetuto l'analogo calcolo successivamente per gli altri quadratini della regione scelta, si paragonavano i risultati ottenuti. Il quadrato che dava luogo alla somma minore era quello in cui cadeva il centro mediano in senso stretto.

Per la determinazione del centro mediano della popolazione italiana (1921) nei vecchi confini sono stati necessari 17 tentativi e si è ottenuto come centro il punto di coordinate :

$$\left\{ \begin{array}{l} - 0^{\circ}37'30'' \text{ longitudine (W) (*)} \\ 43^{\circ}22'30'' \text{ latitudine (N)} \end{array} \right.$$

punto che è situato nel Comune di Arezzo, frazione di Pulciano.

Per il centro mediano della popolazione (1921) nei nuovi confini sono stati necessari 16 tentativi e si è ottenuto il punto

$$\left\{ \begin{array}{l} - 0^{\circ}37'30'' \text{ longitudine (W)} \\ 43^{\circ}37'30'' \text{ latitudine (N)} \end{array} \right.$$

situato in provincia di Arezzo, Comune di Castel Fagnano, frazione di Salutio.

La differenza sostanziale tra i due metodi — quello italiano e quello americano — è che, mentre gli americani hanno adoperato unità territoriali di area differente ma contenenti circa uguale popolazione, qui si sono adoperate unità territoriali aventi eguali dimensioni angolari (cioè in latitudine e in longitudine).

20. — *Coordinate mediane.* — Del calcolo delle coordinate medie si è già parlato quando si è eseguita la determinazione del centro di gravità, e qui non ci resta che esporre i calcoli delle coordinate mediane e le osservazioni cui essi danno luogo.

(*) La longitudine si misura a partire dal meridiano di Roma per Monte Mario.

In America le coordinate mediane della popolazione — « median lines » — sono state determinate, nella Relazione al Censimento 1910 (Vol. I), e in quella per il 1920 (Vol. I) a partire dalla popolazione censita nel 1880. I risultati sono riassunti nella seguente tabella :

« Median lines »: 1880-1920.

ANNI	Parallelo mediano Latitudine Nord	Meridiano mediano Longitudine Ovest
1880	39° 57' 00"	84° 7' 12"
1890	40° 2' 51"	84° 40' 1"
1900	40° 4' 22"	84° 51' 29"
1910	40° 6' 24"	84° 59' 59"
1920	40° 6' 25"	84° 49' 59"

Il punto di intersezione di queste « median lines », chiamato dall'Ufficio del Censimento degli Stati Uniti « median point » della popolazione, è stato pure considerato come un indice di distribuzione territoriale. È evidente però che un tal punto non può essere confuso, come vien fatto dal detto Ufficio, con il punto che logicamente si deve intendere per centro mediano di una popolazione quando si voglia conservare la proprietà caratteristica di questo punto, che è quella — come avviene per una distribuzione lineare — di rendere minima la somma delle distanze dagli altri punti della distribuzione.

Nella relazione che accompagna nel Vol. I del Censimento degli Stati Uniti del 1910 il calcolo del « center of population », è scritto, a pag. 46, che « se tutti gli abitanti degli Stati Uniti dovessero riunirsi in un luogo, il centro di popolazione sarebbe il punto che essi potrebbero raggiungere con il minimo cammino collettivo, ammettendo che tutti si muovessero in linea retta dalla loro residenza al luogo di riunione ».

Nel censimento successivo (1920) a pag. 32 del Vol. I del « Fourteenth Census for the U. S. », sono ripetute le stesse parole con l'aggiunta: « This would not be true of the median point ». Da quanto risulta nei periodi riportati appare evidente che l'Ufficio del Censimento americano confondeva i due concetti, essenzial-

mente diversi, di centro mediano e centro di gravità della popolazione.

Per « median point » il Census Bureau voleva intendere infatti il punto di intersezione del meridiano e del parallelo tali che ciascuno di essi dividesse in due parti ugualmente numerose la popolazione degli Stati Uniti.

Ora, il punto così definito, nè rende minima la somma degli scostamenti, nè è invariante rispetto ad una trasformazione di assi (*). Cioè mancano ad esso le accennate caratteristiche fondamentali del concetto di mediana.

D'altra parte, non è il « Center of population » (centro di gravità) quello che rende minimo il cammino collettivo.

Dal non aver tenuto debito conto della netta distinzione fra i due concetti è derivato uno scambio di corrispondenza e una serie di interessanti note volte a chiarire l'ora detto divario.

Verso la fine del 1926 il Prof. W. C. EELLS, in una corrispondenza col Census Bureau, non pubblicata, rilevò la errata concezione del centro mediano su cui era fondata la determinazione di detto centro da parte del Bureau (A mistaken conception of the Center of Population). Ma solo nel giugno 1927 il Prof. F. L. GRIFFIN in una conferenza dal titolo *Points of Minimum Travel for a Distributed Population*, tenuta alla Società Matematica Americana (pubblicata poi nel fascicolo del settembre-ottobre 1927, Vol. 33, del « Bulletin of the American Mathematical Society »), rese noto tale errore e trattò il problema in alcuni casi particolari.

Successivamente John T. HAYFORD, in un articolo *What is the center of an Area, or the Center of a Population?* (« Journal of the American Statistical Association » Vol. VII), mise in evidenza che la posizione del così detto « median point » può variare in corrispondenza del sistema di assi scelto.

Ma la questione è stata però trattata in modo completo soltanto nella più volte citata memoria « *Di talune estensioni del concetto di media*, ecc. » pubblicata in « Metron » (luglio 1929) da C. GINI e L. GALVANI.

Più recentemente il prof. EELLS, « Journal of the American Stat. Association », marzo 1930, ha trattato il problema della determinazione del punto che rende minima la somma delle distanze dai tre

(*) C. GINI e L. GALVANI. *Di talune estensioni dei concetti di media*, ecc., già cit.

vertici di un triangolo ; in verità tale problema, come ha fatto osservare il GALVANI, era già stato proposto dal FERMAT e risoluto dal fisico e matematico italiano EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) il quale nella memoria *De maximis et minimis* (*) scriveva : « Sint data tria puncta A, B, C, dumodo nullum ex ipsis sit ad ang., etc. ut infra, etc. Inveniatur punctum D ex quo tres eductæ AD, BD, CD faciant tres angulos inter se aequales. Dico tres eductos esse minimam quantitatem ». La questione è così ricondotta alla risoluzione di un facilissimo problema di geometria elementare.

Merita di essere segnalata questa circostanza : che l'interesse suscitato nel mondo degli studiosi dalle osservazioni fatte dal GINI sul problema in questione (**), a proposito della citata nota dell'EELLS, fu tale da indurre il Comitato organizzatore del Congresso Internazionale per lo studio dei problemi della Popolazione, tenuto a Roma nel 1931, a porre l'argomento all'ordine del giorno (***) .

Per quanto riguarda le coordinate mediane, la cui intersezione non è, dunque, da confondersi col centro mediano, si deve pure menzionare che il MENDELEIEFF (analogamente a quanto era stato fatto negli Stati Uniti dal Census Bureau) determinò per la Russia il parallelo e il meridiano mediani, e chiamò la loro intersezione « punto mediano ». Come si è detto, non è stato possibile consultare l'opera del MENDELEIEFF (già citata al N° 10) e riportare i suoi risultati.

Deve anche essere notato che qualche Stato dell'India ha pure calcolato il punto d'intersezione delle coordinate mediane (il così detto « median point » del Censimento americano del 1911).

Così per lo Stato di Travancore (Cens. Indiano 1921, vol. XXV, Trivandrum 1922) è stato trovato che le coordinate mediane della

(*) Cfr. *Opere di Evangelista Torricelli*. Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, Faenza 1919, pag. 90 e seguenti.

(**) Pubblicate nel « Journal of the American Statistical Association », December 1930. *Editor's note of the center of population and point of minimum travel*.

(***) Vedansi negli « Atti » del Congresso le relazioni: L. GALVANI. *Sulla determinazione del centro di gravità*, ecc., già cit.

F. L. GRIFFIN. *The Center of population for various distributions of population over areas of various shapes*.

A. F. LINDERS. *Ueber die Berechnung des Schwerpunkts und der Trägheitsellipse einer Bevölkerung*.

DOUGLAS B. SCATES. *Locating the median of the population in the United States*.

popolazione hanno, per i censimenti relativi agli anni indicati, le seguenti posizioni :

Coordinate medie della popolazione	1901	9° 14' 40" Lat N	E (Greenwich)
		76° 41' 10" Long E	
	1911	9° 13' 30" Lat N	E
		76° 40' 10" Long E	
	1921	9° 13' 30" Lat N	E
		76° 41' 40" Long E	

Per gli Stati di Rajputana e Ajmer-Merwara, nel volume XXIV dello stesso censimento (Calcutta 1923), non è data la posizione geografica delle coordinate medie della popolazione ma soltanto la loro posizione approssimata: la loro intersezione era situata nel Kishangarh, 33 miglia ad E S E della città di Ajmer.

Infine nel volume V del ripetuto censimento, che si riferisce al Bengal (Calcutta 1923) viene dato il punto d'intersezione delle coordinate medie del territorio e descritto il movimento del punto analogo per la popolazione (chiamato « median of population »). Il primo cadeva circa un miglio a Sud del punto comune ai tre distretti di Nadia, Faridpur e Jessore. In quanto al « median of population » esso giaceva nel 1872 a circa 16 miglia a S E del primo. Dal 1872 il « median of population » si è, in mezzo secolo, mosso verso N di circa 4 miglia e verso E di circa 16 miglia.

Per il censimento successivo (1931), nel Vol. V relativo a Bengal e Sikkim (Calcutta 1933), per tener conto di alcuni cambiamenti territoriali è ripetuto il calcolo del « median of area ».

Le distanze in miglia del « median » della popolazione, corrispondente a diverse epoche, dal punto comune ai distretti di Jessore, Nadia e Jaridpur sono le seguenti :

Anni	« Median » della popolazione			
1872	S	—	14,0	W — 13,4
1881	S	—	10,7	W — 9,9
1891	S	—	11,7	W — 6,5
1901	S	—	11,5	W — 5,1
1911	S	—	10,8	W — 2,0
1921	S	—	11,5	E — 3,0
1931	S	—	13,4	E — 5,0

Infine le posizioni geografiche delle coordinate medie del territorio (1931) sono :

$$\begin{array}{l} \text{Coordinate medie del} \\ \text{territorio} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 23^{\circ} 32' 12'' \text{ Lat N} \\ 89^{\circ} 17' 12'' \text{ Long E} \end{array} \right.$$

21. — *Calcolo delle coordinate medie della popolazione italiana censita nel 1911 e nel 1921.* — Il calcolo delle coordinate medie è stato fatto per la popolazione (presente) italiana censita nel 1911 e nel 1921 (Dott. VENERE). Per quest'ultima data, anzi, la determinazione è stata eseguita tanto per i vecchi che per i nuovi confini. Il calcolo delle coordinate medie è meno laborioso di quello delle coordinate medie. Ciò dipende dal fatto che la definizione stessa di coordinata mediana — che divide, cioè, in due parti ugualmente numerose la popolazione — suggerisce un facile accorgimento in base al quale, con una semplice stima, si riesce ad evitare l'esecuzione di buona parte dei calcoli occorrenti all'esatta determinazione.

Chi ha calcolato il centro medio e conseguentemente le coordinate medie, ha la possibilità di stimare con buona approssimazione il parallelo e il meridiano mediano.

Infatti, calcolata la metà della popolazione del territorio considerato, e determinata la striscia entro cui si presume cadere la mediana che si cerca, si eseguiscono le somme delle popolazioni, situate da ciascuna banda della striscia: se quella presunzione è giusta, ognuna delle due somme non supererà naturalmente la metà della popolazione totale.

Si classifica poi la popolazione dei Comuni della striscia a seconda della posizione geografica.

Poichè il *Dizionario dei Comuni del Regno* fornisce le coordinate geografiche dei Comuni di quarto in quarto di grado, l'anzidetta striscia verrà suddivisa in striscie parziali di 15' di larghezza.

Ciò fatto si calcola la popolazione contenuta in ognuna delle accennate striscie parziali, a partire da quelle situate ai bordi della striscia primitiva e aggiungendo volta a volta le varie somme così ottenute rispettivamente all'una e all'altra delle due somme precedentemente calcolate.

Così facendo si giunge evidentemente ad una somma (costituita dalla popolazione esterna alla striscia primitiva e situata tutta da una banda rispetto a quest'ultima e di uno o più addendi che forniscono l'ammontare della popolazione nelle striscie parziali di 15'

di lato) la quale risulta maggiore della metà di tutta la popolazione del territorio considerato.

Arrivati a questo punto, è evidente che la mediana cercata cade nell'interno dell'ultima striscietta la cui popolazione aggiunta alle precedenti somme, dà un totale maggiore della metà di tutta la popolazione.

D'altro canto aggiungendo alla popolazione situata dalla banda opposta della striscia quella contenuta nelle rimanenti strisciette parziali si deve ottenere un totale minore della metà di tutta la popolazione.

Dopo ciò, una semplice interpolazione consente di stabilire la posizione della coordinata mediana ricercata. Analogamente si procede per stabilire la posizione dell'altra coordinata.

Riferendoci in particolare all'Italia, è evidente che un semplice sguardo dato alla carta geografica da chi abbia un'idea della distribuzione della popolazione nelle varie regioni, permette di assegnare una posizione sufficientemente approssimata delle coordinate mediane.

Per il 1911 la striscia entro la quale può opportunamente limitarsi il calcolo della distribuzione della popolazione dei Comuni, nel senso della latitudine, è quella contenuta nell'intorno del meridiano $-1^{\circ}30'$; per la longitudine l'analoga striscia è contenuta nell'intorno del parallelo $43^{\circ}15'$.

I calcoli hanno confermato infatti la bontà della stima. Per il 1911 si è trovato che il meridiano mediano cadeva nella striscia compresa tra i meridiani $-0^{\circ}30'$, $-0^{\circ}15'$; una semplice interpolazione lineare (*) ha dato più precisamente $-0^{\circ}22'30''$.

Per la determinazione delle coordinate mediane nel 1921, tanto nei nuovi che nei vecchi confini, non vi è stato nemmeno bisogno di

(*) La metà della popolazione presente censita nel 1911 è 17.335.688.

La differenza fra questa cifra e il numero degli abitanti situati a destra della striscia è di 494.125; invece la differenza tra la metà della popolazione totale e quella situata a sinistra della striscia è 492.423. Ammettendo una proporzionalità tra numero degli abitanti e distanze, misurate in minuti primi, si ricava la posizione incognita x per cui passa il meridiano cercato. Cioè

$$x = \frac{492.423}{-986.548} 15' = -0,499137 \cdot 15' = 7', 29''.$$

Analogo calcolo è stato adoperato per la determinazione delle coordinate mediane negli altri casi.

fare una classificazione dei Comuni fra certe coordinate geografiche, perchè si disponeva della carta usata nella determinazione del centro di gravità, carta che forniva la distribuzione della popolazione italiana, secondo la posizione geografica. Eseguendo le somme verticali di tutta la popolazione contenuta in ciascuna delle striscie verticali di 15' di ampiezza, e successivamente le somme di queste somme fino a superare la metà del totale della popolazione italiana, si determinava la striscia in cui cadeva la coordinata mediana. Con l'interpolazione veniva fissata una più esatta posizione di essa.

La seguente tabella riassume i risultati per la popolazione italiana nel 1911 e nel 1921 :

	1911	1921	
		vecchi confini	nuovi confini
Latitudine mediana	43° 41' 16"	43° 40' 38"	43° 50' 21"
Longitudine mediana	— 0° 22' 30"	— 0° 19' 49"	— 0° 17' 31"

Il confronto dei punti d'incontro delle coordinate mediane della popolazione del Regno entro i vecchi e i nuovi confini qui sopra riportate, con gli analoghi centri mediani della popolazione stessa (e cioè, per i vecchi confini 43°22'30", —0°37'30"; e 43°37'30", —0°37'30" per i nuovi confini), mostra in modo evidente la diversa localizzazione di essi. Risulta dunque chiaramente come gli uni non possano e non debbano esser scambiati con gli altri.

Centri territoriali.

22. — *Altri centri riferiti al solo territorio italiano : confronti col centro di popolazione.* — Oltre al centro medio e a quello mediano della popolazione sono stati calcolati anche i centri medio e mediano del territorio dell'Italia (*).

(*) L. GALVANI. *Sulla determinazione del centro di gravità, ecc.*, già cit.

Notiamo poi che nell'articolo più volte citato *L'Italia demografica e il suo centro di popolazione*, il MARINELLI riporta una cartina in cui sono indicati i « centri di gravità del territorio della vecchia Italia, della nuova Italia, e della futura Italia ». Le coordinate di detti centri, desunti dall'anzidetta cartina, sono le seguenti :

Centro di gravità :

Italia naturale	Vecchia Italia	Nuova Italia
42°39'	42°22'	42°38'
— 0°19'	— 0°10'	— 0°11'

I procedimenti adoperati per il calcolo dei centri del territorio sono gli stessi di quelli usati per la determinazione dei centri della popolazione, con l'unica differenza che, mentre in quest'ultimo caso i pesi (popolazioni) dei vari elementi territoriali sono differenti, nel caso dei centri del territorio sono tutti uguali, e, per semplicità, sono tutti supposti uguali all'unità, in quanto nell'adottata proiezione cilindrica equispaziata i diversi elementi territoriali (altezza e larghezza di 15') si riguardano ugualmente estesi (*). Infatti i detti centri sono calcolati nella ipotesi che il territorio sia piano, rigido e senza peso e ricoperto di una distribuzione avente densità uniforme; si tratta in altri termini, di determinare il centro medio e quello mediano di una figura geometrica situata sopra un piano avente, nel sistema di proiezione scelto, la forma dell'Italia (Isole comprese). I risultati ottenuti sono i seguenti:

Centri del territorio (Italia).

Coordinate geografiche	Centro medio		Centro mediano	
	1921		1921	
	vecchi confini	nuovi confini	vecchi confini	nuovi confini
Lat. Nord	42° 24' 26"	42° 40' 54"	42° 52' 30"	43° 7' 30"
Long. Ovest	— 0° 11' 34"	— 0° 9' 5"	— 0° 22' 30"	— 0° 22' 30"

Come si vede, i centri del territorio non coincidono con quelli di popolazione che qui appresso riportiamo per comodità di confronto.

Centri della popolazione (Italia).

Coordinate geografiche	Centro di gravità		Centro mediano	
	1921		1921	
	vecchi confini	nuovi confini	vecchi confini	nuovi confini
Lat. Nord	42° 46' 59"	42° 54' 38"	43° 22' 30"	43° 37' 30"
Long. Ovest	— 0° 19' 46"	— 0' 18' 3"	— 0° 37' 30"	— 0° 37' 30"

(*) Evidentemente se gli elementi superficiali si riguardassero diversi, per la determinazione dei centri territoriali si dovrebbe attribuire a ciascun elemento un peso pari alla sua superficie.

La ragione del divario è molto semplice. Se la popolazione fosse distribuita in modo uniforme sul territorio, il centro mediano della popolazione coinciderebbe con il centro mediano del territorio, ed il centro di popolazione cadrebbe nel centro di gravità del territorio. La diversa giacitura di essi esprime che la distribuzione degli abitanti sul territorio italiano non è omogenea: la distanza dei due centri è un indice sintetico della non uniformità nella distribuzione territoriale della popolazione.

Nel 1921 il centro medio della popolazione cade 8' e 12" (circa km. 11,11) più ad W e 22'33" (circa km. 41.42) più a N di quello di figura. Ciò conferma che la popolazione compresa nei vecchi confini d'Italia è più addensata verso il N, anzi verso il N W rispetto a Roma.

Per l'Italia nei nuovi confini si trova una differenza di 8'58" (pari a circa km. 12,12) ad ovest e 13'44" (cioè quasi km. 25,44) a Nord tra il centro medio della popolazione e il centro medio del territorio. Il confronto tra la differenza dei due centri per i vecchi confini e quella precedentemente notata per i nuovi mostra che l'aggiunta delle nuove provincie ha provocato uno spostamento piccolissimo nel senso della longitudine, mentre nel senso della latitudine il centro medio della popolazione è spostato rispetto a quello di figura di 17 km. in meno.

Ciò dipende dal fatto che la densità della popolazione delle nuove Provincie (Venezia Tridentina 46,1; Venezia Giulia e Zara 108,5) è inferiore alla media del Regno (125,0): pertanto queste popolazioni influiscono sulla localizzazione del centro di popolazione, meno di quanto non influiscano i rispettivi territori sul centro di figura.

Il confronto tra il centro mediano del territorio e quello della popolazione, tanto nei nuovi che nei vecchi confini, porta a una differenza nel senso della longitudine di 15', e di 30' nel senso della latitudine; precisamente i centri mediani della popolazione si trovano spostati rispetto a quelli del territorio di circa 20 km. ad Ovest e di 55 km. a Nord, ciò che è in accordo col fatto che nel N W d'Italia la popolazione è più densa. Pur essendo la densità della popolazione nei nuovi territori, minore di quella media del Regno, la grande distanza di essi dal centro mediano spiega l'eguaglianza dello spostamento dei due centri di popolazione dai centri di territorio tanto nei nuovi che nei vecchi confini.

Un altro centro che si può calcolare per un territorio è quello detto dal MARINELLI (*) di simmetria, che egli definisce quale punto di intersezione del parallelo e del meridiano che dividono il territorio in due parti di uguale superficie, rispettivamente nel senso della longitudine e in quello della latitudine. Evidentemente tale parallelo e tale meridiano rappresentano la latitudine mediana e la longitudine mediana del territorio, nel senso già definito al n. 5. Per l'Italia un calcolo approssimativo è stato fatto dallo stesso MARINELLI; da esso risulta che il così detto centro di simmetria è posto tra Arezzo e Città di Castello presso Monterchi. Una determinazione più esatta è stata eseguita da GINI e BOLDRINI i quali hanno praticamente proceduto nel seguente modo.

Sopra un foglio di carta translucida essi hanno disegnato il contorno del Regno d'Italia entro gli antichi confini nella scala 1:1.500.000, copiandolo dalla carta in quattro fogli dell'Atlante Stieler, e hanno tracciato un parallelo base (43°) e un meridiano base ($-0^{\circ}7'$ da Monte Mario) nell'ipotesi che essi dividessero la superficie contenuta nei contorni della carta in due parti uguali. Facendo poi uso di un planimetro polare, hanno misurato l'area dei quattro settori di superficie così determinati, avendo cura di ripetere l'operazione più volte e di fare la media dei vari risultati per correggere gli errori di osservazione.

Stabilita la differenza tra la superficie situata a Nord e quella situata a Sud del parallelo base, e la differenza tra la superficie situata ad Ovest e quella situata ad Est del meridiano base, non è stato difficile, mediante successive approssimazioni, passare dalle coordinate provvisorie a quelle definitive (**).

In questo modo essi hanno trovato, nei limiti consentiti dalla scala della carta adoperata, che il cosiddetto centro di simmetria del Regno entro gli antichi confini era a $42^{\circ}44'$ di latitudine Nord e a $-0^{\circ}14'$ di longitudine Ovest dal meridiano di Roma; cioè esso

(*) O. MARINELLI. *Alla ricerca*, ecc., Op. cit. pag. 28.

Detto centro, come abbiamo detto, ci pare impropriamente chiamato di simmetria. Per convincersene basta osservare che esso non è invariante rispetto ad una trasformazione di assi.

(**) La superficie della carta misurata col planimetro, moltiplicata per la scala, ha fornito per il Regno una superficie di km^2 284.000 anziché di 286.000 come si sarebbe dovuto; per gli scopi proposti l'approssimazione può ritenersi sufficiente.

cadeva qualche chilometro ad Oriente di Orvieto, rimanendo a circa 15 km. in direzione Sud Est del centro di popolazione.

Per il Regno entro i nuovi confini è stata pure fatta l'analogha determinazione. All'uopo è stata adoperata la carta d'Italia (scala

Centri di gravità, centri mediani e coordinate mediane (Italia, 1921).

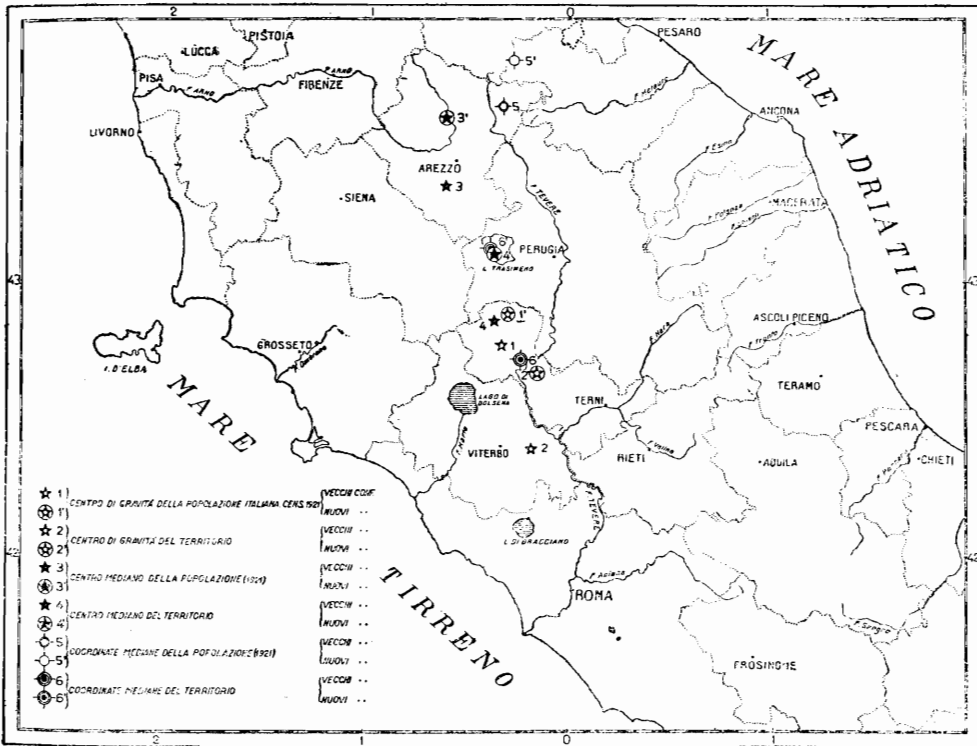


Fig. 4.

I:1.500.000) riportata in tre fogli nell'Atlante geografico di MARIO BARRATA e LUIGI VISINTIN dell'Istituto Geografico De Agostini, Novara. Il meridiano ed il parallelo presi per base furono rispettivamente $-0^{\circ}27'$ e 44° , e si ebbero come risultati: latitudine Nord $43^{\circ}8'$; longitudine Ovest (dal meridiano di Monte Mario) $-0^{\circ}23'$. Il punto avente queste coordinate cade nel Lago Trasimeno ed è situato a circa 2 km. a N.E. di Castiglione del Lago, a 8 km. a Sud

Nella Fig. 4 sono rappresentati i centri medi (o di gravità), i centri mediani e le coordinate mediane della popolazione (1921) e del territorio italiano nei vecchi e nei nuovi confini; mentre nella Fig. 5 sono posti a confronto i centri di gravità e le coordinate mediane della popolazione italiana nel 1911 e nel 1921 nonchè del territorio, nei vecchi e nei nuovi confini.

Centri nazionali di alcuni fenomeni.

23. — *Confronto tra il centro di popolazione e il centro di alcuni fenomeni connessi con la distribuzione della popolazione.* — Come può riuscire utile confrontare il centro della popolazione con quello del territorio sul quale essa vive, altrettanto e forse anche più interessante riesce talvolta il confronto tra il centro di popolazione e il centro di alcuni fenomeni per loro natura connessi con la distribuzione della popolazione. Senza dire che l'importanza che assume la determinazione del centro di uno di tali fenomeni nei confronti con l'analogo centro di popolazione serve anche a dimostrare quanto numerose e varie siano le ricerche statistiche per le quali può riuscire utile la conoscenza dei centri di popolazione locali e generali.

Con procedimento perfettamente analogo a quello seguito per la determinazione dei centri medi di popolazione, il GINI e il BOLDRINI hanno calcolato dapprima, per i vari Compartimenti e per il Regno entro i vecchi confini, il centro delle nascite e delle morti, verificatesi nei singoli Comuni, dal 1° gennaio 1882 al 9 febbraio 1901, servendosi dei dati pubblicati dalla Statistica ufficiale.

La determinazione ha fornito i seguenti risultati:

metro, è risultata essere, dopo avere fatte le debite riduzioni, di km^2 312.210 invece di km^2 310.137. È stato perciò commesso un errore in eccesso di km^2 2.073: l'approssimazione è quindi soddisfacente per i nostri scopi. Per l'Italia continentale l'errore commesso in eccesso è stato di km^2 1.366 (= 261675 — 260309).

Coordinate geografiche medie della popolazione, dei nati e dei morti, nei singoli Compartimenti, nelle maggiori suddivisioni geografiche e nel Regno entro gli antichi confini (Fig. 6).

COMPARTIMENTI	Popolazione presente (cens. 1911)		Nati (1882-1901)		Morti (1882-1901)	
	Latitudine media	Longitudine media	Latitudine media	Longitudine media	Latitudine media	Longitudine media
Piemonte	45° 6'	—4°27'	45° 3'	—4°27'	45° 3'	—4°29'
Liguria	44°17'	—3°36'	44°17'	—3°36'	44°16'	—3°38'
Lombardia	45°30'	—2°53'	45°30'	—2°55'	45°30'	—2°55'
Veneto	45°34'	—0°25'	45°37'	—0°25'	45°40'	—0°25'
Emilia	44°34'	—1°21'	44°34'	—1°20'	44°34'	—1°20'
Toscana	43°38'	—1°27'	43°39'	—1°27'	43°39'	—1°26'
Marche	43°23'	+0°47'	43°24'	+0°46'	43°24'	+0°48'
Umbria	42°50'	0° 6'	42°51'	0° 3'	42°52'	0° 3'
Lazio	41°55'	0°12'	41°55'	0°14'	41°55'	0°13'
Abruzzi	42° 8'	1°37'	42° 6'	1°39'	42° 5'	1°40'
Campania	40°56'	2° 2'	40°56'	2° 5'	40°56'	2° 5'
Puglie	40°54'	4°24'	40°56'	4°21'	40°56'	4°22'
Basilicata	40°32'	3°33'	40°33'	3°33'	40°33'	3°33'
Calabrie	38°55'	3°46'	38°55'	3°47'	38°54'	3°47'
Sicilia	37°40'	1°44'	37°40'	1°42'	37°40'	1°42'
Sardegna	39°59'	—3°32'	40° 0'	—3°32'	39°59'	—3°33'
ITALIA SETTE- TRIONALE (com- presa Emilia) . .	45°11'	—2°26'	45°11'	—2°27'	45°11'	—2°32'
ITALIA CENTRALE (compreso Abruzzi)	42°55'	—0° 3'	43° 8'	—0°27'	43° 8'	—0°27'
ITALIA MERIDIO- NALE CONTINEN- TALE	40°31'	3° 9'	40°47'	2°55'	40°47'	—2°56'
REGNO D'ITALIA .	42°48'	—0°22'	42°37'	—0°10'	42°37'	—0°10'

Lasciando al lettore il compito di considerare più dappresso i risultati ottenuti, qui notiamo solo che, per il Regno, il centro delle

Centri medi della popolazione, dei nati e dei morti nei singoli Compartimenti.



Fig. 6.

nascite e quello delle morti coincidono e cadono a Sud Est del centro della popolazione.

I dati più sopra riportati e commentati confermano quanto era di sapere comune e noto da tempo dalle statistiche demografiche, di una popolazione, cioè, più densa verso il settentrione d'Italia, più feconda e più colpita dalla morte verso il Sud.

Interessanti ed utili constatazioni potrebbero pure essere fatte ricercando le ragioni delle divergenze tra la posizione dei centri regionali della popolazione, delle nascite e delle morti. Nelle pagine precedenti abbiamo illustrato brevemente le diverse e feconde applicazioni statistiche dei centri di popolazione: l'analisi condotta in proposito mostra in tutta la sua evidenza il grande interesse scientifico che avrebbe anche per i singoli Compartimenti la sistematica determinazione di essi per epoche diverse, rendendosi con ciò possibile la misura dell'influenza dello spostarsi di un centro sulla posizione degli altri.

Il GINI e il BOLDRINI hanno poi determinato anche per il Regno nei vecchi confini, con criteri analoghi a quelli adottati per calcolare il centro della popolazione, delle nascite e delle morti, i centri di alcuni fenomeni sociali. Per il calcolo gli AA. si sono basati sopra unità territoriali differenti: per il numero dei Senatori del Regno creati dal 1871 in poi e per la stampa periodica in Italia nel 1912 (*), i calcoli sono stati basati sui dati dei singoli Comuni, mentre per i giudizi esauriti dai Tribunali penali e dalle Corti d'Assise sono state prese per unità territoriali le sedi dei Tribunali e delle Corti.

La tabella che segue riassume i dati precedentemente esposti e i nuovi risultati ottenuti.

(*) I dati furono gentilmente forniti dall'Aschieri, Direttore dell'Ufficio Centrale di Statistica, il quale prestò le bozze di un volume sulla stampa periodica nel 1912, volume preparato da lungo tempo da detto ufficio e che poi non venne pubblicato.

TAV. IV.

Coordinate geografiche medie di alcuni fenomeni desunte dalla ripartizione dei fenomeni nei Comuni o nelle maggiori unità territoriali.

FENOMENI	Latitudine	Longitudine	Latitudine e longitudine media relativa al centro di popolazione
1. Centro della popolazione (1911)	42°48'	—0°22'	—
2. Nati (1° gennaio 1882-9 febbraio 1901)	42°37'	—0°10'	(—0°11', + 0°12')
3. Morti (1° gennaio 1882-9 febbraio 1901)	42°37'	—0°10'	(—0°11', + 0°12')
4. Senatori del Regno nominati dopo il 1° gennaio 1871)	42°47'	—0°57'	(—0°1', — 0°35')
5. Stampa periodica nel 1912 . .	43°29'	—1°10'	(+0°41', — 0°48')
6. Giudizi esauriti dai tribunali penali (1914)	42° 1'	+0°14'	(—0°47', — 0°36')
7. Giudizi esauriti dalle Corti d'Assise (1913)	41°25'	+0°40'	(—1°23', + 1° 2')

Per facilitare i confronti fra le posizioni dei centri dei diversi fenomeni considerati, alla tabella è stata aggiunta un'altra colonna : in essa la prima cifra tra parentesi esprime la differenza tra le latitudini medie, la seconda quella fra le longitudini medie. Così, a colpo d'occhio, si vede in che senso si spostino i centri dei vari fenomeni dal centro della popolazione, e le cifre tra parentesi, benchè poco numerose, mettono già in evidenza la conosciuta diversa struttura sociale del settentrione e del mezzogiorno d'Italia.

I centri di alcuni fenomeni come la natalità, la mortalità, i giudizi penali, si spostano verso il Sud ; invece i centri di altri fenomeni, che potrebbero interpretarsi come indici di una più diffusa cultura (stampa periodica) e di una *élite* intellettuale (senatori) si spostano verso il Nord.

I diversi centri a cui si riferisce la Tav. IV sono ordinatamente rappresentati nella Fig. 7.

24. — *Determinazione indiretta del centro nazionale di alcuni fenomeni.* — Le determinazioni di cui si è finora parlato sono ottenute

in base alle considerazioni dell'intensità assunta dai vari fenomeni nelle ristrette unità territoriali da cui si parte per il calcolo dei corrispondenti centri. I risultati per tal via ottenuti esprimono in modo diretto e sintetico gli aspetti presentati dai fenomeni esaminati nel complesso del territorio rispetto al quale si vuole stabilire la consistenza dei fenomeni stessi a un dato momento.

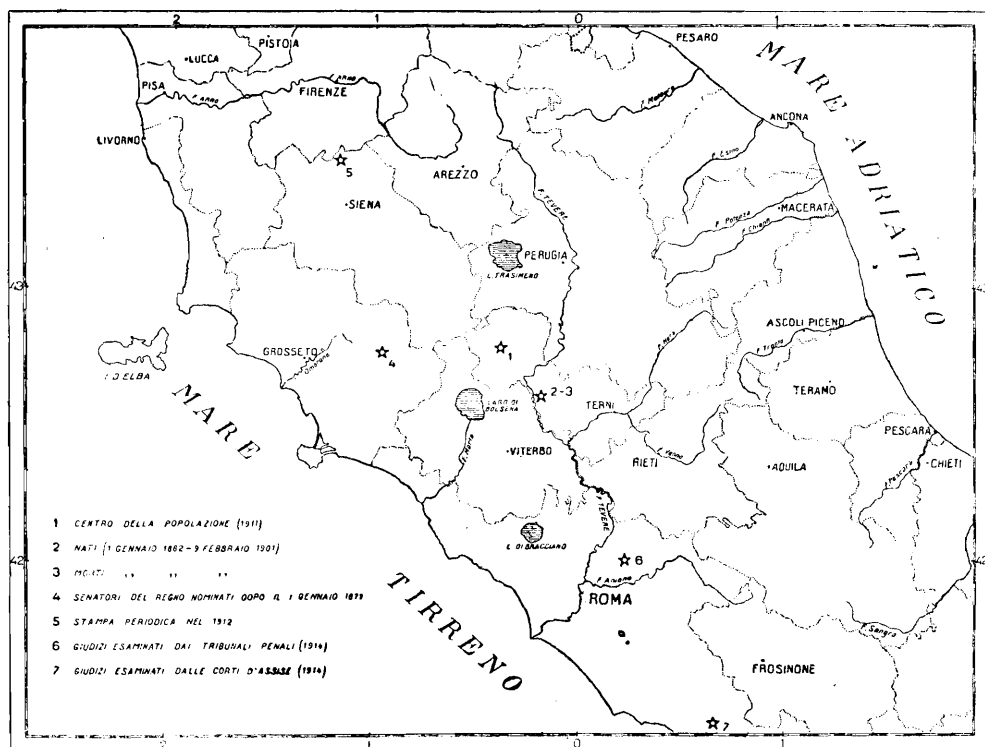


Fig. 7.

Non sempre è però possibile seguire l'accennata via diretta, anche per il fatto che spesso mancano i dati relativi alle piccole unità territoriali da cui è d'uopo che le indagini prendano le mosse. In tali casi il calcolo deve basarsi su unità territoriali più o meno vaste e ciò porta con sé notevoli limitazioni alla approssimazione dei risultati.

Le determinazioni indirette, cui per le accennate ragioni si suole fare ricorso, sostanzialmente si fondano sopra le semplici considerazioni che seguono.

Come si è detto esistono fenomeni che dipendono in modo più o meno prevalente e diretto dalla popolazione di un paese e pei quali la distribuzione è nota solo rispetto ad unità territoriali superiori al Comune. Ora è presumibile che, mentre l'intensità, con cui questi fenomeni si manifestano, varia anche notevolmente da una unità territoriale ad un'altra, vari in piccolissima misura entro la stessa unità.

Così, per esempio, nelle varie Province la mortalità per cancro può essere molto diversa, ma in una prima approssimazione si può ammettere che nei Comuni della stessa Provincia la mortalità non sia sistematicamente diversa, o quanto meno le differenze si distribuiscono in modo da non influire sensibilmente sulla localizzazione del centro. Le stesse considerazioni possono ripetersi per numerosi altri fenomeni.

La distribuzione degli spacci di bevande alcoliche, può essere notevolmente diversa per esempio, da Provincia a Provincia, perchè al consumo di tali bevande negli esercizi pubblici contribuiscono in modo differente gli abitanti di esse, ma si può ritenere invece che, grosso modo, nell'ambito di ogni Provincia la distribuzione, a causa delle più omogenee condizioni di ricchezza e per le abitudini meno discordanti degli abitanti, sia meno diversa e in ogni modo tale da non esercitare sensibile influenza sulla determinazione del centro.

L'intensità di questi fenomeni strettamente connessi, nelle loro manifestazioni, agli abitanti, può quindi attribuirsi ai centri di popolazione di ciascuna unità territoriale senza commettere per questo un grande errore. Naturalmente, però, l'ipotesi è valida per circoscrizioni territoriali sufficientemente piccole perchè ivi l'intensità dei fenomeni possa ritenersi uniforme. Resterà evidentemente da stabilire, di volta in volta, l'estensione delle dette circoscrizioni, tenendo conto naturalmente delle esigenze teoriche e di quelle pratiche. In alcuni casi, per esempio, si è potuto scendere fino ai Circondari, in altri casi, alle Province, ma, in generale, quanto più grande è l'unità territoriale scelta tanto più largamente approssimativo è il risultato che si ottiene.

L'Ufficio del Censimento degli Stati Uniti d'America assume, come si è visto (n. 9), grandi unità di territorio per il calcolo del centro della popolazione. Ora, per quanto precede, risulta chiaramente che la scelta di siffatte unità territoriali è poco opportuna, tanto dal punto di vista del calcolo diretto che da quello indiretto.

Poichè per avere il centro di gravità di un sistema di punti pe-

santi si può sostituire ad un sistema parziale il rispettivo centro di gravità (nel quale si suppongono concentrate le masse corrispondenti) segue che il centro medio nazionale dei fenomeni in questione si calcolerà con una media delle latitudini e delle longitudini medie della popolazione delle varie circoscrizioni territoriali, attribuendo a ciascuna un peso proporzionale all'ammontare dell'intensità di tali fenomeni in tutta la circoscrizione.

Se gli abitanti contribuissero nella stessa misura alla produzione del fenomeno, il centro di esso, calcolato nel modo ora detto, coinciderebbe con il centro della popolazione del territorio considerato; se invece differente è la misura con cui gli abitanti vi concorrono, la coincidenza non si verifica.

Ne segue quindi che un divario tra i due centri, misurato dallo spostamento, in una certa direzione, del centro del fenomeno rispetto a quello della popolazione, rivelerebbe una maggiore partecipazione degli abitanti delle unità di territorio situate in quella certa direzione.

Così è possibile calcolare, con medie ponderate, i centri regionali di alcuni fenomeni quando sono noti i centri medi di popolazione, di unità territoriali inferiori alla regione e quando si conosce inoltre la intensità del fenomeno per queste zone meno estese.

Concludiamo che si può determinare il centro nazionale dei fenomeni strettamente collegati agli abitanti di un paese quando sono noti i centri di popolazione delle singole unità territoriali. Da questi possono ottenersi i centri provinciali o regionali dei fenomeni e infine quello nazionale. Il confronto fra la posizione di quest'ultimo e la posizione del centro nazionale della popolazione costituirà un indice della diversa partecipazione che vi prendono gli abitanti delle diverse circoscrizioni.

L'impiego dei centri locali della popolazione, per le ricerche di cui si è fatto cenno, può dare luogo a svariatissime applicazioni tanto che il GINI e il BOLDRINI hanno creduto opportuno illustrare tale impiego con gli esempi contenuti nella seguente tabella :

TAV. V.

Coordinate geografiche dei centri medi di alcuni fenomeni, desunte dalla posizione del centro della popolazione in ciascuna Provincia, nel 1911.

N. sulla Fig. 8	FENOMENI	Latitudine media	Longitudine media	Latitudine e longitudine medie rispetto al centro di popolazione
—	Centro della popolazione (1911) .	42°48'	—0°22'	(0 , 0)
1	Nati vivi (1914)	42°45'	—0° 5'	(0° 3', + 0°17')
2	Matrimoni (1914)	42°47'	—0°15'	(—0° 1', + 0° 7')
3	Emigrati (1913)	42°23'	+0°10'	(—0°25', + 0°32')
4	Morti in complesso (1914)	42°45'	—0° 8'	(—0° 3', + 0°14')
5	Morti per tutte le forme di cancro (1912)	43°28'	—0°53'	(+0°40', — 0°31')
6	Morti per tubercolosi polmonare (1912)	43°21'	—0°55'	(+0°33', — 0°33')
7	Morti per febbre tifoidea (1912) .	43° 5'	—0°15'	(+0°17', + 0° 7')
8	Morti per febbri da malaria (1912)	39°50'	+0°53'	(—2°58', + 1°15')
9	Analfabeti sopra 21 anni (1911) .	41°49'	+0°44'	(—0°59', + 1° 6')
10	Numero delle persone occupate nell'industria (1911)	43°53'	—1°31'	(+1° 5', — 1° 9')
11	Reati denunciati (1913)	42°14'	+0° 5'	(—0°14', + 0°27')
12	Viaggiatori in partenza sulle ferrovie (1914)	43°19'	—1° 1'	(+0°31', — 0°39')
13	Senatori del Regno nominati dopo il 1° gennaio 1871	43° 2'	—0°55'	(+0°14', — 0°33')
14	Pacchi postali spediti (eserc. 1913-1914)	43°37'	—1°17'	(+0°49', — 0°55')
15	Stampa periodica (1912)	43°24'	—1°11'	(+0°36', — 0°48')
16	Esercizi pubblici in cui si vendono bevande alcoliche (31 dic. 1914)	42°29'	—0°35'	(—0°19', — 0°13')
17	Deposito a risp. nelle casse ordinarie e postali (31 dic. 1914) .	43°35'	—1°25'	(+0°47', — 1° 3')
18	Numero contratti perfezionati dall'Istituto Nazionale delle Assicurazioni (1913)	42°30'	—0° 8'	(—0°18', + 0°14')

Segue Tav. V.

N. sulla Fig. 8	FENOMENI	Latitudine media	Longitudine media	Latitudine e longitudine medie relative al centro di popolazione
19	Capitale assicurato dall'Istituto Nazionale delle Assicurazioni (1913)	43° 0'	—0°32'	(+0°12', — 0°12')
20	Somme giocate al lotto (esercizio 1914-15) (*)	41°57'	+0° 5'	(—0°51', + 0°27')
21	Somme spese per tabacco (esercizio 1914-15)	43° 7'	+0° 4'	(+0°19', + 0°26')
22	Spese di beneficenza dei bilanci provinciali (prev. 1915)	43°19'	—1° 0'	(+0°31', — 0°38')
23	Primo prestito nazionale (escluse le somme sottoscritte dal Consorzio)	44° 6'	—2° 0'	(+1°18', — 1°38')
24	Secondo prestito nazionale (escluse le somme sottoscr. dal Consorzio)	43°56'	—1°47'	(+1° 8', — 1°25')
25	Terzo prestito nazionale (escluse le somme sottoscr. dal Consorzio)	43°43'	—1°27'	(+0°55', — 1° 5')
26	Quarto prestito nazionale (escluse le somme sottoscritte dal Consorzio)	43°42'	—1°39'	(+0°54', — 1°17')
27	Tutti i primi quattro prestiti nazionali	43°47'	—1°38'	(+0°59', — 1°16')
28	Imposte sulle esenzioni dal servizio militare (eserc. 1915-16 e 1916-17)	43°11'	—0°51'	(+0°23', — 0°29')
29	Ricchezza mobile riscossa mediante ruoli (eserc. 1914-15)	43°45'	—1°26'	(+0°57', — 1° 4')
30	Tasse sugli affari (eserc. 1913-14)	43°13'	—0°54'	(+ 0°25', — 0°32')

(*) Si è supposto che la Sardegna partecipasse con una quota corrispondente alla quota media per abitante di tutto il Regno.

Per la corretta interpretazione delle cifre della Tav. V, non è inutile premettere una osservazione sul particolare significato presentato dalla distribuzione dei centri dei fenomeni esaminati intorno a quello della popolazione. Nel caso in esame infatti, (V. Fig. 8), i centri dei 30 fenomeni si distribuiscono, rispetto al centro della popolazione, in modo da ricordare la distribuzione dei colpi attorno al centro di un bersaglio; senonchè qui gli scarti, più o meno grandi,

Centri medi di alcuni fenomeni (Italia, 1911).



Fig. 8.

invece che rivestire il carattere di accidentalità, vengono effettivamente a costituire un indice delle diverse attitudini o capacità degli abitanti a produrre questi fenomeni.

Tali fenomeni di carattere economico, demografico e sociale, relativi al periodo antebellico, erano variamente distribuiti: la maggior parte di quelli che attestano un più alto grado di sviluppo sociale ed economico, avevano un centro situato generalmente a Nord o a Nord Est rispetto a quello della popolazione; per i fenomeni invece che rispecchiano condizioni economico-sociali meno progredite, il centro si spostava da Sud a Sud Est. È da notare, però, che non tutti i fenomeni del primo gruppo sono da considerare vantaggiosi per il paese, nè tutti quelli del secondo costituiscono sintomi sfavorevoli. Infatti, se la popolazione del Nord predominava nelle manifestazioni culturali (senatori, stampa periodica), se era più dedita all'industria e più contribuiva al traffico ferroviario (viaggiatori, pacchi postali), se accumulava ed investiva maggiormente risparmi e capitali (depositi a risparmio, sottoscrizione ai prestiti) o pagava in più larga misura imposte o più largamente contribuiva alla beneficenza e alla previdenza (tasse sugli affari, spese di beneficenza dei bilanci provinciali, capitale assicurato presso l'Istituto Nazionale delle Assicurazioni); ciò non avveniva senza gravi ripercussioni in altri ordini di fenomeni.

Ed invero se le sue morti erano meno numerose, lo erano del pari le nascite; il cancro e la tubercolosi, poi, per non dire altri flagelli, scavavano solchi profondi tra i suoi abitanti, a differenza di quanto avveniva nel Sud.

Per converso gli abitanti dell'Italia meridionale, pagavano un largo tributo alla malaria, e, fra essi, prevalevano reati ed analfabetismo, e si osservava — dice il BOLDRINI — un anelito verso un maggiore benessere, come è palese dall'intensità con cui si giocava al lotto.

Comunque la popolazione del Mezzogiorno, coi suoi molti matrimoni e con le sue molte nascite, dava, anche allora, indubbi segni della sua vigoria fisica e morale.

Pur tacendo, infine, di fenomeni di non chiaro comportamento (mortalità per tifo, numero degli spacci di bevande alcoliche, consumo del tabacco) merita particolare rilievo il fatto del progressivo spostarsi dal N W verso S E dei centri dei prestiti nazionali.

Tale fatto sta indubbiamente a denotare il contributo sempre

più attivo che le popolazioni del Sud apportarono per la resistenza e per la vittoria comune.

Altitudini medie.

25. — *Altitudine media e mediana della popolazione italiana alle epoche dei vari censimenti.* — Nelle ricerche fin qui fatte sono state considerate soltanto la latitudine e la longitudine. La terza coordinata spaziale di cui ora ci occuperemo e cioè l'altitudine, per un paese montuoso come il nostro, è evidentemente di grande importanza.

Per le ricerche sull'alimentazione, già accennate nella Premessa, il GINI ebbe occasione di determinare a quale altitudine media visse la popolazione italiana e questo dato venne calcolato basandosi sulla classificazione della popolazione censita nel 1901, secondo l'altitudine della frazione centrale dei Comuni, classificazione eseguita dalla Direzione Generale della Statistica (*).

In seguito, occorrendo rifare il calcolo per conoscere l'altitudine media della popolazione, non solo dell'intero Regno, ma anche delle sue circoscrizioni amministrative e delle grandi ripartizioni geografiche, il GINI e il BOLDRINI cercarono di raggiungere una approssimazione maggiore adoperando l'altitudine della frazione più popolosa dei Comuni (e non più l'altitudine della rispettiva frazione centrale). Tale altitudine è stata fornita alla Direzione Generale della Statistica dall'Ufficio Studi del Touring e pubblicata nel 1° volume del Censimento del 1911. Le altitudini riportate in detto volume sono state oggetto di numerose rettifiche da parte dell'Ufficio Studi del Touring Club, rettifiche riportate nel vol. VI del Censimento del 1911.

L'altitudine media alla quale viveva, nel 1911, la popolazione delle Province, dei Compartimenti, delle grandi ripartizioni geografiche e di tutto il Regno d'Italia, è stata determinata moltiplicando l'altitudine della frazione più popolosa di ciascun Comune per la rispettiva popolazione e dividendo il risultato per il totale della popolazione, eseguendo cioè le medie ponderate delle diverse altitudini, alle quali sono stati attribuite quali pesi le popolazioni delle varie unità geografiche considerate.

Nella tabella che riportiamo, è segnata l'altitudine media alla quale viveva la popolazione delle singole Province, dei Compartimenti, delle grandi ripartizioni geografiche e del Regno al 10 giugno 1911, data del censimento.

(* Cfr. *Annuario Statistico Italiano 1905-1907*, Roma, 1908, pag. 73.

TAV. VI.

Altitudine media della popolazione italiana censita il 10 giugno 1911 nelle Provincie, nei Compartimenti, nelle grandi ripartizioni geografiche e nel Regno.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 10 giugno 1911	Altitudine media m.
Alessandria	807.696	212,1
Cuneo	646.719	493,6
Novara	756.326	306,0
Torino	1.213.709	358,8
PIEMONTE	3.424.450	338,0
Genova	1.050.052	96,2
Porto Maurizio	147.179	175,5
LIGURIA	1.197.231	105,9
Bergamo	511.237	332,2
Brescia	596.411	228,5
Como	616.212	337,5
Cremona	348.749	56,5
Mantova	349.048	30,5
Milano	1.726.548	148,8
Pavia	512.340	140,3
Sondrio	129.928	594,2
LOMBARDIA	4.790.473	198,4
Belluno	192.793	586,2
Padova	519.358	16,7
Rovigo	257.723	6,3
Treviso	491.166	79,9
Udine	628.081	179,1
Venezia	466.752	4,3
Verona	475.049	119,8
Vicenza	496.438	198,5
VENETO	3.527.360	122,6

Segue: Tav. VI.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 10 giugno 1911	Altitudine media m.
Bologna	577.729	132,4
Ferrara	307.924	7,4
Forlì	301.408	102,9
Modena	353.051	204,8
Parma	326.163	196,4
Piacenza	256.233	192,7
Ravenna	248.356	24,9
Reggio Emilia	310.337	145,8
EMILIA	2.681.201	129,4
Arezzo	283.663	355,7
Firenze	999.432	134,7
Grosseto	146.634	379,4
Livorno	135.765	18,8
Lucca	333.011	83,4
Massa Carrara	212.430	290,1
Pisa	342.250	102,4
Siena	241.530	392,7
TOSCANA	2.694.715	190,4
Ancona	319.709	199,0
Ascoli Piceno	253.635	320,6
Macerata	258.393	348,0
Pesaro Urbino	261.516	271,2
MARCHE	1.093.253	279,8
Perugia-UMBRIA	686.596	395,0
Roma-LAZIO	1.302.423	237,7

Segue : TAV. VI.

PROVINCE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 10 giugno 1911	Altitudine media m.
Aquila	407.005	748,5
Campobasso	349.618	606,2
Chieti	366.584	398,2
Teramo	307.490	339,9
ABRUZZI E MOLISE	1.430.697	536,3
Avellino	396.581	546,7
Benevento	254.726	409,9
Caserta	791.616	153,4
Napoli	1.310.785	39,7
Salerno	558.282	259,2
CAMPANIA	3.311.990	193,2
Bari	891.624	161,6
Foggia	467.020	266,3
Lecce	771.507	103,3
PUGLIE	2.130.151	163,4
Potenza-BASILICATA (ora LUCANIA) . .	474.021	619,8
Catanzaro	483.235	414,4
Cosenza	474.001	448,2
Reggio Calabria	444.915	234,3
CALABRIE	1.402.151	368,6
Caltanissetta	342.557	559,7
Catania	789.147	363,6
Girgenti	393.804	334,1
Messina	517.248	259,6
Palermo	795.631	255,6
Siracusa	476.765	270,4
Trapani	357.106	191,6
SICILIA	3.672.258	311,9

Segue : TAV. VI.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 10 giugno 1911	Altitudine media m.
Cagliari	520.213	197,6
Sassari	332.194	364,9
SARDEGNA	852.407	262,8
ITALIA SETTENTRIONALE (com- presa Emilia)	15.620.715	193,0
ITALIA CENTRALE (compresi Abruzzi e Molise)	7.207.684	300,7
ITALIA MERIDIONALE (Continen- tale)	7.318.313	245,7
REGNO D'ITALIA (entro gli anti- chi confini)	34.671.377	240,8

Abbiamo già accennato al fatto che la determinazione dell'altitudine media è stata fatta due volte e cioè in relazione alla popolazione presente censita nel 1901 e a quella censita nel 1911. L'altitudine media della popolazione italiana che risultò di m. 252,9 nel 1901, discendeva a m. 240,8 nel 1911, con una differenza in meno rispetto alla determinazione precedente di m. 12,1.

Circa le ragioni che possono aver prodotto la detta differenza notiamo come sia, in primo luogo, molto probabile che nei 10 anni trascorsi dal censimento del 1901 fino a quello del 1911, la quota altimetrica media della popolazione italiana sia discesa realmente, tanto più che con l'andare del tempo le città situate più in basso si sviluppano, generalmente, a scapito delle campagne circostanti situate più in alto. Tuttavia occorre pure ricordare che per base del calcolo si è presa una volta l'altitudine della frazione centrale e una volta quella della frazione più popolosa e che una certa importanza può essere attribuita anche alla diversa fonte dei dati delle altitudini. Infatti il primo calcolo di GINI e BOLDRINI, relativo alla popolazione censita nel 1901, fu eseguito partendo dalla classificazione degli abitanti secondo l'altitudine della frazione centrale di ciascun

Comune, eseguita dalla Direzione Generale della Statistica (*) : questa si valeva delle quote altimetriche fornite dall'Istituto Geografico Militare e desunte dalle tavolette della carta al 100.000, quote altimetriche che si riferivano, per ciascun Comune, generalmente alla soglia della casa comunale oppure a quella della cattedrale. Invece i dati impiegati da GINI e BOLDRINI per la determinazione dell'altitudine media della popolazione italiana censita nel 1911 sono stati quelli forniti alla Direzione di Statistica dall'Ufficio Strade del Touring Italiano — i soli dati di dominio pubblico disponibili — che erano costituiti dalle quote centrali delle frazioni più popolate. E si può aggiungere che essi erano poco esatti, se fra le molto numerose rettifiche, comunicate più tardi dal Touring alla Direzione della Statistica e riportate nel volume VI del Censimento 1911, e delle quali fu tenuto esatto conto, qualcuna, come quella relativa al Comune di Gamberale, in Provincia di Chieti, arrivava fino a mille metri!

Per le ragioni suesposte, non potendosi escludere a priori che l'errore che si commette possa essere anche notevole adoperando per il calcolo dell'altitudine media la quota altimetrica della frazione più popolosa di ciascun Comune, il GINI e il BOLDRINI hanno eseguito una ricerca di controllo e determinata l'altitudine media della popolazione della Provincia di Belluno, tenendo conto dell'altitudine di tutte le frazioni.

I risultati ottenuti sono i seguenti :

*Altitudine media della popolazione della Provincia di Belluno
(nel 1911).*

calcolata tenendo conto dell'altitudine della frazione più popolosa di ciascun Comune	calcolata tenendo conto dell'altitudine di tutte le frazioni di ciascun Comune
m. 586,8	m. 615,1

Il divario relativo fra i due calcoli risulta, dunque, del 4,8 %.

Tuttavia bisogna notare che questa percentuale può ritenersi costituisca un massimo.

La Provincia di Belluno è, infatti, una delle più montuose d'Ita-

(*) *Annuario Statistico Italiano 1905-1907*. Roma, 1908, pag. 73.

lia, e, ciò nonostante, in essa i centri più popolosi si trovano nelle valli.

Inoltre, mentre il totale del Regno entro gli antichi confini era composto da 8.323 Comuni con 25.101 frazioni in tutto, e quindi, in media, con 3,0 frazioni per ogni Comune, la Provincia di Belluno su 66 Comuni aveva un complesso di ben 365 frazioni e quindi una media di 5,5 frazioni per Comune. Si aggiunga poi che nella Provincia di Belluno solo 5 Comuni, corrispondenti a circa l'8 % del totale, erano composti di una sola frazione, mentre in tutto il Regno tale percentuale saliva al 41 %.

In alcune Provincie, come per esempio quelle sarde, i Comuni composti di più frazioni erano assenti o quasi.

Ciò posto, è evidente che, se i centri più popolosi stanno generalmente più in basso di quelli meno abitati, quanto più grande è il numero delle frazioni, tanto più grande sarà l'errore che si commetterà in meno stimando l'altezza media alla quale vive la popolazione sulla sola base dell'altitudine della frazione più popolosa di ciascun Comune. Poichè nella Provincia di Belluno l'accennata circostanza si verifica su larga scala, non ci si discosta troppo dal vero affermando che, tutt'al più, l'altitudine media alla quale viveva nel 1901 la popolazione italiana, può, per qualche Provincia, essere errata in difetto del 5 % : in generale però lo sarà in misura minore.

Arrotondando di conseguenza a 265 metri l'altitudine media alla quale viveva la popolazione italiana nel 1901 (calcolata in metri 259,5) si è quasi certi di non commettere un errore degno di rilievo.

Dietro consiglio del Prof. GINI, è stata calcolata, dalla Dott. VENERE, anche l'altitudine mediana della popolazione italiana censita nel 1911. Per la determinazione sono stati adoperati i dati forniti dal volume I del Censimento, tenuto conto delle modificazioni riportate nel volume VI, di cui si è già parlato. Poichè i calcoli precedenti consentono di formarsi un'idea approssimativa della distribuzione della popolazione per altitudine, i nuovi calcoli poterono opportunamente accorciarsi limitando la classificazione per altitudine degli abitanti, solo a quelli che avevano dimora a meno di 300 metri di altezza. Inoltre, prevedendo, grosso modo, che l'altitudine mediana sarebbe caduta tra i 100 e i 200 metri, le classi di altitudini comprese fra questi due limiti vennero scelte di ampiezza minore delle rimanenti.

Infatti, eseguita la somma della popolazione la cui dimora è

situata a più di 300 metri, si trovò che questa non superava la metà della popolazione italiana, confermando la nostra stima. L'ampiezza delle classi fu generalmente di 50 metri, ma dai 100 metri in poi essa venne diminuita per facilitare la determinazione in oggetto, fintanto che, individuata la classe di altitudine comprendente la mediana, la classe stessa venne suddivisa in classi parziali di un metro di ampiezza.

Così procedendo si pervenne al risultato che l'altitudine mediana della popolazione italiana nel 1911 era compresa tra 163 e 164 metri.

Analoghi calcoli sono stati eseguiti per la popolazione censita nel 1921; e naturalmente la determinazione è stata estesa, oltre che ai vecchi, ai nuovi confini. I risultati per 1911 e per 1921 sono riassunti qui appresso:

Altitudine media e mediana della popolazione (presente) italiana censita alle date sottoindicate:

ANNI	Vecchi confini		Nuovi confini	
	altitudine media	altitudine mediana	altitudine media	altitudine mediana
1911	240,8	163	—	—
1921	234,16	152	238,70	155

Come risulta dalla tabella, analogamente a quanto si è visto per l'altitudine media, anche quella mediana diminuisce dall'uno all'altro censimento.

Circa il divario di altitudine mediana tra i vecchi e i nuovi confini per il 1921, valgono poi evidentemente le considerazioni esposte per l'altitudine media.

È opportuno precisare che per determinare l'altitudine media del 1921 sono state adoperate le quote riportate nei volumi del censimento del 1921, che si riferiscono all'altitudine della frazione più popolosa di ciascun Comune.

Per i Comuni la cui quota non era indicata in detti volumi vennero utilizzati o l'Annuario Generale del Touring Club Italiano 1923 o le curve di livello tracciate sui fogli al 100.000 dell'Istituto Geografico Militare.

Per comodità del lettore si riporta la tabella delle altitudini medie delle Province, dei Compartimenti e delle grandi circoscrizioni territoriali del Regno.

TAV. VII.

Altitudine media della popolazione italiana, censita il 1° dicembre 1921 nelle Provincie, nei Compartimenti, nelle grandi ripartizioni geografiche e nel Regno.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Alessandria	781.750	212,74
Cuneo	623.598	487,39
Novara	724.855	310,47
Torino	1.253.443	367,19
PIEMONTE	3.383.646	341,51
Genova	1.176.069	90,93
Porto Maurizio	150.835	159,10
LIGURIA	1.326.904	98,68
Bergamo	555.686	331,54
Brescia	652.225	221,16
Como	630.977	338,78
Cremona	357.605	56,92
Mantova	376.901	30,02
Milano	1.906.231	146,44
Pavia	492.520	145,97
Sondrio	131.184	568,75
LOMBARDIA	5.103.239	195,87
Belluno	228.627	565,99
Padova	588.043	18,22
Rovigo	287.238	6,39
Treviso	548.487	78,55
Udine	719.996	173,15
Venezia	519.208	4,39
Verona	518.256	108,27
Vicenza	547.480	191,59
VENETO	3.957.335	119,52

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Bologna	642.674	132,47
Ferrara	346.015	7,42
Forlì	331.099	103,14
Modena	395.513	196,38
Parma	353.378	210,01
Piacenza	281.309	174,69
Ravenna	257.604	25,45
Reggio nell'Emilia	347.095	160,25
EMILIA . . .	2.954.687	130,32
Arezzo	298.519	379,48
Firenze	1.041.777	143,06
Grosseto	164.990	335,28
Livorno	143.723	18,26
Lucca	346.602	84,00
Massa e Carrara	225.944	246,84
Pisa	360.787	111,78
Siena	247.842	392,92
TOSCANA . . .	2.830.184	191,81
Ancona	334.654	200,73
Ascoli Piceno	265.164	319,63
Macerata	267.760	374,65
Pesaro e Urbino	280.718	264,53
MARCHE . . .	1.148.296	284,34
Perugia-UMBRIA	738.070	387,97
Roma-LAZIO	1.517.292	209,60

Segue: TAV. VII.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Aquila degli Abruzzi	395.799	738,93
Campobasso	340.909	606,21
Chieti	376.242	380,53
Teramo	319.990	331,73
ARUZZI E MOLISE . . .	1.432.940	522,32
Avellino	403.385	545,30
Benevento	267.171	398,86
Caserta	823.132	155,06
Napoli	1.468.640	43,03
CAMPANIA . . .	3.546.641	182,52
Bari delle Puglie	952.511	159,73
Foggia	485.502	272,02
Lecce	886.048	101,85
PUGLIE . . .	2.297.061	159,82
Potenza-BASILICATA	468.557	618,82
Catanzaro	514.123	406,08
Cosenza	495.884	443,66
Reggio di Calabria	502.311	231,20
CALABRIE . . .	1.512.318	360,32
Caltanissetta	385.675	565,52
Catania	876.265	343,15
Girgenti	411.281	331,79
Messina	582.064	247,07
Palermo	860.306	247,74
Siracusa	536.614	265,68
Trapani	409.247	190,86
SICILIA . . .	4.061.452	303,56

Segue: TAV. VII.

PROVINCIE E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Cagliari	530.232	195,86
Sassari	333.942	370,28
SARDEGNA	864.174	263,26
ITALIA SETTENTRIONALE	16.725.901	187,98
ITALIA CENTRALE (esclusi gli Abruzzi e Molise)	6.233.842	236,41
ITALIA MERIDIONALE	9.257.517	282,91
ITALIA INSULARE	4.925.626	296,49
REGNO (nei vecchi confini)	37.142.886	234,16

In riferimento ai nuovi confini vanno poi aggiunti i seguenti dati che concernono la Venezia Tridentina, la Venezia Giulia e Zara.

DISTRETTI E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Ampezzo	5.956	1311,30
Bolzano	102.368	567,77
Borgo	46.873	568,32
Bressanone	31.729	889,13
Brunico	40.183	1118,57
Cavalese	23.253	1097,36
Cles	45.817	869,28
Merano	52.761	472,65
Mezzolombardo	21.356	441,60
Primiero	11.244	739,47
Riva	29.132	215,66
Rovereto	69.369	390,14

DISTRETTI E COMPARTIMENTI	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
Silandro	25.043	1048,21
Tione	37.272	656,26
Trento	105.347	426,51
VENEZIA TRIDENTINA	647.703	621,81
Gorizia	94.853	182,83
Gradisca	33.683	63,87
Monfalcone	59.635	10,72
Sesano	27.802	315,34
Tolmino	37.697	365,66
Idria	14.085	488,24
Postumia	43.329	448,08
Tarvisio	8.224	739,23
Trieste	238.655	54,00
Capodistria	87.997	82,53
Lussino	19.272	30,95
Parenzo	61.564	159,30
Pisino	50.852	285,40
Pola	83.787	79,28
Volosca Abbazia	39.929	328,02
Zara e Isole annesse della Dalmazia.	18.623	16,62
VENEZIA GIULIA	919.987	152,36

Tenendo conto di questi dati relativi alle nuove Provincie, per l'Italia Settentrionale e quindi anche per il Regno entro i nuovi confini, le cifre sopra riportate per l'Italia entro i vecchi confini vengono sostituite da quelle contenute nella tabella che segue :

Italia entro i nuovi confini, 1921.

GRANDI RIPARTIZIONI GEOGRAFICHE	Popolazione presente al 1° dicembre 1921	Altitudine media
ITALIA SETTENTRIONALE	18.293.591	201,55
ITALIA CENTRALE (esclusi gli Abruzzi e Molise)	6.233.842	236,41
ITALIA MERIDIONALE	9.257.517	282,91
ITALIA INSULARE	4.924.626	296,49
REGNO	38.710.576	238,70

26. *Influenza dell'altimetria su alcuni fenomeni demografici.* —

Prima di procedere non è superfluo rilevare esplicitamente come il calcolo della quota altimetrica media alla quale vive la popolazione del paese e quella delle sue parti non si palesa meno fecondo di utili ed importanti applicazioni, di quante ne possa offrire il calcolo di altre coordinate medie.

Se finora, per classificare la popolazione delle varie zone secondo l'altitudine alla quale essa vive, è bastata l'osservazione comune, che ha supplito alla mancanza di dati precisi, e se è facile considerare come montanaro, in base ad un'impressione sommaria, il Valdostano e il Cadorino, o come abitante di pianura l'Emiliano e il Pugliese, non altrettanto facile è graduare le varie popolazioni d'Italia a seconda dell'altitudine media alla quale esse vivono, senza l'ausilio dei calcoli da noi eseguiti.

Spesso tale più precisa determinazione, oltre che utile, diventa necessaria.

L'assegnazione delle reclute, provenienti dalle varie parti del territorio, alle truppe di montagna o di pianura, è, per esempio, fatta in base ad una rozza classificazione dei distretti di reclutamento, la quale, anche se viene di tanto in tanto riveduta, non potrà mai adeguarsi alla realtà, finchè non verrà basata su attendibili valutazioni quantitative. Così è avvenuto che, alle truppe alpine, create nel 1872, solo quindici anni più tardi si cominciarono ad assegnare reclute abruzzesi, che, almeno in due Provincie, sono in media più montanare degli stessi cadorini (Belluno), e solo durante la guerra — più per la necessità di colmare i vuoti che per convinzione — furono a quelle truppe assegnate reclute delle varie Provincie montuose meridionali.

La conoscenza dell'altitudine media alla quale vive la popolazione di un paese e delle sue parti, può riuscire non meno utile per ricerche di carattere economico, sociologico e demografico. Di fatti, si potranno studiare le relazioni fra il reddito o la ricchezza, la fecondità, la mortalità, la durata della vita, il grado di istruzione, la condizione sociale, l'emigrazione, la statura, la costituzione corporea, ecc., da una parte e l'altitudine dall'altra, per precisare numerosissime opinioni correnti, le quali, per mancanza di adeguati mezzi statistici, non sono state finora nè confortate da un rigoroso esame scientifico, nè sottoposte al vaglio di una critica sicura.

Con procedimento perfettamente analogo a quello tenuto per stabilire le relazioni tra la latitudine e la longitudine a cui vive la

popolazione di un paese o delle sue parti, e l'intensità di alcuni fenomeni economici, sociali, biologici, etc. (n. 5 e 24), è possibile determinare anche per la coordinata qui considerata (altitudine) l'influenza di essa sui fenomeni accennati.

Faremo anche qui l'ipotesi che la intensità del fenomeno studiato rispetto alla popolazione, entro piccole circoscrizioni territoriali, non vari con l'altitudine.

Ne segue che in ogni ristretta unità territoriale considerata si può far coincidere il centro della popolazione col centro del fenomeno studiato. In base a questa ipotesi si possono quindi esaminare le differenze tra l'altitudine media della popolazione e le altitudini medie dei fenomeni.

Supponendo, per esempio, che, in ciascun circondario i fenomeni presi a considerare si manifestino alla stessa altitudine alla quale, in media, vivono gli abitanti, si potrà eseguire una media delle altitudini relative alla popolazione dei circondari, dando ad esse un peso proporzionale alla intensità dei fenomeni e verificare se, e di quanto, si discostino, eventualmente, l'altitudine media della popolazione e l'altitudine media di quei fenomeni.

La demografia offre numerosi esempi di fenomeni dipendenti dall'altimetria (le nascite e le morti, per esempio, si possono considerare come avvenute al livello medio sul mare degli abitanti, di ciascuna unità territoriale, provincia, circondario, ecc.), e, quindi, consente di determinare la natura di quella dipendenza e la misura di essa mediante l'ora accennato confronto.

Concludiamo dunque che la conoscenza dell'altitudine media degli abitanti delle singole unità territoriali, permette di risalire all'altitudine media locale di certi fenomeni: da questa si può passare a determinare l'altitudine media nazionale di tali fenomeni; il confronto tra questa altitudine trovata e quella media nazionale della popolazione, costituirà un indice della più o meno stretta dipendenza di quei fenomeni dall'altitudine.

27. — *Altitudine media delle nascite e delle morti, in base alla popolazione 1911.* — Come applicazione delle considerazioni premesse, riportiamo i risultati dei calcoli eseguiti da GINI e BOLDRINI per la determinazione dell'altitudine media delle nascite e delle morti.

Il calcolo è stato eseguito fissando come più piccole unità i circondari.

Risulta chiaro, dopo quanto si è più sopra esposto, che alle na-

scite e alle morti verificatesi nei vari circondari possiamo attribuire l'altitudine media della popolazione di tali unità territoriali e risalire da esse alle altitudini medie nazionali delle nascite e delle morti.

Nel caso di perfetta coincidenza nella distribuzione per altitudine degli abitanti, dei nati e dei morti, esse dovrebbero coincidere con l'altitudine media della popolazione del Regno, e non coincidere nel caso che vi fosse differenza nella distribuzione.

TAV. VIII.

Altitudine media della popolazione dei Compartimenti e di tutto il Regno desunta dall'altitudine della frazione più popolosa di ciascun Comune, ed altitudine media delle nascite e delle morti dei Compartimenti e di tutto il Regno desunte dall'altitudine media della popolazione di ogni Circondario.

COMPARTIMENTI	Altitudine media		
	della popolazione (1911)	delle nascite (1882-1901)	delle morti (1882-1901)
Piemonte	347.6	350.7	358.1
Liguria	105.9	108.4	109.9
Lombardia	198.4	200.7	200.6
Veneto	122.6	132.1	129.0
Emilia	129.4	127.3	123.1
Toscana	190.4	197.5	195.7
Marche	279.8	281.1	280.0
Umbria	395.0	397.3	397.0
Lazio	237.7	254.4	248.2
Abruzzi	536.3	541.1	542.9
Campania.	193.2	214.4	206.2
Puglie	163.5	169.2	174.1
Basilicata	619.8	622.3	621.2
Calabria	368.6	371.4	371.9
Sicilia	311.9	322.4	331.4
Sardegna	262.7	268.5	264.4
REGNO	240.8	255.1	257.2

La scelta del Circondario è stata determinata da un duplice ordine di ragioni: in primo luogo il Circondario, essendo unità territoriale più ristretta della Provincia, rende più plausibile l'ipotesi di attribuire alle nascite e alle morti l'altitudine media della popolazione dell'unità territoriale. In secondo luogo sull'altitudine media della Provincia influisce di più l'altitudine del circondario col Capoluogo più basso perchè più popoloso, mentre generalmente le nascite e le morti sono più frequenti nei Circondari più alti e meno popolosi.

Infatti, v'è ragione di ritenere che l'altitudine media dei Circondari che contengono il Capoluogo di Provincia e che sono più popolosi, sia inferiore all'altitudine media degli altri Circondari e che sono meno popolosi. Tale circostanza è messa in evidenza nel prospetto che segue (*).

Ordine crescente dell'altitudine della popolazione dei Circondari.	Numero dei Circondari contenenti il Capoluogo di Provincia.	Numero teorico dei Circondari contenenti il Capoluogo di Provincia.
—	—	—
1	34	23.6
2	22	18.5
3	5	13.5
4	4	6.5
5-6	3	4.5
7-8	1	1.4
oltre	—	1.0
TOTALE	69	69

La forte prevalenza del numero dei Circondari contenenti il Capoluogo di Provincia, nelle prime classi della graduatoria, ed il loro sistematico sostenersi al disopra del valore teorico, porge una nuova conferma sperimentale del fatto che le città sorgono e si sviluppano prevalentemente in basso, dove la facilità della circolazione e la feracità del suolo consentono uno sviluppo maggiore.

(*) I Circondari di ogni Provincia sono stati classificati in ordine crescente di altitudine media della popolazione, indicando con un numero progressivo il posto di ciascuno. È stato poi contato il numero delle volte che il Circondario contenente il capoluogo di Provincia occupa rispettivamente il primo, il secondo . . . l'ennesimo posto ed infine si è calcolato il numero teorico delle volte che ciò sarebbe dovuto avvenire per effetto del caso.

28. — *Altitudini medie dell'incremento di popolazione, dell'accrescimento naturale e del movimento migratorio.* — Riprendendo a considerare le altitudini medie di fenomeni demografici, si vogliono segnalare i calcoli eseguiti, per consiglio del Prof. GINI, dalla Dott. VENERE.

I fenomeni considerati sono l'incremento di popolazione, l'accrescimento naturale e il movimento migratorio (da e per l'estero e nell'interno). Il procedimento seguito è quello di cui si è avuto più volte occasione di parlare (N. 24) ; quanto ai dati si credette opportuno basarsi sulle altitudini medie della popolazione censita nel 1911, mentre i dati relativi alle Provincie e concernenti i fenomeni considerati furono ricavati dal *Movimento della popolazione, secondo gli atti dello Stato Civile* per gli anni 1912-13-14. Per l'incremento naturale furono considerati i dati al 31 dicembre rispettivamente del 1911 e 1914.

Il calcolo è stato eseguito partendo dai dati provinciali ; qui riportiamo i risultati dei calcoli per i diversi Compartimenti e pel Regno in complesso.

Altitudini medie della popolazione, dell'incremento di popolazione, dell'accrescimento naturale e del movimento migratorio (da e per l'estero e nell'interno) per i singoli Compartimenti e per il Regno.

COMPARTIMENTI	Altitudine media						
	della popolazione (1911)	dell'incremento di popolazione (1911-1914)	dell'accresci- mento naturale (1912-1913-1914)	Immigrazione (1912-1913-1914)		Emigrazione (1912-1913-1914)	
				interna	dall'estero	interna	per l'estero
Piemonte	338.0	347.40	340.17	335.88	349.01	330.98	349.04
Liguria	105.9	99.07	100.04	100.72	118.46	102.71	108.43
Lombardia	198.4	210.29	202.56	154.10	220.34	153.95	207.34
Veneto	122.6	118.55	116.73	87.23	153.66	89.37	145.79
Emilia	129.4	128.55	128.09	134.84	163.42	134.61	155.46
Toscana	190.4	201.08	206.73	196.09	175.82	199.84	164.08
Marche	279.8	275.88	278.01	274.06	284.39	274.95	283.77
Umbria	395.0	395.00	395.00	395.00	395.00	395.00	395.00
Lazio	237.7	237.70	237.70	237.70	237.70	237.70	237.70
Abruzzi	536.3	524.36	623.54	464.94	492.40	468.99	504.68
Campania	193.2	187.13	204.40	142.76	281.56	140.70	277.17
Puglie	163.5	151.55	156.24	156.93	189.22	159.01	193.79
Basilicata	619.8	619.80	619.80	619.80	619.80	619.80	619.80
Calabrie	368.6	366.19	358.70	369.83	386.61	325.56	376.08
Sicilia	311.9	316.36	229.66	311.21	320.03	302.55	308.69
Sardegna	262.7	259.32	266.11	290.64	271.15	289.12	302.27
REGNO	240.8	227.02	233.66	195.91	281.10	193.30	293.51

Dai dati della tabella è facile vedere come i Compartimenti nei quali l'altitudine media della popolazione è maggiore, siano precisamente gli stessi nei quali i fenomeni considerati assumono proporzioni notevoli. Tra questi fenomeni, l'incremento della popolazione e l'emigrazione da e per l'estero, palesano una concordanza con l'altitudine pressochè perfetta, porgendo per questa via nuova conferma di fatti ben noti.

Anche le cifre che esprimono le altitudini dei movimenti migratori interni, per quanto in lieve misura inferiori alle precedenti, stanno a denotare che il contributo ad essi recato dai diversi Compartimenti è stato tanto più rilevante quanto più cresce l'altitudine della popolazione dei Compartimenti stessi. Analogo risultato vale per l'accrescimento naturale. In sostanza, dai dati sopra riportati emerge, in modo che non lascia luogo a dubbi, che i fattori agenti sulla dinamica dei fondamentali fenomeni considerati, risultano tanto più attivi quanto più la popolazione dei vari Compartimenti gravita verso altitudini più elevate.

29. — *Altitudine media della popolazione, delle nascite, delle morti, dell'eccedenza naturale e della nuzialità (1881-1901)*. — In un suo lavoro ancora inedito, F. GIGLIO ha esteso al periodo 1881-1901, le ricerche relative all'altitudine media della popolazione, delle nascite, delle morti, dell'eccedenza naturale e della nuzialità, iniziate da GINI e BOLDRINI.

Di questo lavoro, cortesemente concessoci dall'A., riportiamo i principali risultati.

In primo luogo risulta che l'altitudine media della popolazione nel 1901 è, nella generalità dei casi, inferiore a quella del 1881: la popolazione del Regno che in corrispondenza a quest'ultima data, viveva alla media altitudine di m. 261,88, scendeva invece nel 1901 a m. 252,93.

Secondo i calcoli del GIGLIO i risultati ottenuti per i Compartimenti e per le circoscrizioni provinciali confermano questo generale movimento della popolazione italiana verso le minori altitudini; questo fatto è rispecchiato anche dall'altitudine media dell'incremento della popolazione nelle due epoche considerate. In relazione ai fenomeni demografici considerati dal GIGLIO, risulta che l'altitudine media delle nascite del ventennio 1881-1901 in tutto il Regno è quasi uguale, ma leggermente inferiore a quella delle morti; considerati però, i singoli compartimenti, si trova che per il Piemonte, gli Abruzzi

e Molise, le Puglie e la Sicilia l'altitudine media delle nascite è minore di quella delle morti, mentre per i rimanenti dodici Compartimenti avviene l'opposto.

Anche l'altitudine media dell'eccedenza naturale è generalmente superiore all'altitudine media delle nascite e delle morti.

L'altitudine media della eccedenza naturale della popolazione tanto nel Regno che nelle circoscrizioni è nettamente superiore all'altitudine media dell'incremento della popolazione.

Gli indici di cograduazione riportati nella tabella che segue

Indici di cograduazione fra le altitudini medie ed alcuni fenomeni.

FENOMENI	Altitudini medie della popolazione del		Altitudini medie delle	
	1881	1901	nascite 1881-1901	morti 1881-1901
1. Natalità	0,23	+ 0,21	+ 0,21	+ 0,22
2. Mortalità	+ 0,21	+ 0,23	+ 0,23	+ 0,22
3. Incremento naturale .	- 0,043	- 0,036	- 0,054	- 0,051
4. Nuzialità	+ 0,30	+ 0,30	+ 0,29	+ 0,30

e calcolati tra le altitudini medie della popolazione, delle nascite e delle morti nelle singole Province da una parte, e le frequenze relative di alcuni fenomeni demografici e sociali (natalità, mortalità, incremento naturale, nuzialità) dall'altra, attestano generalmente una relazione che il GIGLIO crede abbastanza significativa tra i fenomeni considerati.

30. — *La temperatura media di un paese, in relazione alla latitudine e all'altitudine.* — Per porgere una idea della grande utilità degli accennati metodi quantitativi volti allo studio sistematico dei diversi fenomeni distribuiti in una popolazione, ci basti, fra l'altro, accennare all'importanza di alcune grandezze (latitudine e altitudine) che hanno parte cospicua nella determinazione della temperatura media di un dato paese.

La conoscenza di codesta temperatura media è di importanza notevole nelle questioni che si collegano alla determinazione del fabbisogno alimentare delle popolazioni dei diversi paesi (*).

(*) C. GINI. *Sull'influenza di alcuni fattori sopra il fabbisogno alimentare dell'uomo medio*, nel « Nuovo Patto », Roma, 1919.

Le accennate ricerche sono notevolmente semplificate quando fra le grandezze che si prendono a considerare intercede una relazione che si possa considerare, grosso modo, lineare (*). In tali casi, infatti, chiamando con ω la misura del fenomeno considerato (ad es. il fabbisogno alimentare) e con α , β , γ le coordinate geografiche e altimetrica (alcune delle quali potrebbero anche non figurare), legate a quel fenomeno dalla detta relazione lineare, si potrebbe stabilire un legame funzionale del tipo

$$\omega = a \alpha + b \beta + c \gamma + d$$

in cui a , b , c , d , sono costanti opportunamente determinabili e caratteristiche per ciascun paese.

In questa ipotesi, in cui ci siamo posti, della linearità, possiamo alla relazione precedente sostituire l'analoga che intercede fra il valore medio $M(\omega)$ del fenomeno e i valori medi $M(\alpha)$, $M(\beta)$, $M(\gamma)$ delle coordinate :

$$M(\omega) = a M(\alpha) + b M(\beta) + c M(\gamma) + d$$

assumendosi quale media quella aritmetica, semplice o ponderata, nel quale ultimo caso i pesi debbono naturalmente essere gli stessi per tutte le variabili.

31. — *Temperatura media alla quale vive la popolazione italiana.* —

Tra i fenomeni per cui valgono le precedenti considerazioni, è da annoverare la temperatura.

È noto che le variazioni della temperatura si possono, all'incirca ritenere proporzionali alle variazioni della latitudine e dell'altitudine, essendo tali due elementi i preponderanti su quelli che influiscono sulle temperature stesse. Come risulta da un'indagine del LUGLI (**), indicando con t_0 la temperatura media annua alla lati-

(*) La questione è accennata da C. GINI nella memoria *Sull'utilità delle rappresentazioni grafiche*, in « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica ». Febbraio 1914. Roma, 1914, p. 5-6.

(**) A. LUGLI. *Sulla variazione media della temperatura in Italia con la latitudine ed altezza*, in « Annali dell'Ufficio Centrale di Meteorologia Italiana ». Serie II, Vol. IV, parte I. 1882.

Nello stesso lavoro il LUGLI osserva che il metodo adoperato per la determinazione delle costanti può essere opportunamente modificato in seguito alla circostanza che il valore di x , cioè della temperatura media alla latitudine

tudine φ_0 e al livello del mare, la temperatura t alla latitudine φ e all'altitudine h sarà data da un'equazione del tipo

$$t = t_0 + (\varphi_0 - \varphi) K + h r \quad (I)$$

in cui t_0 , K ed r sono costanti che si possono determinare quando si posseggono i dati sulla temperatura media annua rilevati in numerosi osservatori.

Il LUGLI, fondandosi sui dati di 34 stazioni, ha trovato per l'Italia i valori delle costanti che entrano nella equazione (I), la quale in base ad essi può scriversi

$$t = 13^{\circ}861 + (45 - \varphi) 0^{\circ}672 - 0^{\circ}00553h \quad (I')$$

dove $13^{\circ}861$ indica la temperatura media annua alla latitudine di 45° ed al livello del mare.

Ritornando alla prima formula notiamo col GINI (*) che, per determinare la temperatura media, converrà calcolare la media aritmetica delle altitudini prima e delle latitudini poi, dei vari Comuni attribuendo a ciascuno un peso proporzionale alla sua popolazione.

Il risultato ci fornirà un centro di gravità per altitudine e latitudine della popolazione. La formula sopra indicata, ci darà il modo di determinare la temperatura media annua di tale centro di gravità nell'ipotesi che la sua temperatura non sia soggetta ad influenze speciali di circostanze diverse dalla latitudine e dalla altitudine. E, in ogni modo, il fatto che le variazioni della temperatura si possono ritenere proporzionali a quelle della latitudine e dell'altitudine, per-

di 45° non è ragionevolmente determinato basando i calcoli su stazioni di latitudini molto differenti. Di modo che l'A. ha diviso gli osservatori in tre gruppi: alpino e prealpino, padano, appenninico e meridionale.

Dalle 10 stazioni del gruppo padano (di circa 45° di latitudine e piccola altitudine) ricava il valore $x = 13,5$.

Col metodo dei minimi quadrati e basandosi sull'equazione (I) (v. oltre) egli determina poi il valore di $K = 0,7197$ e poi il valore di r , separatamente per le stazioni del gruppo appenninico e meridionale e per le stazioni del gruppo alpino e prealpino, trovando rispettivamente, per il primo gruppo $r = -0^{\circ},00508$ e per il secondo $r = -0^{\circ},00532$. Dalla media di questi due valori l'A. ottiene in definitiva $r = -0^{\circ},00520$.

(*) C. GINI. *Sull'influenza di alcuni fattori, ecc.*, op. cit., pag. 9.

mette di assumere che la temperatura di tale centro di gravità, rappresenti la temperatura media a cui vive la popolazione.

In Italia, già per altre ricerche, come abbiamo avuto occasione di dire, si conoscevano la latitudine e l'altitudine media determinate da GINI e BOLDRINI e relative al 1911; perciò, mediante la relazione già riportata, si è potuto determinare facilmente la temperatura media alla quale vive la popolazione italiana, e si è trovato 13°,9 (*).

Dal citato studio del LUGLI non risulta in modo esplicito se i coefficienti trovati debbano ritenersi soggetti a variare, almeno per intervalli di tempo abbastanza lunghi.

Ammettendo, come sembra lecito supporre, che essi abbiano conservata nel 1921 la loro validità, la equazione (I') consente di determinare la temperatura media del Regno in corrispondenza alla data ora detta.

Sostituendo allora nella citata equazione, i valori della latitudine e dell'altitudine media è facile ottenere il valore della temperatura media che, per il Regno, entro i vecchi confini, risulta di 14°057.

Volendo estendere il calcolo ai nuovi confini è chiaro che i valori dei coefficienti dell'equazione del LUGLI non possono a priori ritenersi assolutamente identici a quelli precedenti.

Tuttavia anche qui non ci allontaniamo molto dal vero ritenendoli assai prossimi nei due casi e tali in ogni modo da non portare sensibili discordanze nel calcolo della temperatura media.

Di modo che, almeno grosso modo, l'equazione (I') può ritenersi ancora idonea: ed essa, per il Regno entro i nuovi confini fornisce per la temperatura media il valore 13°944.

Il fatto di avere ottenuto per la temperatura un minor valore non ha bisogno di chiarimenti, ove si consideri la maggiore latitudine e la più accidentata configurazione orografica delle Province re-dente.

RIASSUNTO.

Questo articolo costituisce un contributo allo studio dei centri di popolazione e vuol rappresentare, principalmente per l'Italia, una sintesi di tutto ciò che è stato fatto su questo argomento nel decorso quindicennio, ad iniziativa o per suggerimento del prof. GINI, con la

(*) Cfr. C. GINI. *Sull'influenza di alcuni fattori*, ecc., op. cit., pag. 10.

collaborazione dei prof.ri BOLDRINI, GALVANI e UGGÈ, e dei d.ri VENERE e GIGLIO.

Ricordate le definizioni e le proprietà del centro di gravità (o centro medio) e di quello mediano, se ne espongono le applicazioni alla determinazione dei centri della popolazione per la distribuzione degli abitanti di un territorio. Nel caso particolare di una distribuzione uniforme degli abitanti, i centri della popolazione corrispondono ai centri territoriali. Gli AA. esaminano anche l'opportunità di passare dalla considerazione del territorio a quella di una sua rappresentazione piana.

L'importanza della determinazione dei centri della popolazione e del territorio è stata messa chiaramente in evidenza, insieme alla possibilità di considerare altresì i centri relativi ad alcuni fenomeni quantitativi strettamente connessi con la popolazione di un dato territorio.

Gli AA. passano quindi ad esaminare il significato delle coordinate medie, considerate separatamente quali rette interpolatrici, in determinate direzioni, col metodo dei minimi quadrati, della distribuzione data, ed infine ad esporre la definizione delle coordinate mediane.

Successivamente sono state brevemente passate in rassegna le applicazioni fatte nei diversi paesi e sono state dettagliatamente esposte quelle eseguite in Italia, nonchè i metodi a tal fine impiegati.

Anche le coordinate mediane dovevano naturalmente trovare posto nella presente trattazione, ciò che ha condotto ad utili raffronti con le determinazioni eseguite negli Stati Uniti del Nord America, nella Russia ed altrove.

I due concetti di centro di gravità e centro mediano, in talune pubblicazioni straniere non sempre tenuti nel passato ben distinti, sono stati esattamente definiti e studiati nelle loro proprietà, così da augurarsi che in avvenire nessuna confusione sia possibile per quanto concerne le denominazioni e le proprietà da attribuire a ciascuno di detti centri.

Lo sviluppo qui dato alla parte fondamentale della teoria dei centri di popolazione vorrebbe preparare il terreno ad un più ampio uso di questi indici sintetici, il cui valore scientifico e pratico apparirà sempre più grande man mano che il sistematico calcolo di essi per un determinato paese permetterà di mettere in luce la dinamica di taluni fenomeni. Tali centri rivelano infatti in modo sintetico molteplici aspetti dei numerosi fenomeni di svariata natura, riferentisi alla popolazione di un determinato territorio.

Gli AA. mettono infine, in evidenza le relazioni che intercedono tra i centri della popolazione e gli analoghi del territorio, tra i centri della popolazione e gli analoghi riferentisi ai vari fenomeni strettamente connessi alla popolazione stessa.

Per l'Italia sono stati calcolati i centri relativi a numerosi fenomeni demografici e sull'esame di essi sono state basate varie considerazioni per chiarire l'importanza di tali applicazioni.

Gli AA. parlano poi dell'altitudine media della popolazione il cui calcolo per l'Italia è stato fatto sui dati dei diversi censimenti, da quello del 1881 a quello del 1921.

Così pure sempre per l'Italia, essi hanno eseguito la determinazione dell'altitudine mediana in relazione al censimento 1921, entro i nuovi e i vecchi confini.

Analogamente a quanto è stato fatto per le altre due coordinate e fondandosi sugli stessi concetti, è stata completata l'analisi di vari fenomeni già esaminati, mediante considerazioni relative alla terza coordinata (altitudine). L'altitudine delle nascite e delle morti e di altri fenomeni demografici, quali l'incremento di popolazione, l'accrescimento naturale e il movimento migratorio, è studiata dettagliatamente, in modo da far risultare l'importanza di tali indagini, che investono in pieno un problema di grande attualità, quello dello spopolamento montano.

È stato anche considerato il caso di fenomeni che possono riguardarsi come funzioni lineari di altri. Tali fenomeni sono contraddistinti dalla proprietà che le loro intensità medie vengono ad essere determinate mediante la media aritmetica delle intensità dei fenomeni di cui essi sono funzioni. Un fenomeno di questa natura è, per esempio, la temperatura, la quale, come è noto, è funzione della latitudine e della altitudine; come risulta da particolari ricerche di meteorologi (vedasi ad esempio l'equazione del IUGLI), la dipendenza ha appunto carattere lineare.

RÉSUMÉ.

Cet article présente une contribution à l'étude des centres de population et a pour but de donner une synthèse de ce qui a été écrit sur ce sujet, surtout en Italie pendant les quinze dernières années, par l'initiative ou d'après les indications du prof. GINI, en collabora-

tion avec les professeurs BOLDRINI, GALVANI, UGGÈ et les docteurs VENERE et GIGLIO.

Après avoir rappelé les définitions et les propriétés du centre de gravité (ou centre moyen) et du centre médian, les AA. en exposent les applications à la détermination des centres de la population pour la distribution des habitants d'un territoire. Dans le cas particulier d'une distribution uniforme des habitants les centres de la population correspondent au centres du territoire.

Les AA. examinent aussi l'opportunité de passer de la considération du territoire à sa représentation sur une surface plane.

Les AA. font bien ressortir l'importance de la détermination des centres de la population et du territoire, ainsi que la possibilité de prendre en considération aussi les centres se référant à quelques phénomènes quantitatifs étroitement liés à la population d'un territoire donné.

Ils passent ensuite à examiner la signification des coordonnées moyennes, considérées séparément comme lignes droites interpolatrices de la distribution donnée, dans certaines directions déterminées, au moyen de la méthode des moindres carrés ; ils donnent, enfin, la définition des coordonnées médianes.

Un exposé sommaire est fait des applications que l'on a faites dans les différents pays, en s'arrêtant tout spécialement sur celles qui ont été faites en Italie et sur les méthodes employées à cet effet.

Les coordonnées médianes devaient aussi trouver leur place dans cet exposé, ce qui a suggéré des comparaisons utiles avec les déterminations faites aux États-Unis de l'Amérique du Nord, en Russie et dans d'autres pays.

Les concepts du centre de gravité et du centre médian, qui n'ont pas toujours été bien distingués dans quelques publications étrangères, sont exactement définis et étudiés dans leur propriétés, ce qui permet d'espérer qu'à l'avenir aucune confusion ne sera plus possible dans la dénomination et dans les propriétés à attribuer à chacun des deux centres en question.

L'ampleur donnée ici à la partie fondamentale de la théorie des centres de population devrait préparer le terrain pour un usage plus fréquent de ces indices synthétiques, dont la valeur scientifique et pratique apparaîtra toujours plus grande à mesure que leur calcul systématique pour un pays donné permettra de mettre en lumière la dynamique de certains phénomènes. En effet, ces indices révèlent d'une façon synthétique les aspects multiples de beaucoup de phé-

nomènes de nature diverse concernant la population d'un territoire déterminé.

Les AA. mettent enfin en lumière les relations que l'on observe entre les centres de la population et ceux du territoire, entre les centres de la population et ceux de divers phénomènes, étroitement liés au nombre des habitants.

Pour l'Italie, on a calculé les centres pour de nombreux phénomènes démographiques et sur leur examen on a basé diverses considérations tendant à mettre en évidence l'importance de ces applications.

Les AA. parlent ensuite de l'altitude moyenne de la population, dont le calcul pour l'Italie est fait sur les données des divers recensements, à partir de celui de 1881 jusqu'à celui de 1921.

Ils ont aussi pris en considération l'altitude médiane de la population, et ils en ont fait la détermination pour la population italienne recensée en 1921, soit dans les limites de l'ancien que du nouveau territoire.

Par analogie à ce qui a été fait pour les deux autres coordonnées et sur la base des mêmes principes, l'analyse des divers phénomènes examinés est complétée par les considérations concernant la troisième coordonnée (celle de l'altitude). L'altitude moyenne des naissances, des décès et d'autres phénomènes démographiques, tels que l'accroissement total, l'accroissement naturel de la population et celui qui provient du mouvement migratoire, est étudiée en détail, en faisant ressortir l'importance de ces recherches, qui se rattachent à un problème de grande actualité, c.à.d. à celui du dépeuplement des montagnes.

Les AA. ont pris aussi en considération le cas des phénomènes qui peuvent être regardés comme fonctions linéaires d'autres phénomènes. Ces phénomènes se distinguent par la propriété que leurs intensités moyennes sont déterminées par la moyenne arithmétique des intensités des phénomènes dont ils sont fonctions. Un phénomène de cette nature est, par exemple, celui de la température qui est, comme on le sait, une fonction de la latitude et de l'altitude : les recherches de certains météorologues (voir par exemple l'équation de LUGLI) ont démontré que dans ce cas la dépendance a justement un caractère linéaire.

E. MERZRATH

**Anpassung von Flächen an zweidimensionale
Kollektivgegenstände und ihre Auswertung
für die Korrelationstheorie**

I. EINLEITUNG.

Der Aufbau der Korrelationstheorie gründet sich auf zwei von einander wesentlich verschiedene Betrachtungsweisen ein und desselben Problems. Geht die einfachere Korrelationstheorie davon aus, ihre Schlüsse bezüglich der Beschaffenheit eines mehrdimensionalen Kollektivs unmittelbar aus der Verteilung heraus zu gewinnen, so gilt bezüglich der Flächenkorrelation, dass man über den Umweg der Angleichung von Flächen an die Verteilung zu Ergebnissen gleicher Art gelangen will.

Die Entstehung dieses Zweiges der Korrelationstheorie geht zurück auf BRAVAIS, DICKSON und GALTON, als ältesten Mathematikern, die sich mit dem Problem der Korrelation überhaupt befasst haben. Weitere Mathematiker wie GRAM, THIELE, PEARSON, EDGEWORTH, AKESSON, BRUNS, CHARLIER, WICKSELL und HAGSTRÖM, um nur die bedeutendsten unter ihnen zu nennen, waren es sodann, die die Korrelationstheorie der Flächen zu einem selbständigen Gebiet der Statistik ausbauten. Kennzeichnend für die Entwicklung dieser Theorie ist jedoch, dass erst die Untersuchungen und Arbeiten aus jüngster Zeit zu befriedigenden Ergebnissen geführt haben. Es sei hier auf die Arbeiten von VAN DER STOCK (1907-08), CHARLIER (1914), JÖRGENSEN (1916), WICKSELL (1917), EDGEWORTH (1905-1917), PEARSON (1925),

und RHODES (1925) verwiesen (*), insbesondere insoweit, als sie sich auf die Darstellung von Flächen des sogenannten Typus AA

$$1) \quad F(x, y) = \Phi(x, y) + \sum \sum (-1)^{p+q} \frac{A_{p,q}}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} \Phi(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \quad \text{beziehen,}$$

wo $\Phi(x, y)$ die Normalfunktion
$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - r_{1/2}^2} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 - 2xy + y^2)}$$

bezeichnet. In Anlehnung an die in diesen Arbeiten entwickelten Gedankengänge sollen die folgenden Ausführungen nun einen Beitrag zur Korrelationstheorie der stochastischen Funktionen liefern. Aufgabe und Zweck der Ausführungen soll es insbesondere sein, neben einer flächenhaften Darstellung eines Kollektivs in Gestalt einer mehrparametrischen analytischen Funktion zu Aussagen über die Beschaffenheit des Kollektivs und zwar vorzugsweise solcher, die den stochastischen Zusammenhang betreffen, zu gelangen. Der Ermittlung solcher Aussagen ist besonderer Wert beigemessen worden, da sie allein es sind, die letzten Endes eine Darstellung des Kollektivs in Form stochastischer Funktionen erst rechtfertigen. Mit der Darstellung eines Kollektivs durch eine stochastische Funktion allein dürfte noch nicht viel gewonnen sein; erst dadurch, dass durch derartige Funktionen neue Möglichkeiten einer korrelationstheoretischen Auswertung sich ergeben, erhält die Ermittlung solcher stochastischer Funktionen ihren Sinn. Unter diesem Gesichtswinkel betrachtet, soll durch die folgenden Ausführungen vornehmlich der letzten Kapitel eine Erweiterung der Korrelationstheorie angestrebt werden.

Der Betrachtung zugrundegelegt sind dabei die beiden folgenden Darstellungsformen

$$2) \quad P^n(x, y) e^{-1/2 \left(\frac{x^2}{\mu_{2/0}} + \frac{y^2}{\mu_{0/2}} \right)} \quad \text{Darstellungsform I}$$

$$3) \quad P^n(x, y) e^{-\frac{x^2 + y^2}{\mu_{2/0} + \mu_{0/2}}} \quad \text{Darstellungsform II}$$

in welchen $P^n(x, y)$ als abkürzende Bezeichnung für ein Polynom n ten Grades in x und y dienen möge. Es handelt sich hier also um etwas spezialisierte Formen des von Pearson bereits verwendeten Typus AA , deren erste zudem auch bereits von van der Stock

(*) Vergleiche das Literaturverzeichnis am Schluss.

bei einer Approximation einer beidseitig unbegrenzten Frequenzfunktion durch HERMITE'sche Polynome benutzt worden ist.

2. DIE MEHRPARAMETRISCHE DARSTELLUNGSFORM.

Soll eine der tatsächlichen Beschaffenheit des Kollektivs Rechnung tragende Auswertung der stochastischen Funktion erfolgen, so ist zuvor erforderlich, eine solche Funktion zu ermitteln, die sich dem Kollektiv möglichst genau anpasst. Derartige, den Kollektivgegenstand mit hinreichender Genauigkeit wiedergebende Funktionen haben erst die eingangs erwähnten neueren Arbeiten gebracht. Ihre Begründung findet diese Tatsache darin, dass in den Darstellungsformen der älteren Autoren nicht in ausreichendem Masse Konstanten zum Zwecke einer guten Anpassung an beliebige Kollektivgegenstände zur Verfügung gestanden haben. Die teilweise nur geringe Zahl an verfügbaren Parametern liess in vielen Fällen eine brauchbare Darstellung des Kollektivs in Form analytischer Funktionen nicht zu. Erkenntlich wird dieser Umstand daran, dass bei einer nur geringen Zahl an verfügbaren Parametern Beziehungen zwischen den $\mu_{//g}$ der Verteilungsfläche bestehen müssen, die für die $\mu_{//g}$ des Kollektivs nicht auch nur angenähert erfüllt zu sein brauchen. Unter $\mu_{//g}$ sei dabei das f te Moment in x und das g te Moment in y verstanden. Zum Zwecke der Vermeidung unnützer Wiederholungen sei allgemein die folgende Terminologie benutzt:

$$4) \quad \mu_{//g} = \sum_{ij} p_{ij} x_i^f y_j^g \quad \text{bzw.} \quad \mu_{//g} = \iint z x^f y^g dx dy \quad r_{//g} = \frac{\mu_{//g}}{\mu_{2/0}^{1/2} \mu_{0/2}^{1/2}}$$

wenn mit p_{ij} die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses, bei welchem x den Wert x_i und y den Wert y_j annimmt, bezeichnet ist. Für den Fall normaler Korrelation beispielsweise gelten die folgenden Beziehungen zwischen den einzelnen $\mu_{//g}$.

Zunächst folgt aus der Tatsache, dass die normale Korrelation von linearer Regression ist, dass die Beziehung

$$5) \quad \mu_{h/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\mu_{2/0}} \mu_{h+1/0} \quad \mu_{1/h} = \frac{\mu_{1/1}}{\mu_{0/2}} \mu_{0/h+1}$$

für alle h gelten muss. Ueberdies lässt sich durch Integration leicht die Richtigkeit folgender Beziehungen feststellen

$$\begin{aligned} r_{3/1} = r_{1/3} = 3 r_{1/1} & \quad r_{2/2} = 1 + 2 r_{1/1}^2 & \quad r_{4/0} = r_{0/4} = 3 \\ r_{5/1} = r_{1/5} = 15 r_{1/1} & \quad r_{6/0} = r_{0/6} = 15. \end{aligned}$$

Des weiteren gilt im Falle normaler Korrelation allgemein die Beziehung

$$6) \quad r_{i/k} = r_{k/i}$$

was man wie folgt erkennt :

$$\begin{aligned} \mu_{i/k} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x^i y^k e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + j y^2)} dx dy = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^{k+1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \xi^i \eta^k e^{-(\xi^2 + 2\lambda \xi \eta + \eta^2)} d\xi d\eta \\ \mu_{k/i} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} y^i x^k e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + j y^2)} dx dy = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^{i+1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \eta^i e^{-(\xi^2 + 2\lambda \xi \eta + \eta^2)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Die Integrale

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \xi^i \eta^k e^{-(\xi^2 + 2\lambda \xi \eta + \eta^2)} d\xi d\eta \quad \text{und} \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \eta^i e^{-(\xi^2 + 2\lambda \xi \eta + \eta^2)} d\xi d\eta$$

stimmen aber überein, da sie durch Vertauschung der Variablen ξ und η auseinander hervorgehen. Es gilt somit die Beziehung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^{k+1} \mu_{k/i} = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^{i+1} \mu_{i/k}.$$

Da $\alpha = \frac{1}{2(1 - r_{1/1}^2)} \cdot \frac{1}{\mu_{2/0}}$ und $j = \frac{1}{2(1 - r_{1/1}^2)} \cdot \frac{1}{\mu_{0/2}}$ ist,

so erhält man nach beiderseitiger Multiplikation mit $\left[2(1 - r_{1/1}^2)\right]^{\frac{i+k}{2}}$

$$\mu_{k/i} \mu_{2/0}^{i/2} \mu_{0/2}^{k/2} = \mu_{2/0}^{k/2} \mu_{0/2}^{i/2} \mu_{i/k}$$

$$r_{k/i} = r_{i/k}$$

und damit.

Man erkennt hiernach die starke innere Gebundenheit der $\mu_{i/k}$ Werte untereinander bei einer normalen Verteilungsfunktion,

welche natürlich im Falle allgemeiner beliebiger Verteilungsgesetze, wie schon erwähnt, nicht auch nur näherungsweise erfüllt zu sein brauchen. Das normale Verteilungsgesetz wird aus diesem Grunde nur in den wenigsten Fällen ausreichen, eine einigermaßen wahrheitsgetreue Wiedergabe des Kollektivgegenstandes geben zu können (*). Beziehungen ähnlicher Art werden bei allen Darstellungsformen bestehen, in welchen die Zahl der vorhandenen Parameter wie im Falle normaler Korrelation nur eine kleine ist. Die Behauptung Pearson's, nur dann zu befriedigenden Ergebnissen in der analytischen Darstellung von Kollektivgegenständen kommen zu können, wenn eine ausreichende Parameterzahl zur Verfügung steht, wird hiernach als durchaus gerechtfertigt erscheinen müssen und gleichzeitig die Notwendigkeit der Verwendung mehrparametrischer Funktionen zur Darstellung von Kollektiven nachgewiesen sein.

3. DAS PROBLEM DER ANPASSUNG UND DIE MOMENTENMETHODE.

Das in der Statistik allgemein gebräuchliche Verfahren zur Ermittlung von Anpassungskurven, zweidimensional gesehen von Anpassungsflächen, ist durch die sogenannte Momentenmethode gegeben.

Versucht man, eine vorgelegte integrierbare Funktion φ durch eine Funktion bekannter Art mit den unbestimmten Parametern $a_0, a_1 \dots a_n$

$$f(x, a_0 \dots a_n)$$

möglichst gut zu approximieren, so wird man auf Grund der Forderung, dass $\int (\varphi - f)^2 dx$ ein Minimum sein soll, zu folgenden Bestimmungsgleichungen

$$7) \quad \int \frac{\delta f}{\delta a_i} f(x) dx = \int \frac{\delta f}{\delta a_i} \varphi(x) dx \quad i = 0, 1 \dots n$$

gelangen. Mit Ausnahme des Falles aber, wo $f(x)$ ganz und rational ist, tritt die Unannehmlichkeit auf, dass die Bestimmungsgleichungen für die Parameter $a_0 \dots a_n$ im allgemeinen äusserst unhandlich werden. Praktisch kann daher die Minimummethode im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate nur in den seltensten Fällen Verwen-

(*) Siehe auch Tschuprow in seinem Buche "Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie", S. 60.

finden. An ihre Stelle tritt deshalb die sogenannte Momentenmethode, eine Methode, die besonders ihrer Einfachheit wegen in der Statistik weitgehendst Verwendung gefunden hat.

Für endliche Bereiche wird eine Approximation einer Funktion φ durch eine $n + 1$ Parameter enthaltende Funktion f immer dann als gute gelten können, wenn man die in f enthaltenen Parameter auf Grund der folgenden 3 Forderungen bestimmt :

$$8) \quad \begin{aligned} 1.) & \int \left(\varphi - \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^2 dx = \text{Minimum} \\ 2.) & \int \left(f - \sum_{i=0}^n b_i x^i \right)^2 dx = \text{Minimum} \\ 3.) & \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad \text{oder } a_i = b_i \text{ für alle } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Hierbei sind die Integrationen in 1) und 2) über das gesamte Approximationsintervall zu erstrecken.

Die auf diese Weise erzielte Approximation kann dann in dem Sinne als gute gelten, als die für die beiden Funktionen φ und f bestimmten im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate besten Approximationen durch Polynome n ten Grades einander gleich sind. Der Beweis selbst ist in drei Zeilen hingeschrieben. Aus den Forderungen 1) und 2) folgt,

$$\begin{aligned} \int x^k \varphi dx &= \int \sum_{i=0}^n a_i x^{i+k} dx \\ \int x^k f dx &= \int \sum_{i=0}^n b_i x^{i+k} dx \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

woraus unter Berücksichtigung der Forderung 3) sich ohne weiteres

$$9) \quad \int x^k \varphi dx = \int x^k f dx \quad k = 0, 1, \dots, n \quad \text{ergibt.}$$

Dieses Ergebnis ist hergeleitet worden für den Fall, dass es sich um endliche Approximationsintervalle handelt. Ist das Approximationsintervall einseitig oder auch beidseitig unbegrenzt, versagt diese Schlussweise. Gerade der Fall der beiderseitigen Unbegrenztheit des Approximationsintervalles ist es aber, der später von besonderem Interesse ist. Aus diesem Grunde sei eine Herleitung der Momentenmethode auch für diesen Fall gegeben.

Der Beweis verläuft ähnlich wie der vorausgegangene. Nur kann hier zufolge der Unbegrenztheit des Approximationsintervalles eine Approximation der Funktionen φ und f durch Polynome nicht erfolgen. Vielmehr wird man zur Approximation solche Funktionen $A(x)$ heranziehen müssen, für die zumindest das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$ existent ist. Nimmt man daher an Stelle der Po-

lynome selbst in diesem Falle die mit dem Faktor $e^{-2\lambda^2 x^2}$ multiplizierten Polynome als Approximationsfunktionen und betrachte gleichzeitig nicht die Funktionen φ und f , sondern die mit dem Faktor $e^{2\lambda^2 x^2}$ multiplizierten Funktionen als zu approximierende Funktionen, so verläuft unter der Voraussetzung, dass es zu den Funktionen f und φ ein λ gibt, für das die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi e^{2\lambda^2 x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{2\lambda^2 x^2} dx$$

existent sind, der Beweis wie folgt.

An die Stelle der drei Forderungen bei begrenztem Approximationsintervall treten hier die drei Forderungen

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{\varphi} - e^{-2\lambda^2 x^2} \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^2 dx = \text{Minimum}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{f} - e^{-2\lambda^2 x^2} \sum_{i=0}^n b_i x^i \right)^2 dx = \text{Minimum}$$

$$3) \sum_{i=0}^n a_i x^i e^{-2\lambda^2 x^2} = \sum_{i=0}^n b_i x^i e^{-2\lambda^2 x^2} \text{ oder } a_i = b_i \text{ für } i = 0, 1, \dots, n$$

wobei $\bar{\varphi} = \varphi e^{2\lambda^2 x^2}$ und $\bar{f} = f e^{2\lambda^2 x^2}$

zu setzen ist.

$$\text{Daraus folgt} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi} x^k e^{-2\lambda^2 x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^n a_i x^{i+k} e^{-2\lambda^2 x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f} x^k e^{-2\lambda^2 x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^n b_i x^{i+k} e^{-2\lambda^2 x^2} dx$$

und unter Berücksichtigung der Forderung 3) ergibt sich

$$g') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi x^k dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f x^k dx \quad k = 0.1 \dots n$$

Die auf Grund dieser Methode erzielte Approximation hätte dann in dem Sinne als gute zu gelten, als die mit $e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$ multiplizierten Funktionen φ und f in ihren Annäherungen durch Funktionen von der Gestalt $P^n(x) e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$ miteinander übereinstimmen.

Mit Rücksicht auf die später zu verwendende Form für die Funktion f sei die eben angestellte Betrachtung für den Fall

$$f = P^n(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

noch einmal besonders dargelegt, wobei auch hier wieder unter $P^n(x)$ ein Polynom n ten Grades von x verstanden sein möge.

$$\text{Es war} \quad \bar{\varphi} = \varphi e^{\frac{x^2}{2\lambda^2}} \quad \bar{f} = f e^{\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

Wählt man demnach $\lambda^2 > \sigma^2$ so wird

$$\bar{f} = P^n(x) e^{-\frac{\lambda^2 - \sigma^2}{2\lambda^2\sigma^2} x^2}$$

eine Funktion sein, für welche das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f} dx$, wie gefordert, existent ist. Wählt man insbesondere λ so, dass

$$\frac{\lambda^2 - \sigma^2}{2\lambda^2\sigma^2} = \frac{1}{2\lambda^2}$$

also $\lambda^2 = 2\sigma^2$ wird, so wird an die Stelle der Approximation

$$\bar{f} \cong \sum_{i=0}^n b_i x^i e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

die Identität

$$\bar{f} \equiv \sum_{i=0}^n b_i x^i e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

treten, sodass in diesem Falle also sogar die Annäherung an $\bar{f} = f e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ durch die Approximationsfunktion identisch mit \bar{f} übereinstimmen würde. Die Funktion \bar{f} kann somit als gute Annäherung an $\bar{\varphi}$ und damit auch f als gute Annäherung an φ angesehen werden. Die

Uebertragung der vorausgegangenen Betrachtungen auf Funktionen von zwei veränderlichen bietet keine Schwierigkeit. In diesem Falle treten an die Stelle der Momentengleichungen für eine Dimension die Gleichungen

$$10) \quad \iint \Phi(x, y) x^r y^s dx dy = \iint F(x, y) x^r y^s dx dy.$$

4. DIE FLÄCHENHAFT E DARSTELLUNG DES KOLLEKTIVGEGENSTANDES.

Bei den praktischen Untersuchungen der Statistik tritt das oben erörterte Problem der Anpassung in anderer Form auf. Die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\Phi(x, y)$ sind als solche nicht bekannt, vielmehr ist an ihrer Stelle nur das Kollektiv mit seinen für jedes Klassenintervall gegebenen Verteilungswerten vorhanden. Bekanntermassen geht hier jedoch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik so vor, dass sie, eindimensional betrachtet, Z_i als den Wert des über das Intervall $(x_i - 1/2, x_i + 1/2)$ erstreckten Integrals irgendeiner analytischen Funktion φ ansieht und damit gleichzeitig der Frage nach der Darstellung eines Kollektivs in Form einer analytischen Funktion einen Sinn verleiht. Man erhält alsdann, indem man näherungsweise setzt:

$$\Sigma z_i x_i^v = \Sigma x_i^v \int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} \varphi(x) dx = \Sigma \int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} x^v \varphi(x) dx = \int x^v \varphi(x) dx$$

als Ergebnis der Betrachtung die sogenannten Momentengleichungen in der Gestalt

$$11) \quad \mu_v = \Sigma z_i x_i^v = \int x^v f(x) dx$$

entsprechend im zweidimensionalen

$$11') \quad \mu_{r/s} = \Sigma p_{i/g} x_i^r y_i^s = \iint_B x^r y^s F(x, y) dx dy$$

wobei für B zunächst jener Bereich zu nehmen wäre, der durch Zusammenfassung aller mit Verteilungswerten belegten Klassenintervallen sich ergibt. Theoretisch wäre eine Integration über einen solchen Bereich zwar möglich, doch wird sie praktisch nicht in Frage kommen können. Vielmehr wird man zur Vermeidung unübersehbarer Rechnungsschwierigkeiten den Kollektivgegenstand durch Hinzunahme leerer Klassen so erweitern, dass er eine möglichst einfache Gestalt annimmt. Vorzugsweise wird man daher als Approxi-

mationsbereiche Rechtecke, Kreise und wo angängig, auch die gesamte $x y$ Ebene benutzen. Man begegnet also den hier auftretenden Unannehmlichkeiten dadurch, dass man jeden Kollektivgegenstand als Kollektivgegenstand mit einem im obigen Sinne veränderten Variationsbereich ansieht, in welchem die nicht mit Häufigkeitswerten belegten Intervalle einfach als Klassen des Kollektivgegenstandes mit der Klassenhäufigkeit null gewertet werden. Solche Umgestaltung des Approximationsbereiches ist, wenn es sich um Darstellungsformen der hier verwendeten Art handelt, unbedenklich zulässig. Nunmehr sei die Frage der Ermittlung der Parameterwerte aus den Momentengleichungen für die Darstellungsformen 1) und 2) selbst behandelt. Dazu sei zwischen den beiden Fällen, dass der Integrationsbereich einmal die ganze Ebene und das andere Mal ein Kreis mit dem Radius R ist, unterschieden.

Zunächst sei der Fall für die Darstellungsform 2) und den endlichen Kreisbereich vom Radius R untersucht. Sei also

$$P^n(x, y) e^{-\rho(x^2 + y^2)} = \sum_{i, k} a_{i, k} x^i y^k e^{-\rho(x^2 + y^2)}; i + k \leq n; \rho = \frac{I}{\mu_{2/0} + \mu_{0/2}}$$

die Darstellungsform des Kollektivs, so handelt es sich um die Frage der Ermittlung der Parameterwerte aus den folgenden Gleichungen

$$\iint_{\bigcirc} x^f y^g P^n(x, y) e^{-\rho(x^2 + y^2)} dx dy = \mu_{f/g}$$

oder nach Einführung von Polarkoordinaten

$$\int_0^{2\pi} \cos^f \varphi \sin^g \varphi \int_0^R P^n(r \cos \varphi, r \sin \varphi) e^{-\rho r^2} r^{f+g+1} dr d\varphi = \mu_{f/g}.$$

Man erkennt, dass diese Bestimmungsgleichungen zu einem linearen Gleichungssystem in den $a_{i/k}$ führen.

Der Faktor von $a_{i/k}$ in der Gleichung $\mu_{f/g}$ bestimmt sich durch den Ausdruck

$$I_2) \int_0^{2\pi} \cos^{f+i} \varphi \sin^{g+k} \varphi d\varphi \cdot \int_0^R e^{-\rho r^2} r^{f+g+k+1} dr.$$

Es verschwindet nun der erste Faktor dieses Produkts, das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^{f+i} \varphi \sin^{g+k} \varphi d\varphi$$

in all den Fällen, wo entweder $f+i$ ungerade oder $g+k$ ungerade

rade ist. Nur dann, wenn $f + i = 2m$ und $g + k = 2n$ also beide Exponenten grade sind, ist der Wert des Integrals ungleich null und bestimmt sich durch den Ausdruck

$$13) \quad H_{2m, 2n} = \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{(2m+2n)!!} \cdot 2\pi$$

wenn man für den Ausdruck $(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1$

die abkürzende Bezeichnung $(2n-1)!!$

und entsprechend für den Ausdruck $2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2$

die Bezeichnung $(2n)!!$ einführt.

In diesem Falle aber, wo $f + i = 2m$ und $g + k = 2n$ ist, lässt das sonst transzendente Integral

$$14) \quad I_{2\tau+1} = \int_0^R e^{-\rho r^2} r^{2\tau+1} dr \quad 2\tau = 2m + 2n$$

sich durch einen analytischen Ausdruck auswerten. Diesen erhält man auf Grund partieller Integration durch die Rekursionsformel

$$I_{2\tau+1} = -\frac{1}{2\rho} R^{2\tau} e^{-\rho R^2} + \frac{\tau}{\rho} I_{2\tau-1}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\rho} (1 - e^{-\rho R^2})$$

wonach

$$I_{2\tau+1} = \frac{\tau!}{2\rho^{\tau+1}} - \frac{e^{-\rho R^2}}{2\rho} \sum_{s=0}^{\tau} R^{2s} \frac{\tau!}{s! \rho^{\tau-s}}$$

Man findet somit zur Bestimmung der Koeffizienten die folgenden Gleichungen

$$15) \quad \mu_{f/g} = \sum_{i,k}^n a_{i,k} I_{i+f+g+k+1} H_{i+f, k+g}$$

$$f, g = 0, 1, \dots, n; \quad i+k < n; \quad f+g < n,$$

die ein Gleichungssystem von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen und ebensoviel Unbekannten bilden. Nun erkennt man aber auf Grund der Beschaffenheit des Ausdrucks $H_{i+f, g+k}$, dass die $a_{i,k}$ nicht

in allen Gleichungen auftreten können. Sei nämlich $a_{i_1 k_1}$ ein Parameter, der in der Gleichung μ_{i_1/g_1} auftritt, so wird er ausser in dieser nur noch in solchen Gleichungen $\mu_{j/g}$ auftreten, für die

$$\begin{aligned} f &\equiv f_1 \pmod{2} \\ \text{und} \quad g &\equiv g_1 \pmod{2} \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

Umgekehrt treten in allen diesen Gleichungen nur jene $a_{i/k}$ auf, für die

$$\begin{aligned} i &\equiv i_1 \pmod{2} \\ \text{und} \quad k &\equiv k_1 \pmod{2} \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

Da insbesondere das Glied $a_{i_1 k_1}$ in der Gleichung $\mu_{i_1 k_1}$ auftritt, so erkennt man, dass das Gleichungssystem in so viel Teilsysteme zerfällt, als es Restklassen nach dem Modul (1,1) gibt. Das sind die Restklassen 0.0, 0.1, 1.0, 1.1 und damit also 4 Teilsysteme. Die Zahl der in jedem Gleichungssystem auftretenden Parameter bestimmt sich durch die Zahl der einer jeden Klasse angehörenden Elemente, die der Bedingung $i + k \leq n$ genügen. Damit ist z. B. die Ermittlung der für den Fall $n = 4$ auftretenden 15 Parameter auf die Lösung von 3 Gleichungssystemen mit je 3 Unbekannten und einem Gleichungssystem mit 6 Unbekannten zurückgeführt. Das Gleichungssystem mit 6 Unbekannten enthält die Parameter

$$16) \quad a_{00}, a_{02}, a_{20}, a_{22}, a_{40}, a_{04},$$

während die übrigen Parameter sich auf die drei anderen Gleichungssysteme wie folgt verteilen

$$16') \quad \{a_{10}, a_{12}, a_{30}\}, \{a_{01}, a_{21}, a_{03}\} \quad \text{und} \quad \{a_{11}, a_{13}, a_{31}\}.$$

Entsprechendes gilt, wenn man an Stelle des begrenzten Kreisbereiches die gesamte $x y$ Ebene zum Integrationsbereich erhebt. Auch hier zerfällt, wie man auf Grund der gleichen Ueberlegungen erkennt, das Gleichungssystem in 4 Teilsysteme. Der Faktor von $a_{i/k}$ wird in diesem Falle durch das Produkt der beiden Integrale

$$12') \quad \int_0^{2\pi} \cos^{f+i} \varphi \sin^{g+k} \varphi \, d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-\rho r^2} r^{i+f+g+k+1} \, dr$$

bestimmt. Das erste Integral ist also unverändert geblieben, während an die Stelle des zweiten jetzt der einfachere Ausdruck

$$14') \quad I_{2\tau+1} = \int_0^\infty e^{-\rho r^2} r^{2\tau+1} \, dr = \frac{\tau!}{2\rho^{\tau+1}} \quad \text{tritt.}$$

Setzt man wieder $f + i = 2m$ und $g + k = 2n$, so erhält man als Faktor von $a_{i/k}$ in der Gleichung $\mu_{//g}$ den Ausdruck

$$17) \quad \frac{(2m-1)!! (2n-1)!! (m+n)!}{(2m+2n)!! 2 \rho^{m+n+1}} 2 \pi$$

insbesondere für $\rho = \frac{1}{2 \Omega}$ also $\Omega = \frac{\mu_{20} + \mu_{02}}{2}$

$$18) \quad (2m-1)!! (2n-1)!! \Omega^{m+n+1} 2 \pi$$

einen Ausdruck also von einfachster Gestalt. Die gesamten Ueberlegungen lassen sich auf den Fall der Darstellungsform II und der gesamten Ebene als Integrationsbereich übertragen. Nur führe man hier bei einer Darstellungsform

$$Z = P^n(x y) e^{-(\alpha x^2 + \beta y^2)}$$

an Stelle der Polarkoordinaten die Transformation

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} r \sin \varphi = p r \sin \varphi ; p = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{ein.}$$

Dann wird unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Funktionaldeterminante der Transformation gleich $p r$ ist, aus dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^f y^g P^n(x y) e^{-(\alpha x^2 + \beta y^2)} dx dy$$

das Integral

$$p^{g+1} \int_0^{2\pi} \cos^f \varphi \sin^g \varphi \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} P^n(r \cos \varphi, p r \sin \varphi) r^{f+g+1} dr d\varphi$$

und der Faktor von $a_{i/k}$ in der Gleichung $\mu_{//g}$ erhält folgendes Aussehen

$$12'') \quad p^{g+k+1} \int_0^{2\pi} \cos^{f+i} \varphi \sin^{g+k} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r^{i+f+g+k+1} dr.$$

Genau so wie in den vorausgehend angeführten Fällen erhält man also auch hier ein 4teiliges Gleichungssystem, in welchem der Faktor von $a_{i/k}$ in der Gleichung $\mu_{//g}$ gegeben ist durch die Grösse

$$17') \quad p^{g+k+1} (2m-1)!! (2n-1)!! \sigma^{m+n+1} 2 \pi$$

wenn man wie zuvor $i + f = 2m$; $g + k = 2n$ und $\alpha = \frac{1}{2\sigma}$ setzt.

Allein in α und β ausgedrückt, schreibt sich der Faktor von $a_{i/k}$ wie folgt

$$18') \quad \frac{(2m-1)!! (2n-1)!! 2\pi}{2^{m+n+1} \alpha^m \beta^n \sqrt{\alpha\beta}}$$

Der vierte und letzte Fall, in welchem der Integrationsbereich als Kreisbereich und die Darstellungsform I zu wählen wären, scheint einer analytischen Behandlung nicht zugänglich zu sein. Er sei daher hier wie im folgenden nicht näher behandelt.

Für den Fall der Darstellungsform II und der ganzen Ebene als Integrationsbereich seien nunmehr noch die für die Parameter $a_{i/k}$ sich ergebenden Werte angeführt, wenn man $n = 4$ wählt.

$$19) \quad \begin{aligned} a_{00} &= 1/8 (6\mu_{2/2} + 3\mu_{4/0} + 3\mu_{0/4}) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{02} &= 1/4 \Omega^{-1} (24\Omega\mu_{0/2} - 12\Omega^2 - 3\mu_{0/4} - 3\mu_{2/2}) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{20} &= 1/4 \Omega^{-1} (24\Omega\mu_{2/0} - 12\Omega^2 - 3\mu_{4/0} - 3\mu_{2/2}) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{22} &= 1/4 \Omega^{-2} (3\mu_{2/2} - 3\Omega^2) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{40} &= 1/8 \Omega^{-2} (\mu_{4/0} + 3\Omega^2 - 6\Omega\mu_{2/0}) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{04} &= 1/8 \Omega^{-2} (\mu_{0/4} + 3\Omega^2 - 6\Omega\mu_{0/2}) (6\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{11} &= 1/2 (24\Omega\mu_{1/1} - 3\mu_{1/3} - 3\mu_{3/1}) (6\pi\Omega^4)^{-1} \\ a_{13} &= 1/2 \Omega^{-1} (\mu_{1/3} - 3\Omega\mu_{1/1}) (6\pi\Omega^4)^{-1} \\ a_{31} &= 1/2 \Omega^{-1} (\mu_{3/1} - 3\Omega\mu_{1/1}) (6\pi\Omega^4)^{-1} \\ a_{10} &= -1/2 (\mu_{3/0} + \mu_{1/2}) (2\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{12} &= 1/2 \Omega^{-1} \mu_{1/2} (2\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{30} &= 1/6 \Omega^{-1} \mu_{3/0} (2\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{01} &= -1/2 (\mu_{0/3} + \mu_{2/1}) (2\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{21} &= 1/2 \Omega^{-1} \mu_{2/1} (2\pi\Omega^3)^{-1} \\ a_{03} &= 1/6 \Omega^{-1} \mu_{0/3} (2\pi\Omega^3)^{-1} \end{aligned}$$

5. DIE KORRELATIONSTHEORIE AUF DER FLÄCHE.

a. Die Unabhängigkeit.

Eine wünschenswerte Eigenschaft, die einer stochastischen Funktion wird zukommen sollen, wird darin bestehen, dass bei vorliegender Unabhängigkeit die Funktion $F(x, y)$ die Gestalt $F_1(x) \cdot F_2(y)$

annimmt. Ein allgemein gültiger Beweis dieser Tatsache lässt sich nicht erbringen, doch kann mit Bezug auf die hier vorliegenden Darstellungsformen I und II ein solcher Nachweis erbracht werden. Man geht dazu zweckmässig von der Beziehung

$$20) \quad \mu_{f/g} = \mu_{f/o} \cdot \mu_{o/g} \quad \text{für alle } f \text{ und } g$$

aus, die eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen stochastischer Unabhängigkeit ist. An Hand dieser Beziehung kann dann die folgende genauer präzierte Behauptung bewiesen werden:

Ist der Approximationsbereich ein Rechteck oder erstreckt sich derselbe über die gesamte $x y$ Ebene, so ist die Unabhängigkeit der Variablen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Polynom $P^n(x y)$ Produkt aus zwei Polynomen $P_1(x)$ und $P_2(y)$ ist.

Dazu sei zunächst gezeigt, dass aus $P^n(x y) = P_1(x) \cdot P_2(y)$

$$\mu_{f/g} = \mu_{f/o} \cdot \mu_{o/g} \quad \text{folgt.}$$

Es ist, setzt man $\alpha x^2 + \beta y^2 = t$ bzw. $\rho(x^2 + y^2) = t$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P^n(x y) e^{-t} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x) P_2(y) e^{-t} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x) e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(y) e^{-\beta y^2} dy = 1 \\ \mu_{f/g} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^f y^g P^n(x y) e^{-t} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^f P_1(x) e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^g P_2(y) e^{-\beta y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^f P_1(x) e^{-\alpha x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(y) e^{-\beta y^2} dy \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y^g P_2(y) e^{-\beta y^2} dy) \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x) e^{-\alpha x^2} dx - \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^f P^n(x y) e^{-t} dx dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^g P^n(x y) e^{-t} dx dy \\ &= \mu_{f/o} \cdot \mu_{o/g} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt

$$\mu_{f/g} = \mu_{f/o} \mu_{o/g},$$

so folgt daraus

$$P^n(x y) = P_1(x) P_2(y).$$

Der Beweis erfolgt durch Konstruktion der Polynome $P_1(x)$ und $P_2(y)$ und den Nachweis ihrer Eindeutigkeit.

Sei dazu $P^n(x, y)$ ein Polynom, das in x vom Grade $h < n$ und in y vom Grade $k < n$ sei, so ermittle man zwei Polynome $P^h(x)$ und $P^k(y)$ vom Grade h bzw. k von der Beschaffenheit, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^f P^h(x) e^{-\alpha x^2} dx = \mu_{f/o} \quad \text{für } f = \text{o.I.} \dots h$$

und
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^g P^k(y) e^{-\beta y^2} dy = \mu_{o/g} \quad \text{für } g = \text{o.I.} \dots k$$

wird, dann ist zufolge der gemachten Voraussetzung

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} x^f y^g P^n(x, y) e^{-t} dx dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x^f P^n(x, y) e^{-t} dx dy \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} y^g P^n(x, y) e^{-t} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^f P^h(x) e^{-\alpha x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^g P^k(y) e^{-\beta y^2} dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x^f y^g P^h(x) P^k(y) e^{-t} dx dy \\ & \quad \text{für alle } f = \text{o.I.} \dots h \\ & \quad \text{und } g = \text{o.I.} \dots k. \end{aligned}$$

Zwei solche Polynome $P^h(x)$ und $P^k(y)$ existieren und lassen sich sogar in Form der beiden folgenden Integrale explizit angeben

$$P^h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^n(x, y) e^{-\beta y^2} dy$$

$$P^k(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^n(x, y) e^{-\alpha x^2} dx.$$

Nunmehr aber folgt ohne weiteres, dass

$$P^n(x, y) \equiv P^h(x) \cdot P^k(y)$$

sein muss. Man betrachte dazu nur das Polynom

$$D(x, y) = P^n(x, y) - P^h(x) P^k(y)$$

das in x höchstens vom Grade h und in y höchstens vom Grade k

sein kann, also von der Beschaffenheit

$$\sum_{ij}^{hk} a_{ij} x^i y^j$$

ist und von dem überdies gilt, dass

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j D(x y) e^{-t} dx dy = 0$$

ist für alle $i = 0, 1, \dots, h$ und $j = 0, 1, \dots, k$.

Insbesondere ist demnach auch

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{ij}^{hk} a_{ij} x^i y^j D(x y) e^{-t} dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} D^2(x y) e^{-t} dx dy = 0$$

woraus, da e^{-t} eine überall positive Funktion ist, folgt, dass

$$D(x y) = 0$$

also

$$21) \quad P^n(x y) = P^h(x) P^k(y)$$

Dass auch bei Zugrundelegung der Pearson'schen Darstellungsform das Polynom $P^n(x y)$ in ein Produkt zweier Polynome der Gestalt $P_1(x) P_2(y)$ bei vorliegender Unabhängigkeit zerfällt, ist eine Tatsache, die hiernach zur Selbstverständlichkeit wird, wenn man nur beachtet, dass die Unabhängigkeit das Verschwinden des Korrelationskoeffizienten $r_{1/2}$ nach sich zieht.

Wie man ohne weiteres erkennt, lässt sich das gleiche Ergebnis für den Fall eines rechteckigen Approximationsintervalls in derselben Weise herleiten. Darüber hinaus kann in diesem Falle der Beweis sogar für jede beliebige stetige Darstellungsfunktion erbracht werden. Zunächst erkennt man, dass ebenso wie beim vorausgegangenen Beweis, auch hier aus $F(x y) = F_1(x) F_2(y)$; $\mu_{1/g} = \mu_{1/o} \mu_{o/g}$ folgt. Auch gelangt man in der gleichen Art und Weise zu den Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(y)$, die in diesem Falle, wenn $[(a, b); (c, d)]$ das Approximationsintervall ist, wie folgt aussehen:

$$F_1(x) = \int_c^d F(x y) e^{-\beta y^2} dy$$

$$F_2(y) = \int_a^b F(x y) e^{-\alpha x^2} dx.$$

Bleibt also nur zu beweisen, dass

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

was mit Hilfe des Weierstrass'schen Approximationssatzes geschehen kann. Man approximiere die Funktion

$$D(x, y) = F(x, y) - F_1(x) F_2(y)$$

durch ein Polynom $P(x, y)$ derart, dass

$$P(x, y) = D(x, y) + \varepsilon(x, y)$$

wo

$$|\varepsilon(x, y)| < \varepsilon \quad \text{gleichmässig}$$

für alle x, y des Approximationsbereiches gewählt werden kann. Dann erkennt man, dass

$$\int_a^b \int_c^d D^2(x, y) dx dy + \int_a^b \int_c^d \varepsilon(x, y) D(x, y) dx dy = 0 \quad \text{ist}$$

Beachtet man zudem, dass für das zweite Doppelintegral die folgende Abschätzung gilt

$$\left| \int_a^b \int_c^d \varepsilon(x, y) D(x, y) dx dy \right| < \varepsilon M (b - a) (d - c),$$

in welcher mit M das Maximum der Funktion D in $[(a, b); (c, d)]$ bezeichnet sei, so ergibt sich wieder

$$D(x, y) \equiv 0$$

In den Fällen, wo der Approximationsbereich ein Kreis ist, wird die Beziehung

$$22) \quad F(x, y) = F_1(x) F_2(y) \quad \text{bei vorliegender}$$

Unabhängigkeit nur angenähert gelten. Ein Beweis für die Richtigkeit derselben kann unter diesen Umständen jedenfalls nicht erbracht werden.

b. Regression Und Mittlere Gerade.

Für den Begriff der Regression kennt die Korrelationstheorie bekanntlich zwei verschiedene Definitionen. Nach der einen Begriffsbestimmung ermitteln sich die Regressionen $R_1(x)$ und $R_2(y)$ durch die Ausdrücke

$$23) \quad R_1(x) = \frac{\int z y dx}{\int z dx} \quad \text{und} \quad R_2(y) = \frac{\int z x dy}{\int z dy},$$

während nach einer zweiten Definition die Regressionen näherungsweise durch Parabeln und Geraden ermittelt werden. Nach dieser Definition werden die Regressionen in ihrer Annäherung durch Geraden wie folgt bestimmt: Sei mit δ_{ik} der Abstand des Punktes $x_i y_k$ von der Geraden $0 = -x \sin \psi + y \cos \psi - p$ bezeichnet, der Abstand des Punktes also selbst gleich

$$\delta_{ik} = -x_i \sin \psi + y_k \cos \psi - p,$$

so ist nach jenen Geraden gefragt, für die

$$\sum_{i,j} p_{ij} \delta_{ij}^2 (\cos^2 \psi)^{-1} = \text{Minimum}$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} \delta_{ij}^2 (\sin^2 \psi)^{-1} = \text{Minimum} \quad \text{gilt.}$$

Die Ermittlung der Regressionslinien auf Grund der ersten Bestimmungsweise führt hier ebenso wie im Falle der Pearson'schen Darstellungsform zu rationalen Funktionen und damit zu einem nicht gerade sehr befriedigenden Ergebnis. Anders die Bestimmung der Regressionen auf Grund des zweiten Verfahrens. In diesem Falle nämlich führt die Ermittlung der Regressionsgeraden zu den gleichen Geraden wie beim Kollektiv selbst. Ebensoles gilt für die Ermittlung der mittleren Geraden, jener Geraden, die sich auf Grund der Forderung, dass $\sum_{i,j} p_{ij} \delta_{ij}^2$ zum Minimum wird, ergibt. Bestimmt man entsprechend den für die Ermittlung der einzelnen Geraden voraufgehend angeführten Forderungen diese Geraden aus den Bestimmungsgleichungen

$$\cos^{-2} \psi \iint z (-x \sin \psi + y \cos \psi - p)^2 dx dy = \text{Minimum}$$

$$\sin^{-2} \psi \iint z (-x \sin \psi + y \cos \psi - p)^2 dx dy = \text{Minimum}$$

$$\iint z (-x \sin \psi + y \cos \psi - p)^2 dx dy = \text{Minimum},$$

so erkennt man neben der Tatsache, dass die drei Geraden durch den Koordinatenursprung gehen, sich für die Tangenten der drei Winkel die gleichen Werte wie beim Kollektiv ergeben, nämlich

$$24) \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\mu_{1/1}}{\mu_{2/0}} \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\mu_{0/2}}{\mu_{1/1}} \quad \operatorname{tg} 2 \varphi_3 = \frac{2 \mu_{1/1}}{\mu_{2/0} - \mu_{0/2}},$$

Darüber hinaus gilt für alle Regressionsparabeln

$$m_1(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_\tau x^\tau$$

bezw.

$$\bar{m}_1(x) = \bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1 x + \dots + \bar{\lambda}_\tau x^\tau,$$

die man zufolge der Forderung

$$\Sigma p_{ij} (y_i - m_1(x))^2 = \text{Minimum}$$

bezw.
$$\iint z (y - \bar{m}_1(x))^2 dx dy = \text{Minimum}$$

ermittelt, dass, solange nur $2\tau \leq n$ ist,

$$25) \quad m_1(x) = \bar{m}_1(x) \quad \text{und entsprechend} \quad m_2(y) = \bar{m}_2(y)$$

ist. Doch sind solche Regressionsparabeln nur von geringem Interesse, weshalb hier der Hinweis auf diese unschwer beweisbare Tatsache genügen möge.

c. Das Korrelationsmass von Hagström.

In einem 1910 in der Zeitschrift "Aktuarietidskrift" erschienenen Aufsatz "Correlation Once More" hat Hagström nachgewiesen, dass für den Fall normaler Korrelation folgende Beziehung besteht:

$$26) \quad |r_{1/1}| = \cos m\pi,$$

in der $r_{1/1}$ der gewöhnliche Korrelationskoeffizient und m der Inhalt des zwischen den beiden Regressionsgeraden gelegenen Teilkollektivs ist. Natürlich wird beim Vorliegen eines nicht normal korrelierten Kollektivs diese Beziehung nicht mehr gelten. Trotzdem aber wird, was Hagström in seiner Arbeit auch darlegt, die Zahl $\cos m\pi$ allgemein als ein geeignetes Korrelationsmass beliebiger Kollektivgegenstände angesehen werden können. Es kommen der Masszahl $\cos m\pi$ nämlich folgende 4 Eigenschaften zu:

1.) Im Falle normaler Korrelation liefert sie den Korrelationskoeffizienten $r_{1/1}$,

2.) Immer dann, wenn die Variablen unabhängig sind, wird $\cos m\pi = 0$,

3.) Im Falle linearer funktioneller Abhängigkeit wird $\cos m\pi = 1$,

4.) Die Korrelation wird um so grösser sein, je kleiner der zwischen den Regressionsgeraden eingeschlossene Winkel ist und je kleiner der in diesem Winkel gelegene Inhalt des Kollektivs ist. Eine Uebertragung dieses Korrelationsmasses auf beliebige Verteilungsgesetze, für die eine analytische Darstellung nicht vorhanden ist, muss aber insofern auf Schwierigkeiten stossen, als eine einigermaßen sichere Berechnung des zwischen den Regressionsgeraden

gelegenen Teilkollektivs infolge der Durchschneidung der quadratischen Klassenintervalle durch die Regressionsgeraden unmöglich ist.

Nachfolgend sei nun zunächst die Berechnung des Wertes m bei Zugrundelegung des Kreisbereiches als Integrationsbereich und der Darstellungsform II vorgenommen.

Für die Berechnung von m erhält man den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} m &= \int_{\alpha_0}^{\beta} \int_0^R P(r \cos \psi, r \sin \psi) e^{-\rho r^2} r dr d\psi + \\ &+ \int_{\alpha + \pi_0}^{\beta + \pi} \int_0^R P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) e^{-\rho r^2} r dr d\varphi \\ &= \sum_{i,k} a_{i,k} \int_{\alpha}^{\beta} \cos^i \varphi \sin^k \varphi d\varphi \cdot \int_0^R e^{-\rho r^2} r^{i+k+1} dr + \\ &+ \int_{\alpha + \pi}^{\beta + \pi} \cos^i \varphi \sin^k \varphi d\varphi \int_0^R e^{-\rho r^2} r^{i+k+1} dr \end{aligned}$$

wenn man mit α und β die Regressionswinkel bezeichnet. Aus diesem Ausdruck fallen alle Glieder ungerader Indexsumme fort, denn, ist $i + k = 2\tau + 1$ so sind die beiden Integrale \int_{α}^{β} und $\int_{\alpha + \pi}^{\beta + \pi}$ von entgegengesetztem Vorzeichen. Für die übrigen Glieder hingegen sind die beiden Integrale im Faktor von $a_{i,k}$ einander gleich, sodass, bezeichnet man mit P_g die Summe

$$P_g = \sum_{v=0}^{n/2} \sum_{k=0}^{2v} a_{2v-k, k} x^{2v-k} y^k,$$

sich für m der Wert

$$27) \quad m = 2 \int_{\alpha_0}^{\beta} \int_0^R P_g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) e^{-\rho r^2} r dr d\varphi \quad \text{ergibt.}$$

Die Integrale $\int_0^R e^{-\rho r^2} r^{i+k+1} dr$ sind wieder analytisch auswertbar und von der Momentenmethode her bekannt, sodass schliesslich sich

$$\text{als Wert für } m \text{ ergibt: } m = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^{n/2} I_{2v+1} \sum_{k=0}^{2v} a_{2v-k, k} \cos^{2v-k} \sin^k \varphi d\varphi.$$

Entsprechend erhält man, wenn die gesamte $x y$ Ebene Approxi-

mationsbereich ist, für m den gleichen Wert nur mit dem Unterschiede, dass für I_{i+k+1} dann das Integral $\int_0^{\infty} e^{-\rho r^2} r^{i+k+1} dr$ einzuführen ist. Die Berechnung dieser Ausdrücke bietet keine Schwierigkeiten. Führt man dieselbe für den Fall $n = 4$ und der ganzen Ebene als Approximationsbereich durch, so ergibt sich das folgende Resultat :

28)

$$\begin{aligned}
 m &= (\beta - \alpha) \pi^{-1} \\
 &+ (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) 2 \Omega^2 a_{11} \\
 &+ (\sin^4 \beta - \sin^4 \alpha) 4 \Omega^3 a_{13} \\
 &- (\cos^4 \beta - \cos^4 \alpha) 4 \Omega^3 a_{31} \\
 &+ (\sin \beta \cos^3 \beta - \sin \alpha \cos^3 \alpha) [2 \Omega^2 (a_{20} - a_{02}) + \Omega^3 (10 a_{40} - 6 a_{04} - 2 a_{22})] \\
 &+ (\sin^3 \beta \cos \beta - \sin^3 \alpha \cos \alpha) [2 \Omega^2 (a_{20} - a_{02}) + \Omega^3 (6 a_{40} + 2 a_{22} - 10 a_{04})]
 \end{aligned}$$

wobei Ω wieder für $\frac{1}{2\rho}$ gesetzt ist.

Wie aus der Formel ohne weiteres erkennbar, nimmt m bei unabhängigkeit der Variablen den grösstmöglichen Wert $m = \frac{1}{2}$ an ; dagegen wird im Falle linearer funktioneller Abhängigkeit $m = 0$. Betrachtet man daher den Ausdruck $1-2m$, so wird man auch in Gestalt dieser neuen Grösse zu einer Zahl gelangen, die als Korrelationstheoretische Masszahl Verwendung finden können. Diese hätte dann mit den gewöhnlichen Korrelationskoeffizienten $r_{1/1}$ die beiden Eigenschaften, bei Unabhängigkeit der Variablen zu verschwinden und bei linearer funktioneller Abhängigkeit = 1 zu werden, gemein. Darüber hinaus aber käme der Masszahl $1-2m$ der Vorteil zu, stets anschaulich deutbar zu sein.

Aber auch dann, wenn die Form I Darstellungsform des Kollektivs ist, kann auf Grund der folgenden Ableitung der Wert von m ermittelt werden :

Sei $\mu_{2/0}^{-1} = a$ $\mu_{1/1}^{-1} = b$ und $\mu_{0/2}^{-1} = c$ gesetzt, so hat man zur Berechnung von m den folgenden Ausdruck auszuwerten :

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^{\infty} \int_{a/b \cdot x^{-1}}^{b/c \cdot x^{-1}} P^n(x, y) e^{-(ax^2 + cy^2)} dx dy + \\
 &+ \int_0^{-\infty} \int_{a/b \cdot x^{-1}}^{b/c \cdot x^{-1}} P^n(x, y) e^{-(ax^2 + cy^2)} dx dy
 \end{aligned}$$

Man setze $u = y/x$
 und $v = a x^2 + c y^2$

dann wird $x = \pm \sqrt{\frac{v}{a + c u^2}}$
 $y = \pm \sqrt{\frac{v u^2}{a + c u^2}}$

und der Funktionaldeterminanten der Transformation kommt der Wert

$$F = \left(\frac{2}{x^2} \begin{vmatrix} x & -y \\ cy & ax \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{x^2}{2v} = \frac{1}{2(a + c u^2)} \quad \text{zu.}$$

Wie im vorausgegangenen Fall zerlege man auch hier wieder das Polynom in einen geraden und einen ungeraden Bestandteil

$$P^n(x, y) = P_g(x, y) + P_u(x, y)$$

und beachte, dass für den ungeraden Bestandteil sich die beiden Doppelintegrale gegeneinander fortheben, während die beiden gleichen Integrale von P_g einander gleichwertig, sich addieren, sodass

$$m = 2 \int_0^{\infty} \int_{a/bx}^{b/cx} P_g(x, y) e^{-(a x^2 + c y^2)} dx dy$$

und nach vorgenommener Transformation

$$m = \int_0^{\infty} \int_{a/b}^{b/c} P_g \left(\sqrt{\frac{v}{a + c u^2}}, \sqrt{\frac{v u^2}{a + c u^2}} \right) \frac{1}{a + c u^2} e^{-v} du dv$$

wird. Sei n wieder der geradzahlige Grad des Polynoms $P^n(x, y)$, so erkennt man auf Grund der beiden Tatsachen, dass

$$P_g = \sum_{v=0}^{n/2} \sum_{k=0}^{2v} a_{2v-k, k} x^{2v-k} y^k$$

$$\text{und } \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p! \text{ ist}$$

dass m durch das folgende einfache Integral ermittelt werden kann:

$$29) \quad m = \int_{a/b}^{b/c} \sum_{v=0}^{n/2} \sum_{k=0}^{2v} \frac{v! a_{2v-k, k} u^k}{(a + c u^2)^{v+1}} du$$

Die Berechnung von m ist somit zurückgeführt auf die einfache Integration rationaler Funktionen, welche zufolge der einfachen Beschaffenheit des Nenners mit Hilfe der Partialbruchzerlegung stets leicht ausführbar sein wird.

d. Die Korrelationsrichtung.

Man kann mit Bezug auf einen vorgelegten Kollektivgegenstand die Frage stellen: Lässt sich für jeden Kollektivgegenstand eine Richtung angeben, die im wesentlichen kennzeichnend ist für die stochastische Abhängigkeit der Variablen x und y . Es widerspricht dem Sinne der stochastischen Abhängigkeit, nach einer Funktion suchen zu wollen, die das stochastische Abhängigkeitsverhältnis der Variablen x und y wiedergeben soll, wohl aber hat es einen Sinn, danach zu fragen, in welcher Richtung die Variablen x und y miteinander korreliert sind. Die Regressionslinien können in Beantwortung dieser Frage keine Dienste leisten, da die zur Ermittlung dieser Linien benutzte verschiedendeutige Bewertung der beiden Variablen zu einer Dualität führt, die hier nur hindernd im Wege steht. Anders schon die mittlere Gerade, die denn auch von einem der nachfolgend angeführten Lösung dieser Frage ähnlichen Charakter ist. Ein jedenfalls gangbarer Weg zur Ermittlung einer solchen Richtung wird dadurch gegeben sein, dass man nach einer solchen Richtung sucht, für die das Integral über die in der betreffenden Richtung verlaufenden und durch den Nullpunkt gehenden Geraden zum Maximum wird. Im Falle normaler Korrelation führt die Bestimmung einer solchen Geraden auf die grosse Achse der Ellipsen gleicher Häufigkeit, also auf jene Gerade, die gleichzeitig mittlere Gerade ist.

Legt man die Darstellungsform I zugrunde, so ist man zur Ermittlung des Winkels φ jener Geraden, vor die Aufgabe gestellt, die folgende Gleichung zu lösen, in der für δ zu setzen ist $\delta = a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi$

$$30) \quad \frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} z \, dr = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta r^2} \left[2 P r^2 (\alpha - \beta) \cos \varphi \sin \varphi + \right. \\ \left. + r \left(\frac{\delta P}{\delta y} \cos \varphi - \frac{\delta P}{\delta x} \sin \varphi \right) \right] dr = 0 .$$

Betrachtet man den unter dem Integral stehenden Klammerausdruck,

so erkennt man auf Grund der Tatsache, dass

$$1) \quad I_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} r^{2k} e^{-\delta r^2} dr = (2k-1)!! (2\delta)^{-k} \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \quad \text{und} \quad I_{2k+1} = 0$$

2) der Exponent von r in jedem Gliede des Klammerausdrucks gleich der Summe der Exponenten von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ist, dass man nach Multiplikation mit $(2\delta)^{\frac{v+2}{2}}$ zu einer in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ homogenen Gleichung des Grades $n+2$ zur Bestimmung der Extremumswerte von φ kommt, welche Gleichung nach Division mit $\cos^{n+2} \varphi$ zu einer Gleichung $n+2$. Grades in $\operatorname{tg} \varphi$ führt. Für $n=4$ gelangt man also zu einer Gleichung 6. Grades und damit zu einer Lösung, die nicht als glücklich angesehen werden kann. Anders liegen die Verhältnisse, wenn man die Darstellungsform II zum Ausgangspunkt der gleichen Betrachtung erhebt. Je nachdem, ob der Integrationsbereich der Kreis vom Radius R oder die ganze Ebene ist, erhält man die folgenden beiden Bestimmungsgleichungen, in denen ρ jetzt eine Konstante ist.

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-R}^{+R} z dr = \frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-R}^{+R} e^{-\rho r^2} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} z dr = \frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho r^2} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = 0.$$

Auch hier führt die Berechnung auf eine in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ homogene Gleichung zur Bestimmung von φ diesmal jedoch zu einer Gleichung vom Grade n selbst. In beiden Fällen fallen nämlich mit der Integration wieder alle Glieder ungerader Exponentensumme in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ heraus, sodass nur Glieder gerader Exponentensumme übrig bleiben. Hieran wird auch durch die noch vorzunehmende Differentiation nach φ nichts geändert. Durch Multiplikation aller Glieder, die von einem Grade $v < n$ sind, mit $(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{\frac{n-v}{2}}$ gewinnt man dann die homogene Gleichung, aus der durch Division mit $\cos^n \varphi$ sich eine Gleichung n ten Grades für $\operatorname{tg} \varphi$ ergibt. Man erhält demnach 8 Werte für φ , von denen jedoch nur 4 wesentlich verschieden sind, wenn man die Winkel φ und $\varphi + \pi$ als gleichwertig ansieht. Brauchbar sind aus Gründen der Realität nur die nicht komplexen Wurzeln

der Gleichung. Sind nur zwei reelle Wurzeln vorhanden, so erhält man eine Maximum- und eine Minimumlösung. In dem Falle, wo 4 reelle Wurzeln auftreten hingegen, wird die Ermittlung des absoluten Maximumwertes aus den 4 erhaltenen φ Werten erforderlich.

Legt man wiederum die Darstellungsform II bei einem Werte von $n = 4$ der Betrachtung zugrunde, so liefert das voraufgehend geschilderte Verfahren zur Ermittlung der Korrelationsrichtung das folgende Ergebnis :

Die zur Bestimmung des Wertes von φ zu lösende Gleichung lautet :

$$31) \quad P \sin^4 \varphi + Q \sin^3 \varphi \cos \varphi + R \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\ + S \cos^3 \varphi \sin \varphi + T \cos^4 \varphi = 0 ,$$

in der die Grössen P, Q, R, S, T zur Abkürzung für die folgenden Ausdrücke eingeführt sind.

$$32) \quad P = - a_{11} \Omega - 3 a_{13} \Omega^2 \\ Q = 2 a_{02} \Omega - 2 a_{20} \Omega + 12 a_{04} \Omega^2 - 6 a_{22} \Omega^2 \\ R = 9 \Omega^2 (a_{13} - a_{31}) \\ S = 2 a_{02} \Omega - 2 a_{20} \Omega - 12 a_{40} \Omega^2 + 6 a_{22} \Omega^2 \\ T = a_{11} \Omega + 3 a_{31} \Omega^2$$

Der hier dargelegten Methode der Ermittlung einer Korrelationsrichtung haftet jedoch ein Mangel an. Es fehlt nämlich an einem Masse für die Stärke des stochastischen Zusammenhangs längs einer so bestimmten Richtung. Fin in dieser Hinsicht besseres Korrelationsmass zu finden, soll die Aufgabe des nächsten Kapitels sein.

e. Die Streifenkorrelation.

Liessen die Betrachtungen des vorigen Kapitels noch die Verwendung der Darstellungsform I zu, so erweist es sich für die Betrachtungen dieses Kapitels als notwendig, die Form II zum Ausgangspunkt derselben zu machen. Das in diesem Kapitel zu behandelnde Problem schliesst insofern an die Ausführungen des vorigen Kapitels an, als es sich auch hier um die Ermittlung einer bestimmten Korrelationsrichtung handeln wird. Es seien dazu in einstweilen beliebiger Richtung zwei gleich gerichtete Geraden im Abstand $-\frac{1}{2}$ bzw. $+\frac{1}{2}$ vom Nullpunkt durch die $x y$ Ebene des Kollektivs gelegt. Der Inhalt des über einem solchen Streifen liegenden Teilkollektivs werde

als Funktion des Winkels φ , den dieser zur x - Achse einnimmt, betrachtet. Gefragt sei dann nach jener Richtung, in welcher der Inhalt dieses Streifens zum Maximum wird. In Richtung des so bestimmten Maximalstreifens nehme man nun eine weitere Zerlegung des Kollektivs in jeweils um die Einheit breiter werdenden Streifen vor. An Hand des damit dargelegten Verfahrens gelangt man so zu einer Reihe für den Kollektivgegenstand äusserst charakteristischer Zahlen. Zunächst erhält man durch die Richtung des Maximalstreifens wieder eine Korrelationsrichtung; darüber hinaus aber gleichzeitig in Form der Streifeninhaltszahlen Masszahlen für die Strammheit des stochastischen Zusammenhangs. Seien nun ξ und η die Ordinaten eines um den Winkel φ gedrehten Koordinatensystems, so ist man zur Ermittlung der Streifenrichtung vor die Aufgabe der Lösung der Gleichung

$$33) \frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-1/2}^{+1/2} P(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) e^{-\rho(\xi^2 + \eta^2)} d\eta = 0$$

gestellt.

Für den Fall des Kreisbereiches ergibt sich analog, wenn man die kreisförmige Begrenzung des Streifens durch zwei zu den Geraden senkrecht verlaufende Geraden im Abstand R vom Nullpunkt ersetzt, den Bereich also in diesem Sinne nur unwesentlich ändert,

$$33') \frac{\delta}{\delta \varphi} \int_{-R}^{+R} d\xi \int_{-1/2}^{+1/2} P(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) e^{-\rho(\xi^2 + \eta^2)} d\eta = 0.$$

Auch hier erkennt man auf Grund der Tatsache, dass nur solche Glieder, in denen sowohl ξ als auch η in gerader Potenz auftreten, nicht verschwinden, dass man zu einer Gleichung n ten Grades in beiden Fällen für $\tan \varphi$ gelangt. Das Auftreten homogener Gleichungen in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ist insofern immer von Bedeutung, als die Lösung solcher Gleichungen nicht wie im allgemeinen zu Gleichungen des Grades $2n$ sondern nur zu solchen des Grades n führt. Nach Bestimmung des Maximalwertes von φ hat dann die Berechnung der Doppelintegrale

$$34) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\tau}^{+\tau} P(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) e^{-\rho(\xi^2 + \eta^2)} d\eta$$

$$34') \text{ bzw. } \int_{-R}^{+R} d\xi \int_{-\tau}^{+\tau} P(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) e^{-\rho(\xi^2 + \eta^2)} d\eta$$

für $\tau = 1/2, 2/2, \dots$

den Streifenbreiten 1, 2, ... entsprechend zu erfolgen.

Für den Fall $n = 4$ und der ganzen Ebene als Integrationsbereich gelangt man zu den folgenden Ausdrücken.

Bezeichnet man mit $\int_{2p, 2q}(\tau)$ den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\tau}^{+\tau} \xi^{2p} \eta^{2q} e^{-\rho(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2p} e^{-\rho \xi^2} d\xi \cdot \int_{-\tau}^{+\tau} \eta^{2q} e^{-\rho \eta^2} d\eta$$

und setzt weiter

$$35) \quad a_{00} \int_{00}(\tau) = A(\tau)$$

$$a_{20} \int_{20}(\tau) + a_{02} \int_{02}(\tau) = B(\tau) \quad a_{20} \int_{02}(\tau) + a_{02} \int_{20}(\tau) = C(\tau)$$

$$a_{11} [\int_{20}(\tau) - \int_{02}(\tau)] = D(\tau)$$

$$a_{40} \int_{40}(\tau) + a_{04} \int_{04}(\tau) + a_{22} \int_{22}(\tau) = E(\tau)$$

$$a_{04} \int_{40}(\tau) + a_{40} \int_{04}(\tau) + a_{22} \int_{22}(\tau) = F(\tau)$$

$$(6 a_{40} + 6 a_{04}) \int_{22}(\tau) + a_{22} [\int_{40}(\tau) + \int_{04}(\tau) - 4 \int_{22}(\tau)] = G(\tau)$$

$$a_{13} [3 \int_{22}(\tau) - \int_{04}(\tau)] + a_{31} [\int_{40}(\tau) - 3 \int_{22}(\tau)] = H(\tau)$$

$$a_{13} [\int_{40}(\tau) - 3 \int_{22}(\tau)] + a_{31} [3 \int_{22}(\tau) - \int_{04}(\tau)] = I(\tau)$$

so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für φ

$$36) \quad -(D + I) \sin^4 \varphi + (D + H) \cos^4 \varphi + 3(I - H) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\ + [4(A + C + F) - 2(2A + B + C + G)] \sin^3 \varphi \cos \varphi + \\ + [2(2A + B + C + G) - 4(A + B + E)] \sin \varphi \cos^3 \varphi = 0$$

bei einem Werte von $\tau = 1/2$ und für die Streifeninhaltswerte erhält man

$$37) \quad [A(\tau) + C(\tau) + F(\tau)] \sin^4 \varphi_{\max} + \\ + [2(A(\tau) + B(\tau) + C(\tau) + G(\tau))] \sin^2 \varphi_{\max} \cos^2 \varphi_{\max} + \\ + [D(\tau) + I(\tau)] \sin^3 \varphi_{\max} \cos \varphi_{\max} + \\ + [D(\tau) + H(\tau)] \sin \varphi_{\max} \cos^3 \varphi_{\max} .$$

Der Erwähnung bedarf nun noch der folgende Umstand.

Bei der Berechnung der Werte von \int_{2p-2q} treten nämlich hier zum ersten Male transzendente Integrale auf, Integrale der Form

$$38) \quad \int_{-\tau}^{+\tau} t^{2n} e^{-t^2} dt = \Phi^{2n}(\tau).$$

Bekanntlich beherrscht man aber auf Grund in der Wahrscheinlichkeitsrechnung viel gebräuchter Tabellen der Funktion $\Phi^0(\tau)$ die Funktion

$$39) \quad \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-t^2} dt = \Phi^0(\tau)$$

sehr gut und damit auch, wie leicht erkennbar, die Funktionen $\Phi^{2n}(\tau)$ für die die Rekursionsformel

$$40) \quad \Phi^{2n}(\tau) = \frac{2n-1}{2} \Phi^{2n-2}(\tau) - \tau^{2n-1} e^{-\tau^2}$$

eine Zurückführung dieser Funktionen auf die transzendente Funktion $\Phi^0(\tau)$ gestattet.

6. EIN BEISPIEL. *

Die voraufgehend dargestellte Theorie möge nunmehr auf ein praktisches Beispiel Anwendung finden.

*) Dieses Beispiel ist einer im Band 22 der *Biometrika* (1930-1931) erschienenen Arbeit von S. I. PRETORIUS, *Skew Bivariate Frequency Surfaces* entnommen; daselbst Seite 157. Siehe auch Literaturverzeichnis.

Korrelation zwischen der Länge und Breite von Bohnen.

	1	7	18	36	70	115	199	437	929	1787	2294	2082	1129	275	55	6	9440
9.125	3	2	..	5
8.875	19	17	8	4	48
8.625	2	23	93	156	101	23	2	400
8.375	9	56	227	574	494	105	18	..	1483
8.125	3	12	73	362	913	956	375	44	4	..	2742
7.875	3	19	89	330	794	871	385	81	7	2579
7.625	4	27	55	175	361	469	236	65	4	1	1397
7.375	..	1	..	11	22	37	78	124	137	91	23	6	530
7.125	..	1	6	11	32	25	35	28	18	13	1	170
6.875	..	1	7	13	12	21	8	9	1	72
6.625	..	3	4	1	..	2	10
6.375	1	1	1	1	4
	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	

KONSTANTEN DES KOLLEKTIVS.

Für die einzelnen Momente ergeben sich folgende Werte :

$$\begin{aligned} \mu_{2/0} &= 3.3218 & \mu_{1/1} &= 1.911 & \mu_{0/2} &= 1.9315 \\ \mu_{3/0} &= -5.3075 & \mu_{2/1} &= 2.8764 & \mu_{1/2} &= 1.6714 & \mu_{0/3} &= 1.1280 \\ \mu_{4/0} &= 52.6333 & \mu_{3/1} &= 29.3737 & \mu_{2/2} &= 19.3725 & \mu_{1/3} &= 14.4729 \\ & & \mu_{0/4} &= 13.4519 & \Omega &= 2.6267 \end{aligned}$$

Aus diesen errechnen sich die Parameter des Kollektivs wie folgt :

$$\begin{aligned} a_{10} &= 0.030645 & a_{00} &= 0.115 & a_{c1} &= 0.017584 \\ a_{20} &= -0.024910 & a_{11} &= -0.006169 & a_{02} &= -0.016578 \\ a_{30} &= -0.0029576 & a_{21} &= -0.004809 & a_{12} &= -0.002794 \\ a_{03} &= -0.0006286 & a_{40} &= 0.0011127 & a_{31} &= 0.003037 \\ a_{22} &= 0.00397 & a_{13} &= -0.0001243 & a_{04} &= 0.0001967 \end{aligned}$$

Für das Hagström'sche Korrelationsmass ergibt sich auf Grund der Formel 28

$$m = 0,154 \quad \cos m \pi = 0.88 \quad 1 - 2 m = 0,7$$

Als Korrelationsrichtung ermittelt man an Hand der im Kapitel 5 d dargelegten Methode

für den tang. $+ 0.7$
und daraus für den Winkel : 35° .

Den gleichen Wert für die Korrelationsrichtung liefert die im letzten Kapitel dargelegte Methode der Ermittlung der Korrelationsrichtung. Auch hier ergibt sich der Wert von 35° für den Korrelationswinkel, während man für die Streifeninhaltszahlen die folgenden Werte erhält. In den einzelnen Streifen

der Streifenbreite 1	sind gelegen	38.2 %
»	» 2 » »	69.7 %
»	» 3 » »	90.8 %
»	» 4 » »	101.4 %

des gesamten Kollektivs.

Damit ist man zu einem Ergebnis gelangt, das über die Beschaffenheit des vorliegenden Kollektivs die folgende korrelationstheoretische Aussage zu machen gestattet.

Der untersuchte Bohnenbestand lässt eine Korrelation zwischen Länge und Breite der Bohnen in Richtung der Geraden $y = 0.7 x$ von der Strammheit $1 - 2m = 0.7$ erkennen. Längs dieser Geraden, der sogenannten Korrelationsrichtung, ist der Zusammenhang zwar kein linear-funktioneller, doch darf mit einer Wahrscheinlichkeit von nahezu 40 % angenommen werden, dass einem beliebigen Bohnenlängenwert ein Bohnenbreitenwert entspricht, der innerhalb der durch den Einheitsstreifen gezogenen Grenzen liegt; entsprechend mit 70 % Wahrscheinlichkeit, dass der Bohnenbreitenwert innerhalb des Streifens der Breite 2 liegt; u. s. f.

7. LITERATURVERZEICHNIS.

1. ÅKESSON O. A. — *On the Dissection of Correlation Surfaces*. « Arkiv f. Mat., Astr. och Fysik », Bd. XI, No. 16, 1916.
2. BERNSTEIN SERGE. — *Sur les courbes de distribution des probabilités*. « Math. Zschr. », Bd. 25, S. 199, 1924.
3. BLASCHKE ERNST. — *Vorl. über Math. Statistik*. Leipzig u. Berlin, 1906.
4. BOWLEY, A. L. — *F. Y. Edgeworth's Contributions to Mathematical Statistics* « Roy. Stat. Soc. », 1928.
5. BRUNS HEINRICH. — *W. R. und Kollektivmasslehre*. Leipzig und Berlin, 1906.
6. CAMP BURTON H. — *Mutually Consistent Multiple Regression Surfaces*. « Biometrika », Vol. XVII, 1925, pp. 443-458.
7. CHARLIER C. V. L. :
 - a) *Ueber die Darstellung willkürlicher Funktionen*. « Ark. f. Mat., Astr. och Fysik », Bd. II, No. 20, 1905.
 - b) *Contributions to the Mathematical Theory of Statistics*. 5. *Frequency Curves of Type A in Heterograde Statistics*. « Ark. f. Mat. Astr. och Fysik », Bd. IX, No. 25, 1914.
 - c) *Contributions to the Mathematical Theory of Statistics*. 6. *The Correlation Function of Type A*. « Ark. f. Mat., Astr. och Fysik », Bd. IX, No. 26, 1914.
8. CHARLIER C. V. L. & WICKSELL S. D. — *On the Dissection of Frequency Functions*. « Ark. f. Mat., Astr. och Fysik », Bd. XVIII, No. 6, 1923.
9. COOLIDGE-URBAN. — *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Verlag Teubner, 1927.
10. CZUBER EMANUEL :
 - a) *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, I. u. II, Verlag Teubner, Berlin, 1924.
 - b) *Die statistischen Forschungsmethoden*. Verlag L. W. Seidel, Wien, 1921.

- c) *Zur Theorie der linearen Korrelation.* « Archiv für die gesamte Psychologie ».
11. DAVIES G. R. — *The Analysis of Frequency Distributions.* « Journ. Am. Stat. Ass. », Dec. 1929, pp. 349-366.
 12. EDGEWORTH, F. Y. :
 - a) *On the Mathematical Representation of Statistical Data.* « Journ. Roy. Stat. Soc. », Vol. LXXX, pp. 266-288, 1917.
 - b) *On the Use of Analytical Geometry to represent certain Kinds of Statistics.* « Journ. Roy. Stat. Soc. », Vol. LXXVII, pp. 838-852, 1914.
 13. HAGSTRÖM K. G. — *Skandinavisk Aktuarietidskrift* :
 - a) *Der Begriff der statistischen Funktion.* Seite 1, 1919.
 - b) *Bemerkungen zur Theorie der statistischen Funktionen.* Seite 204, 1919.
 - c) *Correlation Once More,* Seite 193, 1930.
 14. HENDERSON JAMES. *On Expansions in Tetrachoric Functions.* « Biometrika », Vol. XIV, pp. 157-185, 1922-23.
 15. ISSERLIS L. : *The Application of Solid Hypergeometrical Series to Frequency Distributions in Space.* « Phil. Mag. », Vol. XXVIII, pp. 379-403, 1914.
 16. JORGENSEN N. R. :
 - a) *Note sur la fonction de répartition de Type B de M. Charlier.* « Ark. for Mat., Astr. och Fysik », Bd. X, No. 15, 1914.
 - b) *Undersogelser over Frekvensflader og Korrelation.* København, 1916.
 17. KAPTEYN J. C. & VAN UVEN M. J. — *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics.* « Hoitsema Bros. Gröningen », 1916.
 18. LACHTIN. — *Die Methode von Pearson in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Aufgaben der Statistik und Biologie.* « Moskau. Math. Ges. » Bd. 24, S. 481, 1903.
 19. NARUMI SEIMATSU. — *On the General Forms of Bivariate Frequency Distributions which are Mathematically Possible when Regression and Variation are subjected to Limiting Conditions.* « Biometrika ». Vol. XV, pp. 77-88, 209-221, 1923.
 20. NEYMAN J. — *Further notes on Non-Linear Regression.* « Biometrika », Vol. XVIII, pp. 257-262, 1926.
 21. PEARSON KARL. :
 - a) *On the General Theory of Skew Correlation and Non-linear Regression* Drapers' Company Research Memoirs. Biometric, Series II, 1905.
 - b) *Notes on the History of Correlation.* « Biometrika », Vol. XIII, pp. 25-45, 1920.
 - c) *On a General Method of Determining the Successive Term in a Skew Regression Line.* « Biometrika », Vol. XIII, pp. 296-300, 1921.
 - d) *Notes on Skew Frequency Surfaces.* « Biometrika », Vol. XV, pp. 222-230, 1923.
 - e) *Non-Skew Frequency Surfaces,* « Biometrika », Vol. XV, pp. 231-244, 1923.
 - f) *On a Certain Double Hypergeometrical Series and its Representation by Continuous Frequency Surfaces.* « Biometrika », Vol. XVI, pp. 172-204, 1924.
 - g) *The fifteen Constant Bivariate Frequency Surface.* « Biometrika », Vol. XVII, pp. 268-313, 1925.

- h) *The Contribution of Giovanni Plana to the Normal Bivariate Frequency Surface.* « *Biometrika* », Vol. XX A, pp. 295-298, 1928.
- i) *On lines and planes of closest fit to systems of points in space.* « *Phil. Mag.* » 2, S. 557. 1901.
- k) *On the systematic fitting of curves I & II.* *Biometrika*, Bd. 1, 1902.
22. PEROZZO LUIGI. — *Nuove Applicazioni del Calcolo delle Probabilità.* Reale Accademia dei Lincei, Serie 3^a, Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, Vol. X, pp. 1-33, 1881-2.
23. PRETORIUS S. I. — *Skew Bivariate Frequency Surfaces examined in the light of numerical illustrations.* « *Biometrika* », Vol. XXII, pp. 109-223, 1930-1931.
24. RHODES E. C. — *On a certain Skew Correlation Surface.* « *Biometrika* », Vol. XIV, pp. 355-377, 1922-3.
- b) *On a Skew Correlation Surface.* « *Biometrika* », Vol. XVII, pp. 314-326, 1925.
25. SNOW F. C. — *On restricted lines and planes of closest fit.* « *Phil. Mag.* » 21, 337. 1911.
26. STEFFENSEN J. F. :
- a) *A correlation Formula.* « *Sk. Akt. Tidskr.* » 1922.
- b) *On Charlier's Generalized Frequency Function.* « *Sk. Akt. Tidskr.* », 1924.
27. V. D. STOK. — *Une méthode générale d'analyse de courbes de fréquence.* « *Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles* ». Bd. 13, S. 405, 1908. Die gleiche Arbeit in englischem Text: *On the analysis of frequency curves according to a general method.* « *Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* ». Proc. of the section of sciences, Bd. 10, Seite 799, 1907-08.
28. TSCHUPROW A. A. — *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelations-theorie.* Verlag Teubner. Berlin und Leipzig, 1925.
29. VAN UVEN M. J. — *On Treating Skew Correlation.* « *Proc. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam* ». Vol. XXVIII, Nos. 8-9, pp. 797-811, 1925; Vol. XXVIII, No. 10, pp. 919-935, 1925; Vol. XXIX, No. 4, pp. 580-590, 1926; Vol. XXXII, No. 4, pp. 408-413, 1929.
30. WALKER HELEN M. — *The Relation of Plana and Bravais to the Theory of Correlation.* « *Isis* », Vol. X, No. 34, pp. 466-484, 1928.
31. WICKSELL S. D. :
- a) *The Application of Solid Hypergeometrical Series to Frequency Distributions in Space.* « *Phil. Mag.* », Vol. XXXIV, pp. 389-394, 1917.
- b) *On the Genetic Theory of Frequency.* « *Ark. f. Mat., Astr. och Fysik* », Bd. XII, No. 20, 1917.
- c) *The Correlation Function of Type A and the Regression of its Characteristics.* « *Kungl. Sv. Vet. Akad. Handl.* », Bd. LVIII, No. 3, pp. 1-48, 1917.
- d) *The Construction of the curves of Equal Frequency in case of Type A Correlation.* « *Sv. Akt. Tidskr.* » Heft 2-3, pp. 1-19, 1917.
- e) *Contributions to the Analytical Theory of Sampling.* « *Ark. f. Mat., Astr. och Fysik* », Bd. XVII, No. 19, 1923.
32. WIRTH W. — *Spezielle psychologische Massmethoden.* E. Abderhalden's Handbuch der biol. Arbeitsmethoden, Berlin-Wien, 1920.
33. YULE G. UDNY. — *On the Significance of Bravais's Formulae for Regression, etc., in the case of Skew Correlation.* « *Roy Soc. Proc.* », Vol. LX, pp. 477-489, 1897.

CURTIS BRUEN

Five Variable Straight Line Diagram

When five variables are represented by a straight line diagram with rectilinear coordinates, two variables conjointly determine abscissa and ordinate, and the coordinates determine the graph.

The method is demonstrable for the four variable equation

$$t = au^l bv^m cw^n k .$$

The constructional equations derive from this equation logarithmically transformed and further generalized as

$$\log t = l \log au \pm m \log bv \pm n \log cw \pm \log k .$$

The x and y axes are divided in logarithmic units. One term of the right member of the logarithmic equation forms the right member of the scale equation

$$y = l \log au .$$

The remaining terms form that of the scale equation

$$x = \pm m \log bv \pm n \log cw \pm \log k .$$

The graph equation summates the logarithms of all terms of the right member and equates them to that of the left member in

$$\log t = x + y .$$

Separate w scales are constructed for serial values of v . $\log k$ is laid off for all of them. The log for its particular value of v is laid off for each scale continuous with $\log k$. The logs for successive values of w are marked off on one scale, continuous with the log for its particular value of v , and transposed to the others. The u scale is marked off. The t graphs are plotted.

To use the chart locate the two coordinates, sight their intersection, and read off its value.

Chart I-a. Serial Variable. Identify the scale for the required value of v ; spot the required value of w on it; carry a line perpendicularly into the field of the chart; spot the required value of u ; carry a line horizontally to its intersection with the vertical line previously traced; approximate the value of t by interpolating between the adjacent graphs.

Lines passed through equal values of w on the several scales constitute v scales. The combined $v = w$ scale is then a grid. If the w

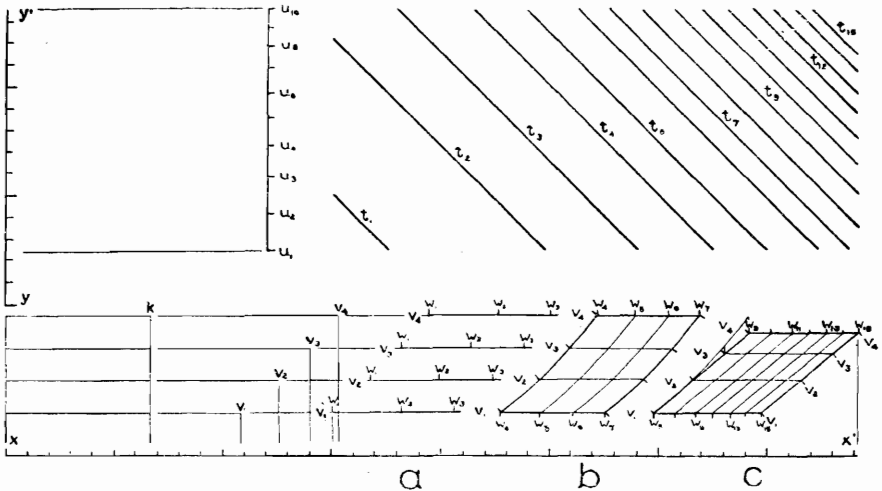


CHART I.

scales are equidistant from each other and the successive values of w at equal intervals, the v scales will be logarithmic curves, and the grid a system of cylindroidal rhomboids. The v scales may be reduced to straight lines and the $v = w$ grid converted into a system of planar rhomboids by projecting successive points on the w scales vertically upon inclined straight lines arising from the lowest w scale as a base and transposing the other w scales to the levels determined by the resulting intersections.

Chart I-b, c. Continuous Variables. Spot the required value of v ; carry a line horizontally into the network; spot the required value of w ; carry a line in the direction of the guide lines to its intersection with the horizontal line previously traced; from this point carry a line vertically into the field. . . et cetera.

The construction of a series of scales or of a scalar grid for ordinate as well as abscissa extends the method to the fifth variable.

The basal metabolism is the heat production of the body when at rest and not absorbing food from the intestines. Its normal value is

TABLE I.

Calories per Square Meter of Body Surface per Hour.

Age years	Males calories	Females calories
14-16	46.0	43.0
16-18	43.0	40.0
18-20	41.0	38.0
20-30	39.5	37.0
30-40	39.5	36.5
40-50	38.5	36.0
50-60	37.5	35.0
60-70	36.5	34.0
70-80	35.5	33.0

estimated by the method of DU BOIS as the surface area of the body, computed from the empirical power formula¹

$$A = 0.007184 W^{0.425} H^{0.725}$$

in which A = area in square meters, W = weight in kilograms, and H = height in centimeters, multiplied by the standard value of calories per square meter per hour for the sex and age group (Table I)². A nomogram can represent the calories per unit time interval for a uniform basal metabolic rate (Chart II)³. By using logarithmic in place of numerical values and a separate scale for one of the variables in the formula for each metabolic rate, the calories per unit of time can be represented coincidentally for the several metabolic rates. The logarithmic equation for the daily basal metabolism is

$$\log C = 0.725 \log 2.54 h + 0.425 \log 0.4536 w + \log 0.007184 + \log c + \log 24$$

in which C = calories per twenty-four hours, h = height in inches, w = weight in pounds, and c = calories per square meter per hour.

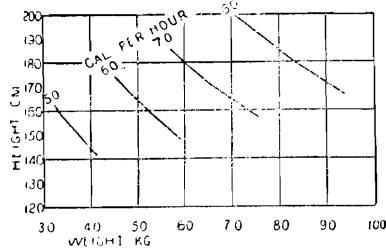


CHART II.

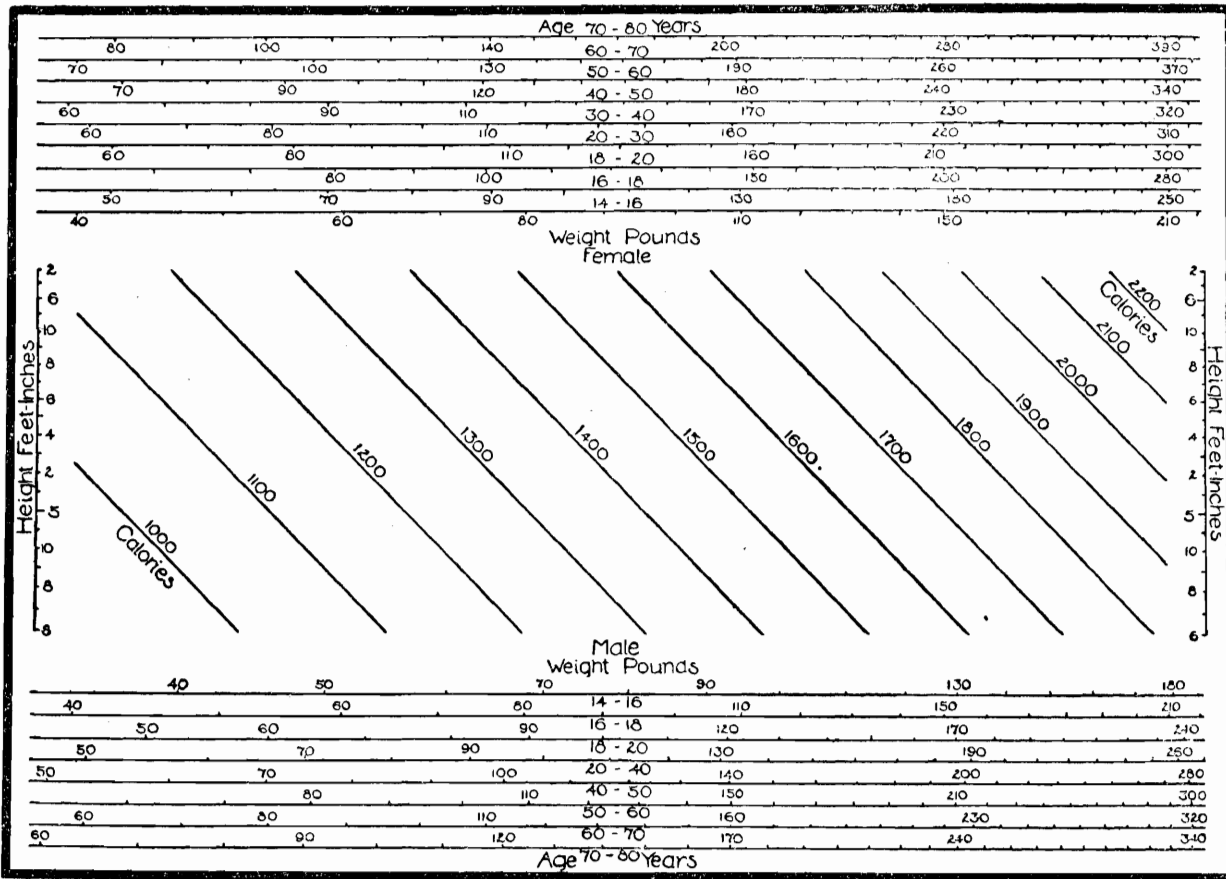


CHART III.

The x and y axes are divided in logarithmic units. A scale of height in inches is plotted from the equation

$$y = 0.725 \log 2.54 h.$$

A scale of weight in pounds is plotted for each basal metabolic rate from the equation

$$x = 0.425 \log 0.4536 w + \log 0.007184 + \log c + \log 24.$$

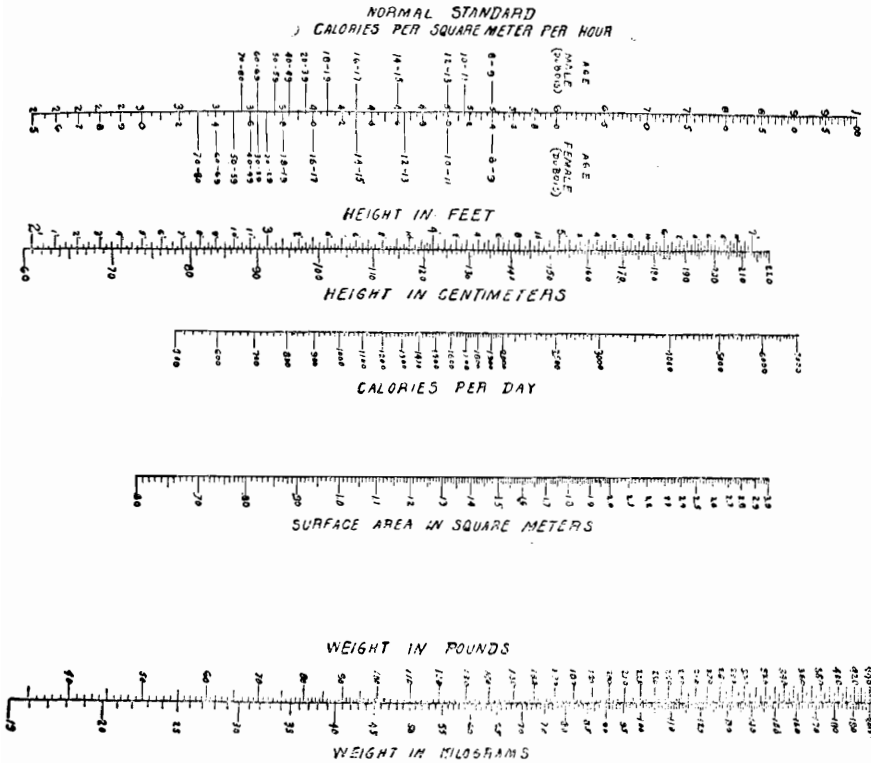


CHART IV.

Graphs are drawn for a series of equations

$$\log C = x + y$$

Chart III computes the basal metabolism per day for each sex from age, weight, and height for serial basal metabolic rates.

A double alignment chart (Chart IV) makes this calculation in two stages. A straight edge laid between the proper points on the scales of height and weight intersects the scale of surface area. Readjusted to lie between this point and the proper point on the scale of

sex and age group, it indicates the answer on the scale of calories. To this end two points must be spotted, a straight edge placed, an intersection marked, a fourth point spotted, the straight edge rotated, a value read. The operations are many and exacting. Each intermediary computation must be made separately. The manipulation of the straight line diagram is simpler and more direct. The result is derived from the data directly. The two methods are of comparable accuracy.

The adult basal metabolic rates per unit surface area, plotted by the BOOTHBY and SANDIFORD revision of the DU BOIS standards⁶, varies with age according to the exponential equations⁷

$$\begin{aligned} \text{Male} \quad c &= 44.16 e^{-0.0033 a} \\ \text{Female} \quad c &= 38.98 e^{-0.0024 a} \end{aligned}$$

in which c = calories per square meter per hour, e = the natural logarithmic base, and a = age in years. The resulting daily basal metabolism can be computed by means of the foregoing four variable straight line diagram with logarithmic rectangular coordinates so modified as to convert its serial variable into a continuous variable. The logarithm of the rate varies according to the linear equations

$$\begin{aligned} \text{Male} \quad \log c &= 1.6450 - 0.00144 a \\ \text{Female} \quad \log c &= 1.5909 - 0.00103 a \end{aligned}$$

These expressions for $\log c$ are substituted in the logarithmic equation for the daily basal metabolism. The combined scales of age in years and weight in pounds form a grid. Weight scales are constructed for the limiting ages. The sum of the logarithms of the constants and $\log c$ for the minimum age is laid off on one, the sum of the logarithms for the constants and $\log c$ for the maximum age on the other. The logarithms for successive weights are laid off from these points. The distance between these scales is divided in equal parts on age scales. Points of equality on the opposing scales of age and of weight are connected by straight lines. The joint coordinate for age and weight is the intersection of projections from their individual scales into the grid. Chart V computes the daily basal metabolism for each sex from age, weight, and height for metabolic rates in continuous variation.

The basal metabolism is determined clinically by measuring the volume of oxygen consumed from a spirometer per minute, reducing

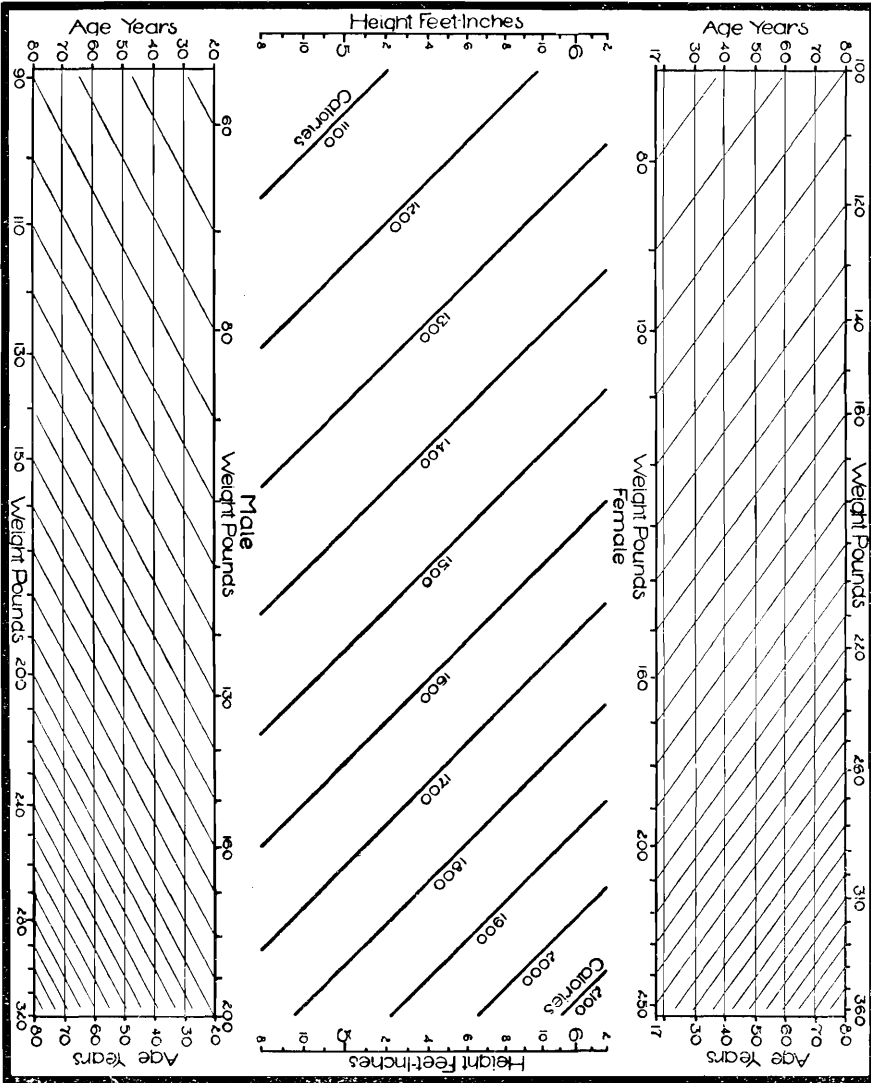


CHART V.

this volume to standard conditions, and multiplying the result by a calorific factor according to the equation

$$C = 1440 v \frac{273}{273 + t} \frac{p - 0.80 p_w}{760} 0.004774$$

in which C = calories per day, v = cubic centimeters minute volume decrement, t = temperature in degrees centigrade, p = millimeters of mercury atmospheric pressure, and p_w = millimeters of mercury saturated aqueous vapor tension⁸. The x and y axes are divided in logarithmic units. A scale of minute volume decrement is plotted from the equation

$$x = \log v .$$

On a series of isotherms scales of atmospheric pressure are plotted from the equation

$$y = \log 273 - \log (273 + t) + \log (p - 0.8 p_w) - \log 760$$

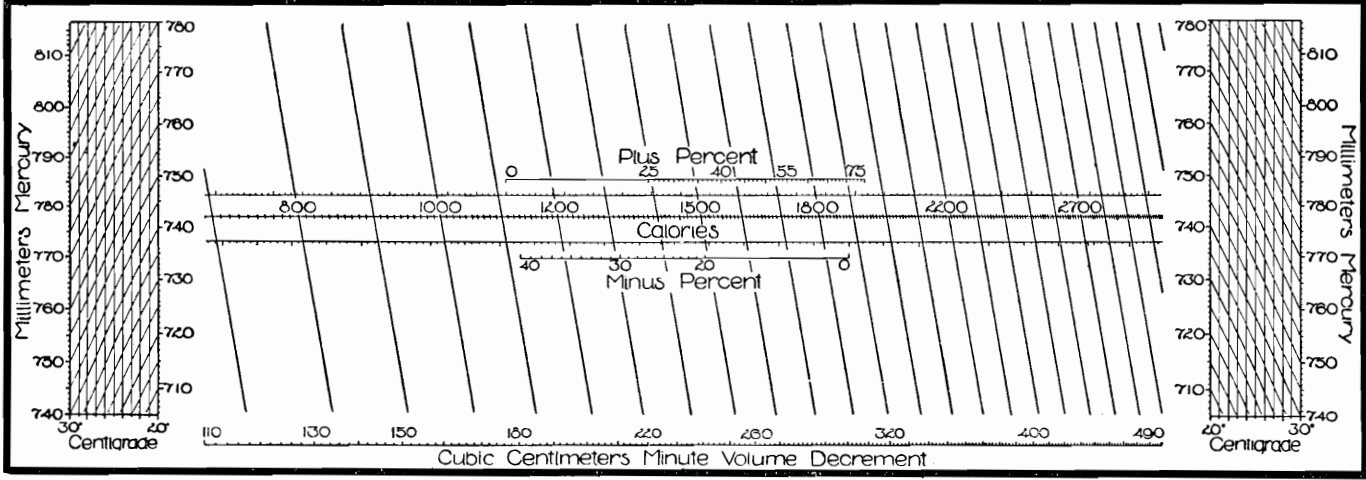
Isobars are drawn incorporating them in a grid. A series of graphs and a scale are plotted from the equation

$$\log C - \log 1440 - \log 0.004774 = x + y .$$

The determined basal metabolism is compared with the normal standard for the subject with regard to plus or minus percentile difference. Equidivisional scales of the respective proportional parts, the successive multiples of which approximate the logarithms of the successive plus and minus percentages, over the maximum range, are plotted. Auxiliary scales of the exact logarithms of plus and minus percentages outside these limits are plotted for correcting readings beyond the ranges of the equidivisional scales. Chart VI computes the daily basal metabolism from minute volume decrement, average spirometer temperature, and atmospheric pressure, and measures this against a standard in terms of plus or minus percentile basal metabolic rate.

The calorific value of oxygen depends upon the relative amounts of protein, carbohydrate, and fat it combines with. These proportions can be computed from the ratio of the volume of carbon dioxide eliminated to that of oxygen absorbed by the lungs and the amount of nitrogen excreted in the urine. In experimental determinations of metabolism the complete respiratory exchange and the nitrogen excretion are measured. The calorific value of a liter of oxygen can then be computed from the respiratory quotient and the nitrogen-oxygen

CHART VI.



ratio on a trilinear chart⁹. The foregoing chart (with the aqueous vapor tension correction omitted from the atmospherical pressure scales) might be so modified as to combine the oxygen consumption scale in a grid with a scale of calorific value. This would constitute a five variable straight line diagram. The scales for the calorific factor on the trilinear chart and on the straight line diagram could be constructed coincident. The heat production could then be computed from the respiratory quotient, the nitrogen-oxygen ratio, the oxygen consumption per minute, the temperature, and the atmospheric pressure.

The same construction is applicable to the equation

$$t = au^l \pm bv^m \pm cw^n \pm k.$$

The x and y axes are divided in numerical units. The scale equations and the graph equation derived from this equation directly.

The normal basal metabolism per day is predicted by the HARRIS-BENEDICT method from the multiple regression equations

$$\text{For men} \quad h = 66.4730 + 13.7516 w + 5.0033 s - 6.7550 a$$

$$\text{For women} \quad h = 655.0955 + 9.5634 w + 1.8496 s - 4.6756 a$$

in which h = heat-production in calories, w = weight in kilograms, s = stature in centimeters, and a = age in years¹⁰. Separate, generally symmetrical, contiguous charts are constructed for men and women¹¹. In each chart the x and y axes are divided in caloric units to such a scale and over such a segment as is required by the scale equations for the ranges assigned the three independent variables. The corrective coefficients for stature and weight are multiplied by 2.5400 and 0.4536 respectively. The scales of height in inches are marked off by plotting the corrective terms for height computed from the equations

$$\text{For men} \quad y = 12.7084 s_{in.}$$

$$\text{For women} \quad y = 4.6980 s_{in.}$$

The combined scales of age in years and weight in pounds plotted from the equations

$$\text{For men} \quad x = 66.4730 - 6.7550 a + 6.2377 w_b$$

$$\text{For women} \quad x = 655.0955 - 4.6756 a + 4.3380 w_b$$

form a grid. Weight scales are plotted for the limiting ages. The constant term of each equation minus the corrective term for the minimum age is laid off on one, the constant term minus the corrective

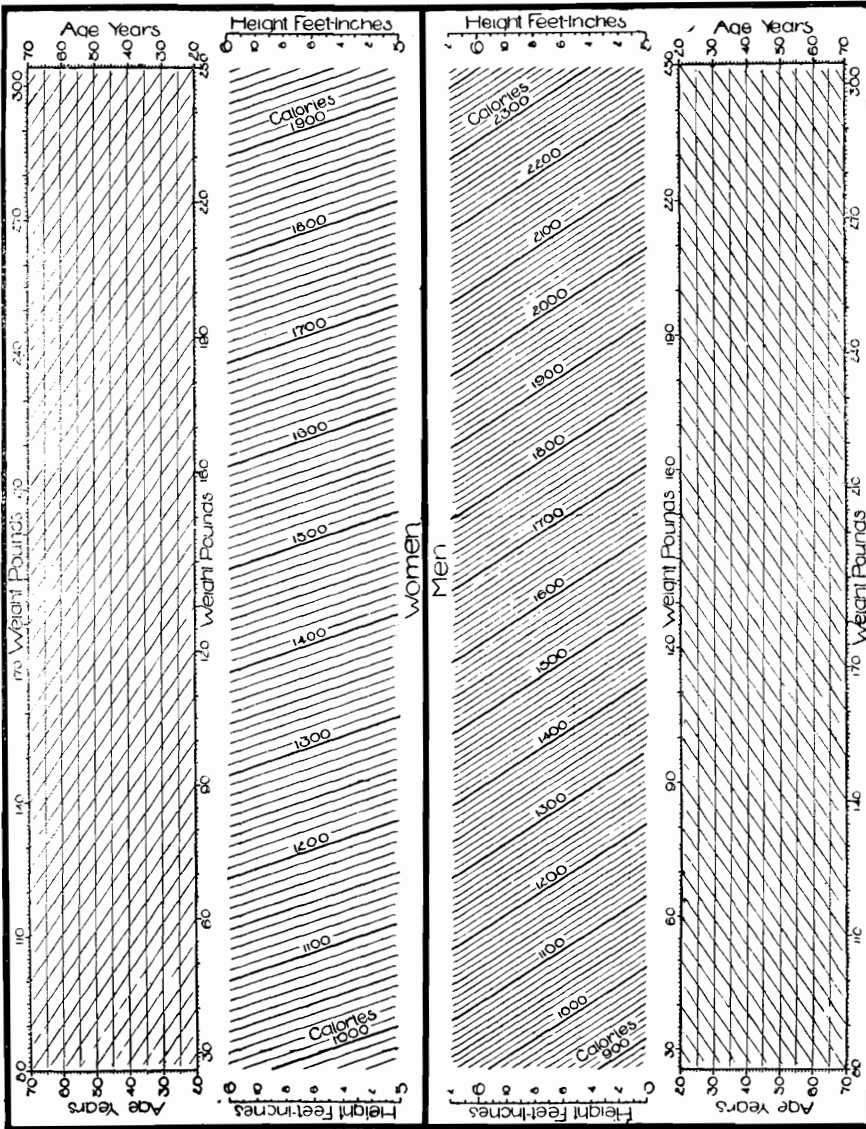


CHART VII.

term for the maximum age on the other. The scales are marked off by laying the corrective terms for successive weights off from these. The distances between these scales are divided in equal parts on age scales. Points of equality on the opposing scales of age and of weight are connected by straight lines. Graphs are plotted for a series of equations.

$$h = x + y .$$

Chart VII computes the daily basal metabolism for each sex from statistical constants for age, weight, and height.

BIBLIOGRAPHY

1. DU BOIS, D., and DU BOIS, E. F., *Formula to Estimate the Approximate Surface Area If the Height and Weight Be Known* " Arch. Int. Med. " **17** : 863-871 (1916).
2. AUB, J. C., and DU BOIS, E. F., *Basal Metabolism of Old Men* " Arch. Int. Med. " **19** : 823-831 (1917).
3. DU BOIS, E. F., *Basal Metabolism in Fever*, " J. Amer. Med. Assn. " **77** : 352-355 (1921).
4. BRUEN, C., *Nomogram Deriving Basal Metabolism from Height-Weight Coordinates*, " J. Biol. Chem. " **85** : 607-609 (1930). Cf. CAMPBELL, W. C., *Nomogram for Metabolism Estimations* " J. Lab. & Clin. Med. " **17** : 1113-1119 (1931).
5. BOOTHBY, W. M., and SANDIFORD, R. B., *Nomographic Charts for the Calculation of the Metabolic Rate by the Gasometer Method*, " Boston Med. & Surg. J. " **185** : 337-354 (1921).
6. BOOTHBY, W. M., and SANDIFORD, I., *Normal Values of Basal or Standard Metabolism, A Modification of the Du Bois Standards*, " Abs. Com. xiiiith Internat. Physiol. Cong., Amer. J. Physiol. " **90** : 290-291 (1929).
7. BRUEN, C., *Variation of Basal Metabolic Rate Per Unit Surface Area With Age*, " J. General Physiol. " **13** : 607-616 (1930).
8. BRUEN, C., *Chart for Computation of Daily Basal Metabolism and Percentile Basal Metabolic Rate from Spirometer Data*, " J. Lab. & Clin. Med. " **16** : 415-418 (1931).
9. MICHAELIS, A. M., *Graphic Method of Determining Certain Numerical Factors in Metabolism*, " J. Biol. Chem. " **59** : 51-58 (1924).
10. HARRIS, J. A., and BENEDICT, F. G., *Biometric Study of Basal Metabolism in Man*, " Carnegie Inst. Washington, Pub. " 279, 1919.
11. BRUEN, C., *Chart for Computation of Harris-Benedict Standards of Basal Metabolism*, " New England J. Med. " **202** : 531-532 (1930).

LEGENDS

CHART I.

CHART II. — Basal Metabolism of Men Thirty Years Old. After DU BOIS.

CHART III. — Basal Metabolism Per Day (DU BOIS). Go to the upper tier of weight scales for females, to the lower for males ; identify the scale for the required age group ; spot the weight in pounds ; carry a line perpendicularly into the field of the chart ; spot the height in feet and inches on the nearer scale ; carry a line horizontally to its intersection with the vertical line previously traced ; approximate the number of calories by interpolating between the adjacent graphs.

CHART IV. — Basal Metabolism Per Day (DU BOIS). BOOTHBY and SANDIFORD. Spot the height and weight on the proper scales ; lay a straight edge between these points ; mark its intersection with the scale of surface area ; spot the age group on the scale for the required sex ; turn the straight edge to lie between this point and the point located on the scale of surface area ; read the value of its intersection with the scale of calories.

CHART V. — Basal Metabolism Per Day. Go to the upper network for females, to the lower for males ; spot the age in years ; carry a line horizontally into the grid ; spot the weight in pounds ; carry a line in the direction of the guide lines to its intersection with the horizontal line previously traced ; from this point carry a line vertically into the field of the chart ; spot the height in feet and inches on the nearer scale ; carry a line horizontally to its intersection with the vertical line previously traced ; approximate the number of calories by interpolating between the adjacent graphs.

CHART VI. — Daily Basal Metabolism and Percentile Basal Metabolic Rate. Spot the cubic centimeters minute volume decrement ; carry a line perpendicularly into the field of the chart ; spot the average temperature in degrees centigrade ; carry a line vertically into the network ; spot the millimeters of mercury atmospheric pressure ; carry a line into the network in the direction of the guide lines to its intersection with the vertical line previously traced ; from this point carry a line horizontally into the field of the chart to its intersection with the vertical line previously traced ; from this point carry a line in the direction of the graphs to its intersection with the scale of calories ; read the result ; spot the normal basal metabolism for the subject computed from the companion chart for the DU BOIS or HARRIS-BENEDICT standards ; measure the distance between standard and determined values to the nearest percent plus or minus on the respective equidivisional scale ; if this reading is greater than plus 25 or minus 20 correct it by measuring it against the adjoining exact scale.

CHART VII. — Basal Metabolism Per Day (HARRIS-BENEDICT). Go to the upper section for women, to the lower for men ; spot the age in years ; carry a line horizontally into the network ; spot the weight in pounds ; carry a line in the direction of the guide lines to its intersection with the horizontal line previously traced ; from this point carry a line vertically into the field of the chart ; spot the height in feet and inches on the nearer scale ; carry a line horizontally to its intersection with the vertical line previously traced ; approximate the number of calories by interpolating between the adjacent graphs.

GUIDO LUCATELLO

La popolazione studentesca dell'Università di Grenoble

SOMMARIO : 1. Cenni storici sull'Università di Grenoble. — 2. Fonti della rilevazione ed elaborazione dei dati statistici. — 3. Cattedre, gradi accademici e popolazione studentesca distinta per facoltà. — 4. Corsi per stranieri. — 5. Composizione per nazionalità della popolazione studentesca. — 6. Diplomi rilasciati nel XVI° secolo. — 7. Bibliografia. — 8. Appendice : Tabelle dei dati sulla popolazione studentesca e Grafici.

1. — L'Università di Grenoble, pur avendo origini molto antiche, si è sviluppata particolarmente in questi ultimi decenni, mercè la perfetta organizzazione per gli stranieri desiderosi di imparare la lingua francese.

Il primo tentativo di fondare uno Studio in Grenoble fu fatto dal Delfino Umberto II° che lo creò nel 1339 (la bolla di Benedetto XII° è del 12 maggio), assicurando con lettere patenti, datate del 25 luglio di quell'anno, una protezione vigilante e viveri a buon prezzo agli studenti e questo inoltre per almeno « cent d'entre eux sans bourse délier (1) », con evidente imitazione di ciò che i suoi parenti avevano fatto per l'Università di Napoli.

Si organizzò infatti l'insegnamento del Diritto Canonico e Civile. Tenne per primo la carica di Rettore Amedée Allemand, priore del convento di Saint-Laurent. Purtroppo non sappiamo nulla sul numero degli studenti. Del resto fu creazione effimera e non abbiamo più documenti dopo il 1345 ; certo non durò oltre il 1349, epoca in cui il Delfinato fu ceduto alla Casa di Francia.

Nel 1452 il futuro Luigi XI°, allora principe del Delfinato, fondò una Università a Valence, ma a Grenoble non fu ristabilita.

Solo il 16 agosto 1542 delle lettere patenti del Governatore del Delfinato, Francesco di Saint Pol, permisero a Grenoble di usare della fondazione di Umberto II° con una finzione giuridica « sans

(1) M. PAUL FOURNIER : *L'ancienne Université de Grenoble* (Livre centenaire de la Faculté de Droit). Grenoble, Allier frères, 1906.

avoir égard aux deux siècles pendant lesquels l'Université avait été discontinuée » per merito principale di tre giureconsulti, Girard Servient, Pons Acthuier e Pierre Boucher, dottori in legge, e del Console del Consiglio della città, George Rogier. Tale espediente permise di non chiedere il permesso papale che altrimenti sarebbe stato necessario.

A Cancelliere dell'Università fu nominato il Vescovo da cui dipendeva il Rettore che ne aveva la direzione effettiva. I diplomi venivano dati a nome del Vescovo.

A partire dal 1550 il Rettore fu scelto tra gli studenti, ma non eletto da tutta la scolaresca, come in molte Università italiane, bensì da 14 persone, e cioè sette studenti, tra cui il Rettore uscente, e sette cittadini che coprivano cariche importanti in Grenoble.

Anche in questo secondo periodo la vita dello Studio fu alquanto stentata e ciò principalmente a causa di dissensi interni. Furono questi che diedero motivo all'abolizione della Università compiuta nel 1565 da Carlo IX^o, con lettere patenti dell'aprile di quell'anno, in cui veniva ordinata la fusione dell'Università di Grenoble con quella di Valence, fissandone la sede a Valence, come aveva propugnato il Vescovo di quella città.

Nonostante l'opposizione del Parlamento di Grenoble che non ratificava il Decreto Reale, l'Università cessava di sussistere per mancanza di mezzi. Ma i cittadini di Grenoble non se ne dettero mai pace e tentarono, specialmente verso la fine di quel secolo e poi nel XVIII^o, di farla rivivere. I loro sforzi portarono alla creazione nel 1771 di una scuola pubblica di Chirurgia, che venne riorganizzata nel 1803.

Però le aspirazioni della città furono accolte solo da Napoleone I^o che il primo novembre 1805 firmava, nel quartiere generale di Braunau, il decreto istituyente la Scuola di Diritto a Grenoble.

La Scuola fu creata perchè fosse studiato e divulgato il « code civil » di Napoleone, a cui è di poco posteriore, e sorse assieme a molte altre in un generale riordinamento dell'istruzione pubblica dell'impero; ma certo a che Grenoble fosse scelta come sede di una delle 12 scuole istituite, influi molto, ancora più del desiderio dei cittadini, la posizione geografica della città, sentinella della Francia sulle Alpi. È invero sintomatico e può essere interessante notare che lo Studio Grazianopolitano, il più vicino allo spartiacque tra la Francia e l'Italia, venne ricostituito da Napoleone Buonaparte il quale, come re d'Italia, aboliva da noi la secolare Università di Ferrara.

Questo evidente contrasto si può spiegare soltanto attribuendo al Governo francese l'intenzione di diminuire i centri di studio dell'Italia per far sì che quelli creati entro i confini naturali dell'Impero potessero meglio estendere l'influenza della coltura francese.

Del resto questa intenzione non è senza prove, almeno per i Grenoblelesi, il cui Tribunale d'Appello in un'istanza perchè venisse scelta Grenoble a sede di una scuola di diritto scriveva «..... il serait convenable de rendre l'École spéciale de Droit qu'on se propose d'établir à Grenoble commune aux départements du Piemont nouvellement réunis ; les habitants de ces départements y trouveraient le double avantage de se former dans l'étude du droit, d'y apprendre la langue française et de s'identifier plus rapidement avec les mœurs et les usages du peuple français ». E la proposta se non fu accolta dall'imperatore, il quale creò una sola scuola a Torino, una soltanto per tutta la parte dell'Italia annessa all'Impero, aveva favorevoli molti membri del Consiglio di Stato, tra i quali il celebre Portalis.

Nell'aprile del 1806 la Scuola, poi Facoltà di Diritto, si apriva ai primi allievi e da allora il suo funzionamento non fu sospeso che durante il triennio 1821-24 per tumulti studenteschi. Dal 1912 funziona, come « annexe » della Facoltà, l'Istituto Commerciale.

Nel novembre 1806 venivano istituiti dei corsi pratici di Medicina, Chirurgia e Farmacia che si trasformavano nel 1820 in una Scuola secondaria di Medicina.

Un decreto imperiale del 17 marzo 1808, che organizzava l'insegnamento superiore in Francia, aggiungeva alla Scuola di Giurisprudenza le Facoltà di Lettere e di Scienze. Un decreto reale del 5 ottobre 1841 sostituiva alla Scuola secondaria di Medicina una Scuola preparatoria di Medicina e Farmacia che venne riorganizzata una prima volta nel 1866 e una seconda volta nel 1894.

Era così creata l'Accademia di Grenoble con a capo un Rettore. La Facoltà di Lettere cominciò a funzionare nel maggio 1810, ma ebbe breve vita; avvenuta la Restaurazione monarchica, i Borboni, ostili alle Facoltà di Lettere, sospette di liberalismo e di bonapartismo, ne soppressero molte (2). Così il 31 ottobre 1815 — poco dopo i Cento giorni — veniva abolita anche quella di Grenoble.

Mutato il regime politico della Francia, Luigi Filippo pensò

(2) Nel 1815 in Francia furono soppressi 17 Facoltà di Lettere e 3 Facoltà di Scienze.

di ristabilire la Facoltà di Lettere di Grenoble; cause banali fecero sì che venisse ricostituita soltanto molti anni dopo con un'ordinanza del 2 aprile 1847. Un mese più tardi già cominciava a funzionare. Dal 1898 la Facoltà di Lettere tiene dei corsi speciali per stranieri di cui parleremo in seguito ampiamente.

La Facoltà di Scienze venne di fatto costituita da un decreto del *Grand Maître de l'Université* (3) (il senatore Louis de Fontanelles), datato 8 ottobre 1811, e venne solennemente inaugurata il 26 dello stesso mese.

La Facoltà di Scienze, più fortunata di quella di Lettere, non fu soppressa nel '15, nè subì mai sospensioni; ora fa parte di essa anche l'Istituto Politecnico che comprende l'Istituto Elettrotecnico, creato nel 1899 dal Consiglio dell'Università, e la Scuola di Cartoleria di cui fu decisa la fondazione nel 1907 e che venne aperta qualche anno dopo.

L'Università di Grenoble ha poi quali « dépendances » una Scuola preparatoria all'insegnamento superiore di Scienze e Lettere a Chambéry, ed in Italia l'Institut Français di Firenze, inaugurato nell'aprile 1908, e, dal dopoguerra, quello di Napoli, i quali due Istituti dipendono direttamente dalla Facoltà di Lettere.

2. — Le fonti da cui vennero tratti gli elementi, dati e notizie, per la rilevazione statistica sono varie.

Le ricerche negli archivi e nelle biblioteche cittadine per avere i dati sulla popolazione studentesca del secolo scorso ebbero esito negativo. Solo nel « Livre Centenaire de la Faculté de Droit (4) » si trovò la statistica degli iscritti e quella delle iscrizioni nelle singole materie della Facoltà di Giurisprudenza dalle origini sino al 1906 fatta dall'Ingegnere I. Balleydier, ma nulla per le altre Facoltà. All'*Académie* si afferma che i registri e gli incartamenti riguardanti gli studenti del secolo scorso sono stati distrutti.

Fortunatamente, pel gentile interessamento del Prof. P. Ronzy e di M. Grenier, segretario dell'Università, si poterono fare delle accurate ricerche alla Biblioteca Universitaria. Vennero trovati degli opuscoli pubblicati annualmente dal 1852 (e di cui mancano poche annate), contenenti ciascuno il resoconto di una « Séance annuelle de rentrée des Facultés » e si poterono rintracciare nei discorsi del

(3) Ministro dell'Istruzione Pubblica.

(4) Vedi sopra.

Recteur de l'Académie e dei *Doyens*, ivi contenuti, importanti dati statistici sulla popolazione studentesca.

Bisogna notare che i dati desunti dai discorsi dei rettori dell'*Académie* e dei presidi della Facoltà di Giurisprudenza, e che riguardano l'ammontare degli iscritti (esaminati e non esaminati) della «*Faculté de Droit*» per il periodo 1877-1897, discordano da quelli del Balleydier che ci dà un numero di iscritti costantemente inferiore.

La serietà e l'attendibilità delle due fonti è pressochè pari. I presidi ebbero direttamente i dati dalla segreteria anno per anno; il Balleydier, che forse ignorava l'esistenza di opuscoli contenenti i discorsi delle «*Séances annuelles de rentrée des Facultés*», o almeno, molto probabilmente, l'esistenza di cifre riguardanti la popolazione studentesca, fece lo spoglio dei registri delle iscrizioni, che a quel tempo ancora esistevano. E la rilevazione dovette essere accurata perchè gli studenti sono suddivisi secondo il dipartimento da cui provengono.

Si deve piuttosto ammettere un qualche errore sistematico da entrambe le parti. Mentre è probabile che le cifre date dai presidi siano errate per eccesso, giacchè si può presumere che siano compresi anche gli studenti di altre Facoltà contemporaneamente iscritti alla Facoltà di Giurisprudenza, pel metodo di rilevazione del Balleydier quasi sicuramente si può affermare che le sue cifre sono errate per difetto: egli desunse il numero degli iscritti di ogni anno scolastico dalla prima iscrizione trimestrale in una materia giuridica (varie erano le materie in cui gli studenti dovevano iscriversi); il che lo condusse facilmente, per tema di contare più volte lo stesso studente, ad ometterne alcuni. Quindi si è creduto opportuno per il periodo sopra citato di fare una media tra le cifre del Balleydier e quelle dei presidi.

Per il periodo precedente al 1879, pel quale abbiamo i soli dati del Balleydier, è stato aumentato annualmente il numero degli studenti dell'8 %, potendosi presumere in media un errore per difetto di tale entità.

Queste cifre più attendibili sono state poste nelle tabelle dei dati accanto a quelle del Balleydier e nelle tabelle riassuntive della popolazione studentesca.

In quanto ai dati raccolti per le altre Facoltà, per le Scienze nel periodo che va dal 1851 al 1887 e per le Lettere dal 1851 al 1883, conosciamo solo i candidati alla licenza. Quindi, supponendo che

ciascun candidato abbia appartenuto alla Facoltà, per il triennio necessario a conseguire la licenza, si potrà risalire dal numero dei candidati al numero degli iscritti per mezzo di un semplice raggruppamento di candidati di tre in tre anni ; cioè esprimendo con a il numero dei candidati del primo anno di questo periodo, con b quello del successivo e con c quello del terzo, d quello del quarto e così via e, rispettivamente con x_1, x_2, x_3, \dots il numero degli studenti del primo, secondo, terzo anno, ecc., avremo :

$$\begin{aligned} c + b + a &= x_1 \\ d + c + b &= x_2 \text{ ecc.} \end{aligned}$$

La quasi perfetta corrispondenza delle cifre trovate con questo metodo con quelle desunte dai discorsi dei rettori e dei presidi per il periodo che va dal 1876-77 al 1886-87 compreso (vedi tabelle dei dati sulla popolazione studentesca) ci ha confermato la bontà del sistema.

Le piccole saltuarie lacune nei dati della popolazione studentesca della Facoltà sono state colmate con cifre presumibili sia nelle tabelle riassuntive della popolazione studentesca Universitaria, allo scopo di dare una visione generale più completa, sia nei grafici perchè non vi fossero interruzioni.

Le lacune di un anno sono state colmate con cifre risultanti dalla media aritmetica dei due dati contigui. Per le lacune di due anni abbiamo invece interpolato una parabola di terzo grado fra le due coppie di valori noti immediatamente a destra e a sinistra della lacuna. Inoltre poichè solo per la Scuola di Medicina mancavano i dati precisi dal 1851 al 1856 — il numero annuo degli studenti si doveva aggirare fra i 29 e i 39 — argomentando dalla successiva tendenza all'aumento si è supposto che il primo anno scolastico (1851-52) e l'ultimo (1856-57) della lacuna da colmare siano stati rispettivamente 30 e 38 ed è stata interpolata una retta tra queste due cifre.

Avvertiamo fin d'ora che in tutte le tabelle i dati calcolati o elaborati sono in corsivo.

I dati statistici che riguardano la popolazione studentesca dal 1900 al 1929 sono tolti dai « Rappports annuels » dell'Università. I dati del 1929-30 e 1930-31 vennero forniti dalla Segreteria dell'Università.

Il numero degli studenti che seguirono i corsi appositi per stranieri, venne desunto dai registri del *Comité de Patronage des*

étudiants étrangers. Questi registri, che si trovano per gli anni 1903-1919 nell'Archivio del Comitato a Place Verdun (nel Palazzo dell'Università) e per gli anni 1919-1932 nella segreteria stessa del Comitato che ha sede in Rue Vieux Temple, si poterono consultare avendone ottenuto il permesso da M. Paul Ronzy, professore di lingua e letteratura italiana all'Università e segretario generale del *Comité de Patronage*, a cui si rinnovano i più vivi ringraziamenti.

Inoltre vennero consultati accuratamente e si tenne conto dei rapporti annuali del *Comité de Patronage pour les étudiants étrangers* che esistono dalla fondazione del comitato stesso. Questi rapporti furono particolarmente utili per esaminare il funzionamento dei corsi di vacanza e trarne i dati relativi al numero degli studenti per gli anni, dalla creazione del corso al 1903, di cui mancano i registri.

Si debbono ora dare alcuni schiarimenti onde meglio valutare i dati statistici della popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

Nel 1875 una legge sancì il principio della libertà dell'insegnamento in Francia e da allora in tutte le Facoltà divenne necessaria l'iscrizione soltanto per poter ottenere dei gradi accademici.

La pubblicità dei corsi venne in seguito modificata. Nel 1887 fu abolita la gratuità; infine un decreto del 21 luglio 1897 rese necessaria, anche per la semplice frequenza, la formalità dell'immatricolazione. Solo i corsi della Scuola preparatoria all'Insegnamento Superiore di Scienze e Lettere sono anche al giorno d'oggi pubblici e gratuiti.

Dal 1897 gli studenti si possono raggruppare in queste quattro categorie: coloro che sono iscritti e vengono immatricolati d'ufficio, quelli che sono semplicemente immatricolati perchè desiderano soltanto di frequentare l'Università, coloro che hanno delle iscrizioni non annullate e quelli che chiedono di sostenere degli esami di una Facoltà pur essendo iscritti in un'altra.

Nelle tabelle statistiche è stato tenuto conto soltanto delle due prime categorie, le quali costituiscono l'effettiva popolazione studentesca; sono però riportati per gli anni precedenti all'istituzione dell'immatricolazione anche i dati relativi agli uditori ed agli studenti che si presentarono agli esami di una Facoltà pur non essendovi iscritti.

Nelle tabelle dei corsi per stranieri durante l'anno accademico e in quelle riassuntive, in luogo dell'ammontare effettivo della po-

polazione studentesca si è tenuto conto del numero delle iscrizioni ai singoli corsi. Comunque il caso di iscrizioni plurime, durante l'intera annata non è apparso dalle indagini che abbiamo potuto compiere molto notevole, cosicchè il numero delle iscrizioni non è da ritenersi molto discosto dall'effettivo ammontare della popolazione studentesca.

3. — L'Università di Grenoble comprende tre Facoltà: Giurisprudenza, Lettere e Scienze, e la Scuola di Medicina e Farmacia.

La dirigono il Rettore, scelto tra i professori dal Ministro dell'Istruzione, ed il Consiglio dell'Università, di cui il Rettore stesso è presidente.

a) *Facoltà di Giurisprudenza.* — La Facoltà di Giurisprudenza conta normalmente tredici professori ordinari i quali coprono le cattedre, create in diverse epoche, come dal seguente specchio:

Anni	Numero	Cattedre
1805	5	Diritto civile (3), Procedura civile e Legislazione Crimin. (1) Diritto Romano (1).
1839	1	Diritto Commerciale (1).
1858	1	» Amministrativo (1).
1873	1	» Romano (1).
1875	1	» Penale (1).
1892	2	» Costituzionale (1), Diritto Internazionale (1).
1900	1	Economia Politica (1).
1907	1	» » (1).

Il Preside (*Doyen*) è scelto tra i professori delle Facoltà.

Le Facoltà, e l'Istituto Commerciale che ne fa parte, conferiscono vari titoli accademici che riportiamo in nota (5).

Vediamo le medie annue del numero degli studenti nei periodi che possiamo chiamare storico-scolastici della vita delle Facoltà sin verso la fine del secolo (6).

(5) La Facoltà conferisce: il Certificato di Studi Politici ed Amministrativi; quattro diversi Diplomi di studi superiori; la licenza in Legge; il Dottorato in Legge di Stato, ed il Dottorato dell'Università, ramo di Legge (per soli stranieri).

All'Istituto Commerciale vengono tenuti venti corsi e si conferiscono: il Diploma dell'Istituto ed il Certificato di Studi Commerciali.

(6) Vedi per l'elaborazione dei dati il par. 2.

	Studenti iscritti		Totale	
	Francesi (dati grezzi)	Stranieri (dati grezzi)	(dati grezzi)	(dati elaborati)
Napoleonico (fino al 1815 compreso).	161	0.8	162	175
Restaurazione (1815-16 — 1820-21 e 1823-24 — 1829-30)	176	2.3	178	192
Luigi Filippo (1830-31 — 1847-48) . .	158	3.3	161	174
2ª Repubblica e Impero 1848-49 — 1869-70).	149	0.6	150	162
3ª Repubblica (1870-71 — 1896-97) .	160	1.9	162	177

Lo specchio ci indica un maggior numero di allievi nel periodo tranquillo della Restaurazione in confronto di quello Napoleonico, una minor affluenza sotto il regno di Luigi Filippo, ancora una diminuzione con l'avvento della 2ª Repubblica e nel 2º Impero in anni o turbolenti all'interno o di guerra per la Francia (Guerra di Crimea e Franco-Sardo-Austriaca), poi un più notevole affluire di giovani allo studio del diritto fino alle riforme del 1896.

Le cifre degli stranieri ci dicono poco; è solo da notare che l'aumento di essi nel tempo che va dal 1815 al 1848 non è reale, ma dovuto al fatto che mentre nel periodo Napoleonico e dopo il 1860 i Savoiani sono considerati francesi (7) nei periodi intermedi sono posti coi Sardo-Piemontesi.

Dal 1897 possiamo presentare l'intera popolazione studentesca:

Periodi	Iscritti e immatricolati	Immatricolati non iscritti	Totale	Francesi	Stranieri
IIIª Repubblica (1897-98 — 1913-14).	164	98	262	181	81
Guerra mondiale (1914-15 — 1918-19).	—	—	111	—	—
Dopo guerra (1919-20 — 1930-31)	232	227	459	273	186

Dalla fine del secolo scorso all'inizio della guerra mondiale il numero degli iscritti si mantiene pressochè pari. Tale fatto è dovuto alla maggiore affluenza degli stranieri, i quali, pur ingrossando maggiormente il numero degli uditori (immatricolati), sono da annoverarsi tra gli iscritti in numero non così esiguo come nei periodi precedenti.

(7) La Savoia passò alla Francia dopo la conclusione della guerra Sardo-Franco-Austriaca nel 1859.

Gli stranieri, affluiti in numero non rilevante (15-20 circa all'anno) nei primi quattro anni scolastici, sono improvvisamente aumentati a una settantina nel 1901-02, e si sono mantenuti sempre al di sopra di tale numero sino al 1913. Il contingente massimo di stranieri (145 studenti) si è registrato nel 1908-09.

La guerra mondiale ha avuto per conseguenza una notevole diminuzione della popolazione studentesca sia straniera che francese.

Il dopo guerra deve essere distinto in due periodi: dal 1919-20 al 1925 il numero degli studenti francesi (media annua: 290) supera di gran lunga quello degli stranieri (media annua: 65); a partire dal 1925-26 sino al 1931 gli stranieri diventano via via più numerosi (media annua 306, molto superiore a quella dei francesi che è di 257). L'aumento degli stranieri ha avuto per effetto di ingrossare le schiere degli immatricolati non iscritti ed è correlativo al fiorire dell'Istituto Commerciale ed alla maggior affluenza di studenti tedeschi per le migliorate relazioni franco-germaniche.

b) *Facoltà di Lettere.* — La Facoltà di Lettere, da cui dipendono i due Istituti francesi in Italia di Napoli e di Firenze, è presieduta da un *doyen*, scelto normalmente tra i professori, che coprono tredici cattedre, fondate in epoche diverse, come si vede dal seguente specchio:

Epoche di fondazione	Numero	Cattedre
1808	5	Storia, Filosofia, Letteratura greca, Lett. latina, Lett. francese.
1850-1895	2	Letteratura inglese, Lingua e Letteratura tedesca.
1897-1931	6	Geografia, Filologia francese, Lingua e Lett. italiana, Lingua e Lett. italiana e francese comparate, Lingua francese (a Firenze), Lingua e Letter. francese (a Firenze).

Inoltre vi sono dei dottorati, dei corsi complementari e dei corsi di conferenze. Vedasi in nota l'elenco dei vari gradi accademici che la Facoltà conferisce.

Nota. — Titoli accademici: Certificati di studi superiori: di Geografia alpina, di Studi medioevali francesi (due sezioni: letteraria e storica), di Fonetica, di Grammatica e di Filologia francese moderna, che uniti costituiscono la licenza comune. Quattro diplomi di studi superiori: 1) di Storia e Geografia;

Più che dall'aumento delle cattedre dall'epoca della fondazione, lo sviluppo della Facoltà è caratterizzato dalla sempre maggior affluenza di studenti.

Dei primi cinque anni di vita della Facoltà non abbiamo alcun dato. Dopo la ricostituzione, avvenuta nel 1847, il compito precipuo era di esaminare i candidati al baccalaureato.

Ecco le medie annue per periodi novennali dal 1851 al 1897 (tralasciando di considerare l'anno 1869-70 in cui, a causa della guerra franco-prussiana, non risulta siano state fatte sessioni di baccalaureato).

Periodi	Candidati al baccalaureato
1851-52 — 1859-60	131
1860-61 — 1868-69	214
1870-71 — 1878-79	307
1879-80 — 1887-88	584
1888-89 — 1896-97	684

L'insegnamento rimase per molti anni un compito secondario; dal 1848 al 1851 non abbiamo dati sul numero degli studenti; ma dovettero essere pochissimi e pochi rimasero fino al 1870-71.

Lo scarsissimo contingente era dato da alcuni candidati alla licenza — si ebbero undici licenziati in 12 anni — da qualche studente in Giurisprudenza e da alcuni *Maîtres d'études* (8), nonchè da pochi borghesi (9).

L'avvento della Repubblica segna il fiorire, come delle altre Facoltà, anche di quella di Lettere. La media dei candidati che era di 4 all'anno per la licenza e il dottorato in Lettere sale, nel periodo che va dal 1871 al 1883, a 15 circa e quindi si può presumere che dal

2) di Filosofia; 3) di Lingue classiche; 4) di Lingue e Letterature stranieri viventi. Quattro licenze speciali: Filosofia (quattro corsi speciali), Lettere (sei corsi), Storia e Geografia (nove corsi), Lingue viventi (nove corsi). Il Dottorato in Lettere (di Stato), il Dottorato dell'Università di Grenoble presso la Facoltà di Lettere. Per i francesi venne creato nel 1910 il Diploma ed il Certificato di attitudine all'insegnamento del Francese all'Estero.

Mentre per soli stranieri, specialmente per gli italiani, vennero istituiti a Firenze ed a Napoli il Certificato di Studi pratici del francese ed il Diploma di Studi francesi, per gli stranieri vennero creati i Diplomi citati più avanti, al paragrafo 4°.

(8) Nome usuale degli incaricati alla sorveglianza di scolari e studenti.

(9) Centenaire de la Faculté de Lettres, Grenoble, Allier Frères 1910.

1851 all'83 gli studenti siano stati in media in numero di 27 all'anno (vedi tabelle della popolazione studentesca).

Poi gli allievi aumentano ancora e si fanno specialmente numerosi all'inizio del nostro secolo come si vede nel seguente specchio:

Periodi storici	Medie annuali dei francesi dei corsi normali	Medie annuali degli stranieri dei corsi normali	Totale generale dei corsi normali
1883-84 — 1896-97	—	—	107
1897-98 — 1913-14	132	227	359
1914-15 — 1918-19	—	—	307
1919-20 — 1930-31	314	615	929

Durante la guerra mondiale — in cui è stato compreso anche il 1918-19, perchè la Francia non smobilitò fino alla pace con la Germania — la Facoltà venne molto frequentata e nel dopo guerra il forte aumento è dovuto, quasi esclusivamente, al grande numero di stranieri che si immatricolarono alla Facoltà. Prima del 1897 quasi non ve n'erano, poi improvvisamente appare un notevole contingente che va aumentando fino alla grande guerra. Durante il conflitto mondiale gli stranieri non sono rappresentati che da qualche profugo, e mancano i dati relativi; nel dopo guerra l'affluenza riprende superando quella degli studenti francesi: ciò specialmente dal 1925.

Le ragioni dell'accorrere di stranieri alla Facoltà di Lettere per compiere i loro studi sono le stesse già esposte per spiegare l'affluenza di stranieri alla Facoltà di Giurisprudenza; il numero degli stranieri è maggiore in Lettere che in Legge per la grande utilità della conoscenza del francese da parte di tutti, mentre il diritto francese, per ovvie ragioni, presenta minor interesse per uno straniero.

Notevole importanza hanno in Italia: l'Istituto Francese di Napoli e quello di Firenze che dipendono dalla Facoltà di Lettere. Dell'Istituto di Firenze — il più antico e frequentato — riportiamo i dati:

Anni	Maschi	Femmine	Totale
1908-09 }	?	?	?
1909-10 }			
1910-11 }			
1911-12	9	63	72
1912-13	19	53	72
1913-14	18	60	78

Più 19 maschi di un corso serale

Anni	Maschi	Femmine	Totale
1914-15	13	60	73
1915-16	9	87	96
1916-17	12	123	135
1917-18	7	146	153
1918-19	5	172	177
1919-20	16	142	158
1920-21	18	104	122
1921-22	12	65	77
1922-23	34	105	139
1923-24	24	107	131
1924-25	14	115	129
1925-26	16	132	148
1926-27	11	116	127
1927-28	6	120	126
1928-29	11	130	141
1929-30	16	150	166
1930-31	12	172	184

c) *Facoltà di Scienze.* — La Facoltà di Scienze è diretta da un preside e conta normalmente quindici professori, alcuni « *maîtres de conférences* », cinque direttori preposti ai lavori e otto assistenti effettivi degli istituti.

Costituiscono la Facoltà le seguenti quindici cattedre :

Anni di fon- dazione	Numero	Cattedre
1811	3	Matematica pura, Matematica applicata, Scienze Fisiche (poi Fisica).
1818	(2)	Chimica, Storia naturale (cattedre non magistrali).
1824	—	Unificazione delle cattedre di matematica, elevazione a cattedra magistrale di quella di Storia naturale
1838	2	Zoologia, Chimica (resa cattedra magistrale).
1875-76	2	Meccanica razionale, Botanica.
1894-1931	8	Analisi infinitesimale, Elettrochimica ed elettrometallurgia, Fisica industriale, Micrografia, Geologia e Mineralogia, Fisica industriale e metallurgia fisica, II. Fisica, II. Chimica, divenuta cattedra di Geologia quella di Storia naturale.

Fino al 1875 la sola funzione ben definita della Facoltà era la « collation des grades ». Che questa mansione dovesse occupare ben poco i professori lo si può desumere dal numero dei candidati al baccalaureato di Scienze: dal 1811 al 1852 furono III.

In seguito la funzione venne esplicitata su più larga scala, come ci mostrano le seguenti medie per periodi novennali, in cui non vengono considerati l'anno della guerra franco-prussiana (1869-70) e il seguente (1870-71), per i quali non si hanno dati:

Periodi novennali	Medie annuali
1851-52 — 1859-60	82
1860-61 — 1868-69	106
1871-72 — 1879-80	114
1880-81 — 1888-89	233

Compito secondario era l'insegnamento, che si riduceva alla preparazione ai gradi superiori di licenza e di dottorato, a cui aspiravano solamente coloro che avevano intenzione di dedicarsi alla carriera scientifica. Nondimeno gli sforzi della Facoltà non cessavano di tendere verso lo sviluppo dell'insegnamento. Nel 1848 la Facoltà, aveva creato dei corsi popolari di meccanica, di fisica, di chimica, (applicate all'igiene, all'agricoltura, alle arti industriali) che erano molto frequentati. Ma solo nel 1875, con la approvazione della Legge sulla libertà dell'insegnamento, cominciò l'aumento della popolazione studentesca e lo sviluppo della Facoltà.

Fino al 1851 mancano i dati e non possiamo in alcun modo calcolare il numero, certamente esiguo, di coloro che frequentarono i corsi normali (detti superiori) della Facoltà. Riportiamo per i periodi successivi le medie annuali dei candidati alla licenza e quelle approssimative degli studenti dei corsi di preparazione, calcolate in base al numero degli esaminati:

Periodi	Medie annuali dei candidati alla licenza	Medie annuali degli studenti dei corsi per la licenza
1851-52 — 1868-69	1,9	3,9
1871-72 — 1886-87	11,4	53

Riportiamo anche le medie annuali del totale degli studenti dal 1887 per i seguenti periodi:

Periodi	Francesi	Stranieri	Totale
1887-88 — 1896-97	—	—	69
1897-98 — 1913-14	213	40	258
1914-15 — 1918-19	—	—	438
1919-20 — 1930-31	788	355	1.143

Si può notare un progressivo e fortissimo aumento della popolazione studentesca, aumento che continua nel periodo della guerra mondiale e che è dovuto, oltre che al sempre maggior affluire degli stranieri, alla creazione, nel secondo periodo, dell'Istituto Politecnico (Istituto Elettrotecnico e Scuola di Cartoleria).

Il dopoguerra deve essere distinto in due sessenni; nel primo, dal 1919-20 al 1924-25 compreso, gli studenti francesi sono molto numerosi (media annua 1047) e superano di molto gli stranieri (media annua 173) (10); a partire dal 1925 questi ultimi eguagliano e poi superano i francesi (media annua francesi 525; media annua stranieri 540).

d) *Scuola di Medicina e Farmacia.* — La Scuola di Medicina e Farmacia, presieduta da un direttore scelto tra i professori ordinari, conta tredici cattedre magistrali. Vi insegnano dei professori supplenti e fra il personale si debbono annoverare tre direttori per i lavori pratici e tre direttori per l'insegnamento pratico nelle Cliniche.

Nel 1894 vi erano due professori stabili, due incaricati, un supplente, due direttori per i lavori pratici; nel 1930 vi erano 12 professori stabili e un incaricato.

Le cattedre sono: Batteriologia, Farmacia e Materia medica, Istologia, Clinica medica, Clinica chirurgica, Clinica ostetrica, Anatomia, Patologia esterna e Medicina operatoria, Chimica e Tossicologia, Storia naturale, Patologia interna, Fisiologia e Fisica.

La Scuola ha avuto fin dalla fondazione un certo numero di allievi, ma, al contrario delle Facoltà sue consorelle, non ha raggiunto un grande sviluppo.

Diamo le seguenti medie annuali approssimative del numero degli studenti.

(10) Le cifre del primo sessennio sono approssimative poichè manca il numero degli stranieri nel 1919-20.

Periodi	Studenti francesi	Studenti stranieri	Levatrici	Totale
1856-57 — 1868-69		36 ⁽¹¹⁾	16	52
1871-72 — 1896-97		78	29	107
1897-98 — 1913-14	61	4	15	80
1914-15 — 1918-19	—	—	—	43
1919-20 — 1929-30	46	11	11	68

Dal secondo dei periodi considerati, escludendo il periodo bellico, si nota una continua diminuzione.

La Scuola conferisce i seguenti gradi e titoli accademici: Dottorato in Medicina, Diploma di Chirurgo-dentista, Diploma di Farmacista, Diploma di Levatrice.

e) *Scuola di Chambéry*. — A Chambéry esiste una Scuola preparatoria all'Insegnamento Superiore di Scienze e Lettere.

I corsi, pubblici e gratuiti, vengono frequentati da un certo numero di giovani che, avendo terminato i loro studi secondari o primari superiori, si preparano a concorsi o a sostenere degli esami superiori, nonchè da qualche persona colta che s'interessa al movimento intellettuale. Nel 1923-24 i corsi ebbero 31 frequentatori, 39 nel 1927-28 e 50 nel 1928-29.

La sezione preparatoria dell'Istituto Politecnico di Grenoble conta 8 professori ed è posta sotto il patronato del Rettore dell'Accademia di Grenoble e del Direttore dell'Istituto Politecnico.

f) *Complesso della popolazione studentesca*. — Infine presentiamo le medie annuali, per i diversi periodi, dell'intera popolazione studentesca che ha frequentato i corsi normali dal 1851.

Periodi	Studenti iscritti	Totale degli studenti
1851-52 — 1868-69	221	—
1871-72 — 1896-97	394	418
1897-98 — 1913-14	—	954
1914-15 — 1918-19	—	899
1919-20 — 1930-31	—	2.601

(11) Pochissimi stranieri.

Sono cifre molte significative, ma il cui commento non sarebbe che la ripetizione di quelli che seguono gli specchi delle medie degli studenti delle singole Facoltà. Piuttosto ci possiamo soffermare sulla popolazione studentesca dell'ultimo periodo che possiamo raggruppare in quattro trienni :

Trienni —	Media annuale —
1919 — 1922	2571
1922 — 1925	2075
1925 — 1928	2844
1928 — 1931	2913

Il primo è artificialmente ingrossato dai reduci dalle trincee che non avevano potuto compiere o terminare i loro studi universitari, il secondo periodo, già normale, ci mostra come l'Università abbia una popolazione studentesca molto più numerosa che nell'anteguerra (le Facoltà più popolate e con un numero di studenti notevolmente aumentato in confronto dell'anteguerra sono Scienze e Lettere per le ragioni già esposte) sono pure aumentati gli studenti di Giurisprudenza ; solo lo scarso gruppo di studenti in Medicina è ancora diminuito perchè la scuola non può conferire alcuni titoli accademici.

Gli ultimi due trienni ci mostrano la grande ascesa della Università di Grenoble.

4. — Come abbiamo visto in quest'ultimo trentennio è stato grande lo sviluppo dell'Università di Grenoble e l'afflusso degli studenti di ogni parte del mondo. Se lo sviluppo universitario è in parte spiegabile col fatto che Grenoble è diventata quasi la capitale delle Alpi francesi, ampliate dall'unione alla Francia della Savoia e del Nizzardo, la grande affluenza di studenti stranieri è opera esclusiva del *Comité de Patronage des étudiants étrangers* che, fondato il 2 luglio 1896, sussiste e opera tuttora costituendo una delle forze basilari dell'Università. Creato per merito di Marcel Reymond, che ne fu presidente ed animatore sino alla sua morte, avvenuta negli anni della grande guerra europea, il Comitato promosse ed organizzò dei corsi speciali per l'insegnamento della lingua e della letteratura fran-

cese agli stranieri, iniziando la propria attività con una sagace e vasta opera di propaganda (12).

Questi corsi, sia quelli durante l'anno accademico che gli estivi e gli autunnali, detti « Cours de vacances », istituiti nel 1898, ebbero un crescente successo. Essi hanno somma importanza per molte ragioni. In primo luogo sono utili alla Nazione perchè apportano un contributo veramente notevole alla diffusione del pensiero e della civiltà francese, direttamente coll'insegnamento della lingua e della letteratura, sia antica che moderna (integrandosi le lezioni con numerose conferenze filosofiche, scientifiche, di diritto, e particolarmente sulla letteratura attuale, e spesso anche di indole politica), indirettamente, perchè favoriscono l'afflusso di popolazione studentesca straniera nelle diverse Facoltà dell'Ateneo. Infatti da quando esistono i corsi per stranieri tutti i rami universitari sono molto frequentati da studenti delle più diverse nazionalità che, recatisi a Grenoble per imparare il francese, vi rimasero, o vi ritornarono per iscriversi o immatricolarsi ad una Facoltà o Scuola.

In secondo luogo giovano molto all'Università ed alla città; è notevole il contributo economico che ricevono le finanze universitarie e ancora più quello che gli stranieri apportano indirettamente alla prosperità cittadina (13). Si può affermare che i corsi per stranieri e quelli dell'Istituto Elettrotecnico sono stati tra i principali fattori che hanno contribuito allo sviluppo di Grenoble, che alla fine del secolo scorso era poco popolata ed ora conta quasi 90.000 abitanti.

L'immediato e continuato successo dei corsi per stranieri viene chiaramente dimostrato dalle tabelle statistiche dell'appendice che ci mostrano anche l'influenza da essi avuta sul numero degli stranieri nei corsi normali.

(12) Venne edita in quattro mila esemplari una circolare che fu inviata a tutte le Università, ai Ministeri dell'Istruzione Pubblica dei vari Stati e a tutti i Consolati francesi; inoltre fu fatta una grande pubblicità in alcuni giornali stranieri, specialmente negli Stati Uniti d'America.

(13) Nel 1900 si valutavano le spese di permanenza di ogni studente dai 250 ai 500 franchi al mese; dal dopoguerra si può affermare che in media uno studente spende mensilmente a Grenoble 1.500 franchi circa. Infatti la massa degli studenti ha fatto sorgere numerosissime pensioni dai 18 ai 50 franchi al giorno, ha dato vita all'attività alberghiera e turistica ed impulso ad ogni specie di commercio.

Ecco le medie della popolazione studentesca dei corsi speciali per stranieri:

Periodi	Corsi durante l'anno scolastico	Corsi di vacanza
Anteguerra (1897-98 — 1913-14)	336	461
Guerra mondiale (1914-15 — 1918-19)	215	217 (14)
Dopoguerra (1919-1920 — 1931-1932)	489	993

Il continuo sviluppo dei corsi per stranieri, che ha subito un arresto solo in questi ultimi anni a causa della crisi economica mondiale, è dovuto, oltre che alla loro sagace e poderosa organizzazione (15), anche alla possibilità per gli studenti di conseguire dei gradi accademici dopo aver frequentati i corsi per un certo tempo e dopo aver sostenuto degli esami orali e scritti, senza che occorra alcun titolo di studio per l'ammissione. Invero un decreto ministeriale dell'8 gennaio 1900 istituiva un « Certificat d'Études françaises » ed uno del 26 giugno dello stesso anno un « Diplôme de Hautes Études de Langue et de Littérature française » conseguibile il primo da parte degli immatricolati alla Facoltà di Lettere durante un semestre dell'anno scolastico, o iscritti al corso di vacanza per un periodo minimo di due mesi, il secondo per due semestri, potendo però tre mesi di frequenza ai corsi di vacanza essere equiparati ad un semestre. Inoltre nel 1908 fu creato un « Diplôme d'Études Supérieures de Phonétique française » e nel 1926 un « Certificat d'Études de Phonétique française » richiedenti il primo almeno due semestri d'immatricolazione, il secondo uno soltanto.

(14) Sono stati considerati nel periodo bellico anche i corsi di vacanza del 1914, giacchè si svolsero per la maggior parte in tempo di guerra ma che però si aprirono prima dell'inizio del grande conflitto. Infatti il numero degli iscritti, i quali in gran parte non frequentarono, è assai rilevante (657). Bisogna quindi notare che, se si esclude il 1914, la media degli studenti dei corsi di vacanza non supera i 106.

(15) Nel trimestre estivo del 1898 vennero tenute 74 ore di lezione; nel 1899: 181 e si prolungò il corso a tutto ottobre; nel 1900 si raggiunsero le 294 ore; in questi ultimi anni furono impartite molte centinaia di lezioni.

5. — Le razze più diverse e quasi tutte le nazioni sono rappresentate già da molti anni nella popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

Il negro della Liberia e del Sud Africa si trova accanto al finlandese e all'islandese, il siamese ed il giavanese al turco e all'arabo, mai più numerosi sono gli anglosassoni, i tedeschi, gli italiani e i balcanici.

Alle più varie nazionalità appartengono specialmente gli studenti dei corsi di francese organizzati dal Comitato di patronato per gli stranieri. Presenta un certo interesse conoscere come ha variato il numero delle nazioni rappresentate e la composizione per nazionalità della popolazione studentesca perchè ci illumina sulla maggiore o minore universalità dello Studio di Grenoble; senonchè il sorgere di nuove nazioni e le grandi modificazioni dei confini politici in seguito alla guerra vittoriosa per l'Intesa, rende difficile il confronto tra il periodo post-bellico ed il precedente.

L'aumento del numero delle nazioni, che è stato notevolissimo dai primi anni di fondazione dei corsi agli anni immediatamente precedenti alla conflagrazione mondiale, è ripreso solo dopo i primi anni successivi al conflitto, perchè dal 1919 al 1923 il numero delle nazioni rappresentate, che era disceso durante la guerra mondiale, si era mantenuto inferiore agli ultimi anni del dopo guerra a causa dei sentimenti ostili tra la Francia e gli stati vinti (16). Dal 1923-24 sino a questi ultimi anni le nazionalità rappresentate si fecero sempre più numerose, però l'aumento in confronto dell'anteguerra non è tale come appare perchè l'Europa si trova suddivisa in un numero molto maggiore di stati sorti dallo spezzettamento dell'Austria-Ungheria, dell'Impero Ottomano e dai lembi occidentali della Russia (17).

In quanto alla composizione per nazionalità, i germanici, numerosissimi nel periodo antebellico benchè già dal 1909-10 in diminuzione, restarono assenti nel dopo guerra fino al 1926-27 per i loro sentimenti ostili alla Francia, poi ricominciarono ad affluire, ma in

(16) Gli studenti iscritti ai corsi di francese per stranieri appartenevano nel 1899-900 a 10 nazioni diverse, nel 1905-06 a 16, nel 1910-11 a 23 e poi di nuovo nel 1916-17 solo a 10 nazioni. Nel 1922-23 il numero, tra nazioni e colonie rappresentate era salito a 17 nei corsi durante l'anno accademico, e a 29 nei corsi di vacanza.

(17) Il numero degli stati e colonie rappresentate era salito nel 1928-29 rispettivamente a 37 e a 45.

quantità minore. La diminuzione è però più apparente che reale perchè gli alsaziani e gli abitanti della Posnania e di parte dello Schleswig non vengono più compresi tra i tedeschi.

Gli italiani, numerosi nel periodo pre-bellico, nel dopo guerra sono accorsi sempre in numero notevole, ma in media meno degli ultimi anni precedenti il conflitto mondiale.

I britannici (inglesi, scozzesi, irlandesi), che erano andati notevolmente aumentando dai primi anni della fondazione dei corsi agli anni immediatamente precedenti al conflitto mondiale, nel dopo guerra sino al 1926 accorsero sempre più numerosi, ma da quell'anno tendono a diminuire.

Gli americani degli Stati Uniti, che nell'anteguerra costituivano una schiera molto esigua quasi scomparvero nel periodo bellico; il forte gruppo di 408 iscritti ai corsi di francese durante l'anno scolastico 1918-19 è dovuto a un gran numero di militari americani che, trovandosi in Francia, furono inviati dal loro governo a Grenoble per studiarvi il francese all'Università. Nel dopo guerra gli americani si iscrissero numerosi e andarono aumentando fortemente sino al 1925-26.

I russi numerosissimi, specialmente negli anni immediatamente precedenti al conflitto mondiale, nel dopo guerra, per le condizioni interne del loro paese, costituiscono un piccolissimo gruppo. In compenso è elevato il numero dei polacchi, che nell'anteguerra venivano in gran parte compresi fra i russi. Così pure, prima che sorgessero i loro stati nazionali, erano raggruppati con questi ultimi i lituani, i finlandesi, i lettoni e gli estoni, che negli ultimi anni costituiscono nel loro insieme un notevole gruppo di iscritti.

Tra le altre nazionalità: nel dopo guerra i bulgari sono molto diminuiti, mentre i rumeni — tra cui sono compresi gli abitanti della Transilvania e della Bessarabia — i serbi — ingrossati dai bosniaci, croati e sloveni — e i giapponesi, sono di molto aumentati.

6. — Come è già stato detto sopra non ci rimane alcun dato del primo periodo di vita dell'Ateneo di Grenoble; si aggiunga che non si può nemmeno determinare l'affluenza degli studiosi, del resto certamente assai poco notevole, durante la prima rinascita dell'Università dal 1542 al 1566-67. Ma ci sono pervenuti parecchi diplomi in varie discipline, rilasciati in quel periodo, i quali attestano un reale funzionamento dello Studio Grazianopolitano.

Periodi	Diplomi e processi di convocazione di laurea in diritto canonico	Diplomi di baccalau-reato in diritto cano-nico e civile	Attestazione di studio in giuri-sprudenza	Diplomi di laurea e di baccalau-reato in medicina
1545-57	—	—	9	—
1545-62	12	—	—	—
1546-67	—	20	—	—
1547-64	—	—	—	6



Sigillo dell'Università di Grenoble.

Istituto di Statistica della R. Università di Padova
Ottobre 1932-X°.

7. — BIBLIOGRAFIA.

- GUEYMARD EMILE: *Statistique générale de l'Isère*, publiée sous la direction de M. Pellenc, Préfet de l'Isère. Grenoble, Impr. Allier, 1844.
- Notices sur Grenoble et ses Environs*. Publiées à l'occasion du XIV Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences à Grenoble. Grenoble, Breynat et C., 1885.
- Livre Centenaire de la Faculté de Droit*. Grenoble, Allier frères, 1906.
- Centenaire de la Faculté des Lettres*. Discours prononcés à la Séance du 26 mai 1910. Grenoble. Allier frères, 1910.
- Centenaire de la Faculté des Sciences*. Discours prononcés à la Séance du 27 janvier 1912. Grenoble, Allier frères, 1912.
- Livret de l'étudiant*. Grenoble, Xavier Drevet, 1929.
- Opuscoli* concenenti ciascuno una « Seance annuelle de rentrée des Facultés », Grenoble, varie tipografie, dal 1852 al 1900.
- Rapports Annuels de l'Université de Grenoble*. Grenoble, Impr. Allier, 1900-930.
- Rapports Annuels du Comité de Patronage des étudiants étrangers*. (mns.), 1898-99; Grenoble, Impr. Allier, 1900-31.
- Registri* (mns.) *del Comité de Patronage pour les étudiants étrangers*, Archivio del Comitato per gli studenti stranieri 1903-1919. Segreteria del Comitato sopramenzionato 1919-1932.

8. — APPENDICE

Tabelle dei dati sulla popolazione studentesca (*) e Grafici.

(*) I dati scritti in corsivo sono stati elaborati nel modo descritto nel par. 2°. I tratti a puntini (...) indicano la mancanza di dati e le lineette (—) la mancanza di studenti.

Statistica degli iscritti alla Scuola di Giurisprudenza.

ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili	ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili
Fondazione 1806	54	—	54	58	1820-21. . . .	218	—	218	235
1806-07. . . .	110	—	110	119	1821-22. . . .	Sospeso il funzionamento della Scuola (*)			
1807-08. . . .	136	—	136	147	1822-23. . . .				
1808-09. . . .	157	1	158	171	1823-24. . . .				
1809-10. . . .	169	1	170	184	1824-25. . . .	124	—	124	134
1810-11. . . .	181	—	181	195	1825-26. . . .	161	4	165	178
1811-12. . . .	202	—	202	218	1826-27. . . .	169	4	173	187
1812-13. . . .	220	1	221	239	1827-28. . . .	148	7	155	167
1813-14. . . .	190	3	193	208	1828-29. . . .	150	3	153	165
1814-15. . . .	189	2	191	206	1829-30. . . .	148	4	152	164
1815-16. . . .	140	4	144	156	1830-31. . . .	133	5	138	149
1816-17. . . .	170	2	172	186	1831-32. . . .	125	4	129	139
1817-18. . . .	208	—	208	225	1832-33. . . .	147	4	151	163
1818-19. . . .	254	—	254	274	1833-34. . . .	151	5	156	168
1819-20. . . .	220	—	220	238	1834-35. . . .	152	7	159	172

(*) Il Decreto Reale del 1821, che sopprimeva la scuola a causa dei tumulti studenteschi, conteneva il progetto di ricostituirla, per cui si può parlare di sospensione temporanea.

Statistica degli iscritti alla Facoltà di Giurisprudenza.

ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili	ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili
1835-36. . . .	195	4	199	215	1850-51. . . .	137	—	137	148
1836-37. . . .	163	5	168	181	1851-52. . . .	132	—	132	143
1837-38. . . .	176	2	178	192	1852-53. . . .	142	1	143	154
1838-39. . . .	162	2	164	177	1853-54. . . .	126	—	126	136
1839-40. . . .	169	1	170	184	1854-55. . . .	115	1	116	125
1840-41. . . .	176	4	180	194	1855-56. . . .	94	1	95	103
1841-42. . . .	176	2	178	192	1856-57. . . .	83	2	85	92
1842-43. . . .	182	2	184	199	1857-58. . . .	111	—	111	120
1843-44. . . .	161	—	161	174	1858-59. . . .	109	—	109	118
1844-45. . . .	158	2	160	173	1859-60. . . .	101	—	101	109
1845-46. . . .	145	3	148	160	1860-61. . . .	123	—	123	133
1846-47. . . .	129	3	132	143	1861-62. . . .	133	1	134	145
1847-48. . . .	138	4	142	153	1862-63. . . .	139	1	140	151
1848-49. . . .	155	1	156	168	1863-64. . . .	180	—	180	194
1849-50. . . .	174	—	174	188	1864-65. . . .	194	1	195	211

Statistica degli iscritti alla Facoltà di Giurisprudenza.

ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili	ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE	Cifre più attendibili
1865-66. . . .	218	1	219	237	1881-82 . . .	153	—	153	168
1866-67. . . .	204	—	204	220	1882-83 . . .	122	1	123	143
1867-68. . . .	208	—	208	225	1883-84 . . .	130	1	131	137
1868-69. . . .	219	1	220	238	1884-85 . . .	138	2	140	151
1869-70. . . .	179	2	181	195	1885-86 . . .	154	1	155	162
1870-71. . . .	128	—	128	138	1886-87 . . .	148	2	150	157
1871-72. . . .	255	1	256	276	1887-88 . . .	124	1	125	134
1872-73. . . .	279	4	283	306	1888-89 . . .	124	1	125	138
1873-74. . . .	269	—	269	291	1889-90 . . .	125	2	127	167
1874-75. . . .	260	2	262	283	1890-91 . . .	169	3	172	184
1875-76. . . .	179	—	179	193	1891-92 . . .	149	7	156	168
1876-77. . . .	163	—	163	176	1892-93 . . .	160	5	165	178
1877-78. . . .	159	—	159	172	1893-94 . . .	130	3	133	141
1878-79. . . .	109	3	112	121	1894-95 . . .	125	5	130	142
1879-80. . . .	122	2	124	144	1895-96 . . .	143	2	145	159
1880-81. . . .	172	—	172	202	1896-97 . . .	134	2	136	145

*Statistica della popolazione studentesca
della Facoltà di Giurisprudenza (*).*

ANNI	Iscritti esaminati	Iscritti non esaminati	TOTALE ISCRITTI	Esaminati non iscritti	Uditori	TOTALE GENERALE
1877-78	202	114	—	...
1878-79	—	334
1879-80	104	59	163	174	—	337
1880-81	133	98	231	78	—	309
1881-82	111	72	183	96	—	279
1882-83	93	71	164	55	—	219
1883-84	94	49	143	60	—	203
1884-85	100	62	162	23	—	185
1885-86	101	68	169	28	—	197
1886-87	97	67	164	35	—	199
1887-88	97	46	143	44	—	187
1888-89	102	50	152	43	12	207
1889-90	227
1890-91	137	59	196	65	7	268
1891-92	116	65	181	93	8	282
1892-93	134	56	190	85	7	282
1893-94	90	60	150	86	8	244
1894-95	101	53	154	73	12	239
1895-96	111	62	173	60	9	242
1896-97	105	48	153	77	7	237

(*) Dati desunti dai discorsi de rettore e del preside per l'apertura di ogni anno accademico. Nel 1887 fu abolita la gratuità.

Statistica degli studenti della Facoltà di Giurisprudenza.

ANNI	Iscritti ed immatricolati	Immatricolati	TOTALE	Francesi	Stranieri
1897-98	144	29	173	157	16
1898-99	132	13	145	129	16
1899-900	114	19	133	115	18
1900-01	121	25	146	123	23
1901-02	144	99	243	174	69
1902-03	144	113	257	169	88
1903-04	177	106	283	204	79
1904-05	167	130	297	194	103
1905-06	171	153	324	205	119
1906-07	178	114	292	208	84
1907-08	192	130	322	209	113
1908-09	200	151	351	206	145
1909-10	194	127	321	197	124
1910-11	191	147	338	208	130
1911-12	176	89	265	188	77
1912-13	176	115	291	204	87
1913-14	164	101	265	182	83

Nel 1897-98 e nel 1898-99 vi furono rispettivamente 29 e 13 uditori. Dal 1897 al 1901 i dati sono approssimativi.

Statistica degli studenti della Facoltà di Giurisprudenza.

ANNI	Iscritti ed immatri- colati	Immatri- colati	TOTALE	Francesi	Stranieri
1914-15	94		94		
1915-16	76		76		
1916-17	64		64		
1917-18	125		125		
1918-19	104	91	195		
1919-20	177	154	331	281	50
1920-21	283	140	423	347	76
1921-22	273	147	420	360	60
1922-23	205	118	323	282	41
1923-24	193	106	299	237	62
1924-25	195	142	337	230	107
1925-26	191	224	415	214	201
1926-27	239	359	598	255	343
1927-28	222	376	598	317	281
1928-29	235	336	571	241	330
1929-30	279	285	564	240	324
1930-31	292	339	631	273	358

pochi stranieri

*Statistica dei candidati agli esami di baccalaureato « ès lettres »
presso la Facoltà di Lettere.*

ANNI	Candidati	ANNI	Candidati				Totale candidati
			I ^a parte		II ^a parte		
1851-52	170	1874-75	—	—	—	—	324
1852-53	147	1875-76	— (*)	—	—	—	374
1853-54	111	1876-77	220	165	—	—	385
1854-55	127	1877-78	278	221	—	—	499
1855-56	114	1878-79	293	199	—	—	492
1856-57	107	1879-80	390	286	—	—	676
1857-58	134	1880-81	396	354	—	—	750
1858-59	135	1881-82	349	264	—	—	613
1859-60	135	1882-83	385	270	—	—	655
1860-61	159	1883-84	355	254	—	—	609
1861-62	182	1884-85	287	263	—	—	550
1862-63	192	1885-86	302	236	—	—	538
1863-64	241	1886-87	293	164	—	—	457
1864-65	250	1887-88	239	173	—	—	412
1865-66	205	1888-89	276	224	—	—	500
1866-67	196	1889-90	542		—	—	542
1867-68	227	1890-91	642		—	—	642
1868-69	220	1891-92	class. 419	mod. 57	class. 223	mod. —	699
1869-70	—	1892-93	455	85	187	6	733
1870-71	142	1893-94	409	115	226	6	756
1871-72	152	1894-95	431	104	195	11	741
1872-73	166	1895-96	420	113	201	12	746
1873-74	232	1896-97	409	121	248	21	799

(*) Nel 1876 l'esame venne diviso in due parti, nel 1891 vennero istituiti il baccalaureato classico e il moderno al posto dell'unico baccalaureato in lettere; però quelli che si erano già presentati al baccalaureato unico senza successo poterono ripeterlo e furono per la prima parte nel 1891-92 in numero di 6 per la seconda parte nel 1891-92; 92-93; 93-94 rispettivamente 119, 31, 4, cifre comprese nel baccalaureato classico.

Facoltà di Lettere :

- 1) *Statistica dei candidati agli esami di licenza e dottorato.*
 2) *Statistica degli allievi dei corsi di licenza e dottorato calcolati in base ai candidati predetti.*

ANNI	1)	2)	ANNI	1)	2)
1851-52.	7	10	1867-68	10	22
1852-53.	3	5	1868-69	5	...
1853-54.	—	7	1869-70	—	—
1854-55.	2	10	1870-71	—	—
1855-56.	5	10	1871-72	10	33
1856-57.	3	7	1872-73	12	29
1857-58.	2	7	1873-74	11	27
1858-59.	2	8	1874-75	6	26
1859-60.	3	9	1875-76	10	31
1860-61.	3	6	1876-77	10	31
1861-62.	3	6	1877-78	11	36
1862-63.	—	7	1878-79	10	59
1863-64.	3	14	1879-80	21	77
1864-65.	7	21	1880-81	28	79
1865-66.	4	24	1881-82	28	79
1866-67.	10	25	1882-83	23	81

Statistica degli studenti della Facoltà di Lettere.

ANNI	Corsi per la licenza in:				Corsi per l'aggregazione in:		Corso per il certificato di att. all'insegn. io.	TOTALE		TOTALE GENERALE
	Lettere	Storia	Filosofia	Lingue viventi	Lettere Gramm. ecc.	Inglese e Tedesco		Residenti	Corrispondenti	
1883-84	61						12	21*	40*	73
1884-85	37	15	15	—	18	7	18	35*	57*	92*
1885-86	31	11	18	—	10	2	24	36*	36*	72*
1886-87	42	8	15	—	6	1	30	50	52	102
1887-88	28	16	16	—	9	—	5	47	27	74
1888-89	42	17	14	—	—	2	23	65	33	98
1889-90	97						24	57*	40*	97*
1890-91	41		5	—	20		18	33*	33*	66*
1891-92	75				7	12	17	45	66	111
1892-93	39	6	7	4	6	9	31	35	67	102
1893-94	40	5	7	2	8	4	39	47	58	105
1894-95	31	7	5	2	9	8	60	51	71	122
1895-96	21	11	8	13	4	13	85	61	110	171
1896-97	64				10		50	50	84	134
1897-98	26	6	4	...	2	62	41	87	128	

In questo periodo vennero inoltre tenuti dei corsi serali « au grand public » (specie di conferenze popolari); nel 1887-88 gli uditori erano dai 100 ai 150 per sera.

Il segno * indica che la cifra comprende solo gli studenti dei corsi per la licenza e per l'aggregazione. — Nel 1895-96, 96-97 e 97-98 frequentarono senza scopo preciso rispettivamente 3, 10 e 28 studenti, compresi nel totale.

Statistica degli studenti della Facoltà di Lettere.

ANNI	Studenti residenti	Studenti corrispondenti	TOTALE	Francesi	Stranieri
1897-98.	41	87	128	123	5
1898-99.	68	35	103	75	28
1899-900	91	50	141	82	59
1900-01.	110	52	162	91	71
1901-02.	205	35	240	85	155
1902-03.	228	46	274	97	177
1903-04.	195	53	248	105	143
1904-05.	266	42	308	105	203
1905-06.	287	53	340	124	216
1906-07.	282	72	354	148	206
1907-08.	357	57	414	162	252
1908-09.	391	68	459	144	315
1909-10.	432	59	491	147	344
1910-11.	513	94	607	160	447
1911-12.	565	47	612	189	423
1912-13.	577	59	636	212	424
1913-14.	517	70	587	198	389

Statistica degli studenti della Facoltà di Lettere.

ANNI	Francesi	Stranieri	TOTALE
1914-15.			208
1915-16.			230
1916-17.			300
1917-18.			367
1918-19.	432
1919-20.	224	328	552
1920-21.	269	401	670
1921-22.	256	383	639
1922-23.	281	431	712
1923-24.	259	464	723
1924-25.	284	554	838
1925-26.	308	739	1.047
1926-27.	303	863	1.166
1927-28.	330	805	1.135
1928-29.	341	770	1.111
1929-30.	414	821	1.235
1930-31.	500	815	1.315

pochi stranieri

Statistica dei candidati al baccalaureato presso la Facoltà di Scienze.

ANNI	Candidat	ANNI	Candidati
1851-52.	25	1874-75.	113
1852-53.	114	1875-76.	102
1853-54.	98	1876-77.	91
1854-55.	81	1877-78.	126
1855-56.	74	1878-79.	142
1856-57.	66	1879-80.	166
1857-58.	74	1880-81.	181
1858-59.	103	1881-82.	184
1859-60.	102	1882-83.	229
1860-61.	115	1883-84.	260
1861-62.	124	1884-85.	271
1862-63.	140	1885-86.	267
1863-64.	110	1886-87.	242
1864-65.	89	1887-88.	230
1865-66.	106	1888-89.	229
1866-67.	80	1889-90.	233
1867-68.	89	1890-91.	258
1868-69.	103	1891-92.	279
1869-70.	—	1892-93.	294
1870-71.	—	1893-94.	256
1871-72.	98	1894-95.	150
1872-73.	80	1895-96.	86
1873-74.	104	1896-97.	91

Nel 1852-53 si iniziò un nuovo regime di esami; dei 114 candidati presentatisi in quell'anno, 34 fecero gli esami secondo il vecchio regime, 80 secondo il nuovo.

Facoltà di Scienze :

1) *Statistica dei candidati agli esami di licenza (scienze fisiche, scienze matematiche, scienze naturali).*

2) *Statistica degli studenti (calcolata in base al numero dei candidati, vedi par. 2).*

3) *Statistica degli studenti (cifre dichiarate dai presidi).*

ANNI	1)	2)	ANNI	1)	2)	3)
1851-52	3	6	1869-70	—	—	
1852-53	3	7	1870-71	—	—	
1853-54	3	7	1871-72	1	8	
1854-55	4	6	1872-73	1	9	
1855-56	—	2	1873-74	6	16	
1856-57	2	4	1874-75	2	15	
1857-58	—	4	1875-76	8	15	
1858-59	1	4	1876-77	5	18	18
1859-60	2	3	1877-78	2	24	24
1860-61	1	2	1878-79	11	36	36
1861-62	1	4	1879-80	11	38	38
1862-63	—	3	1880-81	14	47	47
1863-64	3	4	1881-82	13	53	54
1864-65	—	3	1882-83	20	60	61
1865-66	1	6	1883-84	21	63	64
1866-67	2	11	1884-85	20	67	67
1867-68	3	10	1885-86	23	77	77
1868-69	6	...	1886-87	24	75	75

Facoltà di Scienze.

ANNI	Statistica dei candidati alla licenza	Statistica degli studenti				
		Corsi per le licenze (Scienze matematiche fisiche e naturali)	Corsi per l'aggregaz. (Scienze matematiche scienze fisiche)	TOTALE	Residenti	Corrispondenti
1887-88	30	65	5	70	53	17
1888-89	21	47	8	55	35	20
1889-90	17	52	9	61	41	20
1890-91	23	63	11	74	38	36
1891-92	25	45	18	63	38	25
1892-93	24	57	11	68	37	31
1893-94	26	53	10	63	30	33
1894-95	22	52	6	70	35	23
1895-96	25	47	9	79	30	26
1896-97	16	53	16	91	42	27

Vi furono inoltre in questo periodo dei corsi pubblici, ma mancano i dati relativi agli uditori.

Gli anni 1892-94 vi furono numerosi uditori ai corsi di preparazione alla licenza.

Negli anni 1894-95 si iniziarono i corsi al certificato in scienze fisiche, chimiche e naturali, che ebbero 12 studenti, i quali salirono a 23 nel 1895-96 e a 22 nell'anno 1896-97 e sono compresi nel totale.

Statistica degli studenti della Facoltà di Scienze.

ANNI	Aspiranti al Dottorato di Stato all'aggrega- zione al Diploma	Aspiranti al Certificato di Studi Superiori	Aspiranti al Certificato di Studi P. C. N.	Iscritti per Studi Elettro-Tecnici	Aspiranti al Dottorato Universitario	Semplicemente immatricolati	TOTALE	Francesi	Stranieri
1897-98	12	45	25	4	—	—	86	84	2
1898-99	7	42	27	18	—	—	94	93	1
1899-900.	5	28	27	12	—	—	72	72	—
1900-01	7	39	38	33	—	—	117	117	—
1901-02	8	37	24	28	—	19	116	108	8
1902-03	6	43	39	11	2	17	118	112	6
1903-04	6	59	26	23	3	15	132	122	10
1904-05	3	71	25	34	2	21	156	146	10
1905-06	—	79	41	52	12	13	197	166	31
1906-07	5	84	39	98	11	15	252	221	31
1907-08	6	92	30	145	18	22	313	263	50
1908-09	1	81	37	197	11	30	357	295	62
1909-10	1	91	15	213	16	22	358	302	56
1910-11	2	72	24	269	18	29	414	331	83
1911-12	1	87	24	315	17	13	457	367	90
1912-13	—	85	26	357	16	18	502	389	113
1913-14	1	90	29	421	10	17	568	439	129

Statistica degli studenti della Facoltà di Scienze.

ANNI	Aspiranti al Dottorato di Stato all'aggregazione al diploma	Aspiranti al Certificato di Studi Superiori	Aspiranti al Certificato di Studi P. C. N.	Iscritti per studi Elettrotecnici	Aspiranti al Dottorato Universitario	Semplicemente immatricolati	TOTALE	Francesi	Stranieri
1914-15							246		
1915-16							266		
1916-17							382		
1917-18	non si hanno dati						459	non si hanno dati	
1918-19							835		
1919-20							1535		
1920-21							1573	1420	153
1921-22	3	361	29	915	1	13	1366	1236	130
1922-23	3	293	29	701	1	2	1076	943	133
1923-24	3	221	26	588	—	21	887	735	152
1924-25	1	225	38	564	3	5	884	575	309
1925-26	1	221	46	807	2	8	1122	565	557
1926-27	2	230	37	850	2	13	1172	554	618
1927-28	3	294	41	679	—	14	1060	518	542
1928-29	7	285	51	645	—	—	1020	541	479
1929-30	2	273	34	675	—	11	995	516	479
1930-31	10	213	50	730	—	20	1023	457	566

Nel totale sono compresi anche gli allievi della scuola di Cartoleria i quali furono negli anni scolastici che vanno dal 1921-22 al 1930-31 compreso rispettivamente: 44, 47, 28, 48, 37, 38, 29, 32, 30, 28.

Statistica degli studenti della Scuola di Medicina e Farmacia.

ANNI	(1)	(3)	ANNI	(1)	(2)	(3)
1856-57	25	33	1877-78	60	70	23
1857-58	35	33	1878-79	59	67	17
1858-59	29	1	1879-80	55	78	48
1859-60	35	20	1880-81	51	83	28
1860-61	35	24	1881-82	52	96	40
1861-62	35	28	1882-83	42	82	24
1862-63	48	7	1883-84	53	85	20
1863-64	39	31	1884-85	44	87	41
1864-65	31	6	1885-86	49	89	36
1865-66	40	37	1886-87	50	95	32
1866-67	42	10	1887-88	52	94	37
1867-68	43	20	1888-89	49	107	36
1868-69	40	7	1889-90	51	99	33
1869-70	1890-91	52	114	27
1870-71	1891-92	64	64	25
1871-72	59	23	1892-93	84	84	15
1872-73	62	6	1893-94	86	95	25
1873-74	56	26	1894-95	58	71	36
1874-75	40	9	1895-96	69	72	44
1875-76	52	26	1896-97	65	72	54
1876-77	59	10				

(1) Studenti che hanno preso iscrizioni (aspiranti al dottorato in medicina, all'ufficiato o al titolo di farmacista di I^a e II^a classe.

(2) Studenti (in medicina o farmacia) che hanno fatto atto di scolarità [compresi gli (1)].

(3) Levatrici che si sono presentate agli esami finali, il loro numero corrisponde approssimativamente a quelle che hanno frequentato i corsi di preparazione, tranne nel 1856-57, 1857-58 e nel 1867-68 in cui erano rispettivamente 4, 4 e 21.

Statistica degli studenti della Scuola di Medicina e Farmacia.

ANNI	Candidati al Dottorato	Farmacisti di I ^a classe	Farmacisti di II ^a classe	Inscrizioni interrotte	Totale Francesi	Totale Stranieri	Levatrici	TOTALE GENERALE
1897-98	15	5	35	—	61	1	9	71
1898-99	23	4	35	—	75	1	9	85
1899-900.	27	8	31	—	64	2	10	76
1900-01	28	5	27	—	61	—	8	69
1901-02	42	5	35	3	81	4	8	93
1902-03	40	3	39	4	80	6	16	102
1903-04	48	2	36	4	86	4	18	108
1904-05	38	2	27	4	69	2	17	88
1905-06	35	—	24	6	65	—	17	82
1906-07	42	2	11	9	63	1	23	87
1907-08	62	5	5	5	69	8	17	94
1908-09	62	5	3	4	65	9	16	90
1909-10	51	6	3	1	55	6	20	81
1910-11	41	6		4	41	10	17	68
1911-12	23	6		11	32	8	12	52
1912-13	13	7		13	28	5	13	46
1913-14	25	10		10	15	60

Nel 1897-98 e nel 1898-99 vi furono rispettivamente 6 e 13 uditori compresi nel totale. Sino al 1901 esisteva un corso di « officiat » che ebbe 1 iscritto negli anni 1897-98, 1898-99 e 1900-01.

Statistica degli studenti della Scuola di Medicina e Farmacia.

ANNI	Candidati al Dottorato	Farmacisti	Inscrizioni interrotte	Totale Francesi	Totale Stranieri	Levatrici	TOTALE
1914-15.	34
1915-16.	25
1916-17.	26
1917-18.	60
1918-19.	69
1919-20.	73
1920-21.	48	16	3	7	74
1921-22.	30	19	2	6	57
1922-23.	25	12	1	11	49
1923-24.	32	9	1	8	50
1924-25.	24	12	1	11	48
1925-26.	27	15	2	36	8	15	59
1926-27.	35	21	8	11	75
1927-28.	34	30	8	13	85
1928-29.	33	31	10	15	89
1929-30.	41	28	8	48	11	17	94

Statistica della popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

ANNI	Giurisprudenza	Lettere	Scienze	Medicina e Farmacia	TOTALE
1851-52.	143	10	6	30	189
1852-53.	154	5	7	32	198
1853-54.	136	7	7	34	184
1854-55.	125	10	6	36	177
1855-56.	103	10	2	38	153
1856-57.	92	7	4	29	132
1857-58.	120	7	4	39	170
1858-59.	118	8	4	30	160
1859-60.	109	9	3	55	176
1860-61.	133	6	2	59	200
1861-62.	145	6	4	63	218
1862-63.	151	7	3	55	216
1863-64.	194	14	4	70	282
1864-65.	211	21	3	37	272
1865-66.	237	24	6	77	344
1866-67.	220	25	11	52	308
1867-68.	225	22	10	53	310
1868-69.	238	24	9	47	318
1869-70.	195	—	—
1870-71.	138	—	—
1871-72.	275	33	8	82	398
1872-73.	306	29	9	68	412
1873-74.	291	27	16	82	416

Statistica della popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

ANNI	Giurisprudenza (1)	Giurisprudenza (2)	Lettere	Scienze	Medicina e Farmaci		TOTALE	
					(1)	(2)	(1)	(2)
1874-75	283	—	26	15	49	—	373	373
1875-76	193	—	31	15	78	—	317	317
1876-77	176	—	31	18	69	—	294	294
1877-78	172	—	36	24	83	93	315	325
1878-79	121	—	59	36	76	84	292	300
1879-80	144	—	77	38	103	126	362	385
1880-81	202	—	79	47	79	111	407	439
1881-82	168	—	79	54	92	136	393	437
1882-83	143	—	81	61	66	106	351	391
1883-84	137	—	73	64	73	105	347	379
1884-85	151	—	110	67	85	128	413	456
1885-86	162	—	96	77	85	125	414	460
1886-87	157	—	102	75	82	127	416	461
1887-88	134	—	74	70	89	131	367	409
1888-89	138	150	98	55	85	143	376	446
1889-90	167	180	125	61	84	132	417	498
1890-91	184	191	84	74	79	141	429	490
1891-92	168	176	111	63	89	89	431	439
1892-93	178	185	102	68	99	99	447	454
1893-94	141	149	105	63	111	120	420	437
1894-95	142	154	122	70	94	107	428	453
1895-96	159	168	171	79	113	116	522	534
1896-97	145	152	134	91	119	120	489	497

(1) Iscritti.

(2) Iscritti e frequentatori.

Statistica della popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

ANNI	Giurispru- denza	Lettere (Corsi nor- mali)	Scienze	Medicina e Farmacia	TOTALE
1897-98.	173	128	86	71	458
1898-99.	145	103	94	85	427
1899-900	133	141	72	76	422
1900-01.	146	162	117	69	494
1901-02.	243	240	116	93	692
1902-03.	257	274	118	102	751
1903-04.	283	248	132	108	771
1904-05.	297	308	156	88	849
1905-06.	324	340	197	82	943
1906-07.	292	354	252	87	985
1907-08.	322	414	313	94	1.143
1908-09.	351	459	357	90	1.257
1909-10.	321	491	358	81	1.251
1910-11.	338	607	414	68	1.427
1911-12.	265	612	457	52	1.386
1912-13.	291	636	502	46	1.475
1913-14.	265	587	568	60	1.480

Statistica della popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.

ANNI	Giurispruden- denza	Lettere (Corsi nor- mali)	Scienze	Medicina e Farmacia	TOTALE
1914-15.	94	208	246	34	582
1915-16.	76	230	266	25	597
1916-17.	64	300	382	26	772
1917-18.	125	367	459	60	1.011
1918-19.	195	432	835	69	1.531
1919-20.	331	552	1.535	73	2.491
1920-21.	423	670	1.573	74	2.740
1921-22.	420	639	1.366	57	2.482
1922-23.	323	712	1.076	49	2.160
1923-24.	299	723	887	50	1.959
1924-25.	337	838	884	48	2.107
1925-26.	415	1.047	1.122	59	2.643
1926-27.	598	1.166	1.172	75	3.011
1927-28.	598	1.135	1.060	85	2.878
1928-29.	571	1.111	1.020	89	2.791
1929-30.	564	1.235	995	94	2.888
1930-31.	631	1.315	1.023	90	3.059

*Numero delle iscrizioni (Facoltà di Giurisprudenza)
ai corsi per stranieri secondo la nazionalità degli iscritti.*

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro-Ungarici	Svizzeri	Altre nazionalità	TOTALE
1897-98	—	—	—	—	5	—	—	—	11	16
1898-99	—	—	—	—	5	—	—	—	7	12
1899-900	1	—	—	—	5	—	—	1	5	12
1900-01	1	—	—	—	3	—	—	—	9	13
1901-02	50	—	—	—	4	—	—	1	9	64
1902-03	64	—	—	1	10	—	—	1	6	82
1903-04	55	—	—	—	9	—	2	—	4	70
1904-05	79	—	1	—	11	—	—	—	5	96
1905-06	89	—	—	—	7	—	—	—	4	100
1906-07	67	2	—	—	9	—	—	—	5	83
1907-08	85	—	2	—	18	1	3	—	3	112
1908-09	101	3	—	—	26	—	2	—	5	137
1909-10	84	2	—	—	27	—	—	—	5	118
1910-11	84	5	1	—	22	—	8	—	9	129
1911-12	44	3	—	—	17	—	1	—	8	73
1912-13	47	6	3	2	10	—	2	2	11	83
1913-14	23	18	7	—	15	—	4	1	10	78

*Numero delle iscrizioni (Facoltà di Lettere)
ai corsi per stranieri secondo la nazionalità degli iscritti.*

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro-Ungarici	Svizzeri	Altre nazionalità	TOTALE
1897-98	2	—	1	—	—	2	—	—	—	5
1898-99	17	—	9	1	—	3	—	—	—	30
1899-900	37	—	16	3	—	1	1	—	1	59
1900-01	59	—	4	2	—	4	1	—	1	71
1901-02	81	—	9	5	—	6	2	—	5	108
1902-03	86	4	12	9	4	8	6	3	3	135
1903-04	79	5	16	21	—	19	2	1	4	147
1904-05	61	15	29	19	5	13	7	2	7	158
1905-06	78	32	11	15	8	6	5	3	5	163
1906-07	98	28	19	10	16	9	2	—	9	191
1907-08	72	52	8	14	26	14	15	2	8	211
1908-09	112	51	12	10	34	21	14	3	7	264
1909-10	120	87	23	17	48	15	13	5	18	346
1910-11	116	106	23	33	96	23	13	1	19	430
1911-12	128	130	30	36	87	17	11	6	16	461
1912-13	112	176	37	25	61	22	19	5	11	468
1913-14	64	179	48	22	64	34	16	9	12	448

*Numero delle iscrizioni (Facoltà di Scienze)
ai corsi per stranieri secondo la nazionalità degli iscritti.*

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro-Ungarici	Swizzeri	Altre nazionalità	TOTALE
1897-98	—	—	—	—	—	—	—	—	I	I
1898-99	—	—	—	—	—	—	—	—	I	I
1899-900	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1900-01	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1901-02	3	4	—	—	I	—	—	—	—	8
1902-03	2	I	—	—	—	—	I	—	—	4
1903-04	3	4	—	I	I	—	—	—	I	10
1904-05	2	4	I	—	I	—	I	—	I	10
1905-06	8	6	5	—	I	—	3	I	7	31
1906-07	2	20	2	—	—	—	I	—	6	31
1907-08	10	25	8	I	I	3	—	I	I	50
1908-09	5	30	9	2	2	—	2	3	6	59
1909-10	5	25	11	I	2	I	2	4	5	56
1910-11	2	45	12	2	I	—	I	5	12	80
1911-12	7	41	14	—	2	—	—	3	23	90
1912-13	9	57	13	2	I	—	I	I	26	110
1913-14	7	61	17	3	4	—	I	6	27	126

*Numero delle iscrizioni (Scuola di Medicina e Farmacia)
ai corsi per stranieri secondo la nazionalità degli iscritti.*

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Svizzeri	Altre nazionalità (*)	TOTALE
1897-98	—	—	—	—	—	—
1898-99	—	—	—	—	I	I
1899-900.	—	—	—	I	I	2
1900-01	—	—	—	—	—	—
1901-02	I	—	—	I	2	4
1902-03	I	—	I	I	3	6
1903-04	I	—	I	I	I	4
1904-05	I	—	I	—	—	2
1905-06	—	—	—	—	—	—
1906-07	—	I	—	—	—	I
1907-08	2	6	—	—	—	8
1908-09	I	8	—	—	I	10
1909-10	—	6	—	—	—	6
1910-11	3	7	—	—	3	13
1911-12	2	6	—	—	—	8
1912-13	I	3	—	—	I	5
1913-14	—	4	—	—	—	4

(*) Greci, Turchi, Rumeni, Svedesi.

*Numero delle iscrizioni ai corsi per stranieri
secondo le Facoltà di provenienza degli iscritti.*

ANNI	Facoltà di Lettere	Facoltà di Giurisprudenza	Facoltà di Scienze	Scuola di Medicina e Farmacia	TOTALE	Corsi di vacanze	TOTALE FRANC GENERALE
1897-98.	5	16	I	—	22	35	57
1898-99.	30	12	I	I	44	109	153
1899-900	59	12	—	2	73	217	290
1900-01.	71	13	—	—	84	284	368
1901-02.	108	64	8	4	184	302	486
1902-03.	135	78	4	6	223	352	575
1903-04.	147	70	10	4	231	372	603
1904-05.	158	96	10	2	266	370	636
1905-06.	163	100	31	—	294	435	729
1906-07.	191	83	31	I	306	502	808
1907-08.	211	112	50	8	381	589	970
1908-09.	264	137	62	9	472	632	1.104
1909-10.	346	118	56	6	526	704	1.230
1910-11.	430	129	83	10	652	766	1.418
1911-12.	461	73	90	8	632	863	1.495
1912-13.	468	83	110	5	666	845	1.511
1913-14.	450	81	126	4	661	657	1.318

Numero delle iscrizioni ai corsi del «Comité de patronage des études étrangers» durante l'anno scolastico secondo la nazionalità degli iscritti (periodo d'anteguerra).

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Anstro-Ungarici	Svizzeri	Altre nazionalità	TOTALE
1897-98	2	—	1	—	5	2	—	—	12	22
1898-99	17	—	9	1	5	3	—	—	9	44
1899-900	38	—	16	3	5	1	1	1	8	73
1900-01	60	—	4	2	3	4	1	—	10	84
1901-02	135	4	9	5	5	6	2	2	16	184
1902-03	153	5	13	10	14	8	7	5	8	223
1903-04	138	9	17	22	10	19	4	2	10	231
1904-05	144	19	32	19	17	13	8	2	12	266
1905-06	175	37	16	15	16	6	8	4	16	293
1906-07	167	51	21	10	25	9	3	—	20	306
1907-08	169	83	18	15	45	18	18	3	12	381
1908-09	222	92	21	10	61	21	18	6	21	472
1909-10	209	120	34	18	77	16	15	9	28	526
1910-11	205	163	36	35	119	23	22	6	43	652
1911-12	181	180	44	36	106	17	12	9	47	632
1912-13	169	242	53	29	72	22	22	8	49	666
1913-14	94	262	72	25	83	35	21	16	48	656

Statistica per nazionalità degli iscritti ai corsi di vacanza del « Comité de patronage des étudiants étrangers » (periodo d'anteguerra).

ANNI	Germanici	Russi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro-Ungarici	Svizzeri	Altre nazionalità	TOTALE
1898. . .	21	—	4	1	1	6	1	1	—	35
1899. . .	80	2	7	5	—	5	10	—	—	109
1900. . .	151	14	16	4	—	15	13	—	4	217
1901. . .	175	13	21	16	2	26	13	2	16	284
1902. . .	182	10	28	12	25	10	22	1	12	302
1903. . .	206	23	33	17	3	15	31	3	21	352
1904. . .	164	23	57	56	3	30	23	2	14	372
1905. . .	146	38	56	40	4	36	38	6	6	370
1906. . .	183	63	62	53	7	24	21	8	14	435
1907. . .	192	56	91	61	19	27	28	7	21	502
1908. . .	203	66	98	70	21	47	51	9	24	589
1909. . .	226	75	101	60	29	47	53	7	34	632
1910. . .	214	92	101	101	58	47	47	9	35	704
1911. . .	266	88	118	82	69	67	44	5	27	766
1912. . .	256	122	149	80	44	80	64	16	52	863
1913. . .	223	157	159	116	21	61	69	5	34	845

Statistica delle iscrizioni ai corsi del «Comité de patronage des étudiants étrangers» durante l'anno scolastico secondo la nazionalità degli iscritti (periodo bellico e post-bellico).

ANNI	Germanici	Russi	Polacchi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro-Ungarici	Cecoslovacchi	Serbi poi Jugoslavi	Altre nazionalità	TOTALE
1914-15	2	114	—	57	4	9	5	—	—	—	25	216
1915-16	3	43	—	54	5	1	—	—	—	27	42	175
1916-17	—	5	—	29	1	—	4	—	—	142	11	192
1917-18	—	1	—	17	1	—	1	—	—	19	—	39
1918-19	2	—	—	26	5	—	408	—	—	5	5	451
1919-20	—	3	—	41	55	—	26	—	—	10	91	226
1920-21	—	2	—	25	57	—	55	—	1	7	87	234
1921-22	—	1	1	14	72	2	46	—	1	2	64	203
1922-23	—	4	—	20	68	1	71	—	5	1	47	217
1923-24	—	—	2	18	95	9	78	1	6	1	102	312
1924-25	—	4	19	23	90	17	81	1	24	7	129	395
1925-26	—	5	30	34	124	32	111	32	30	11	180	589
1926-27	76	8	41	35	146	38	102	22	24	18	238	748
1927-28	107	4	33	38	126	19	114	28	27	12	171	679
1928-29	85	1	44	49	113	26	138	23	19	15	206	719
1929-30	133	2	59	53	141	11	93	12	20	16	175	715
1930-31	135	2	57	52	117	32	99	15	13	22	159	703
1931-32	79	—	52	64	72	21	100	11	15	15	153	582

Statistica degli iscritti ai corsi di vacanza del « Comité de patronage des étudiants étrangers » divisi per nazionalità (periodo bellico e post-bellico).

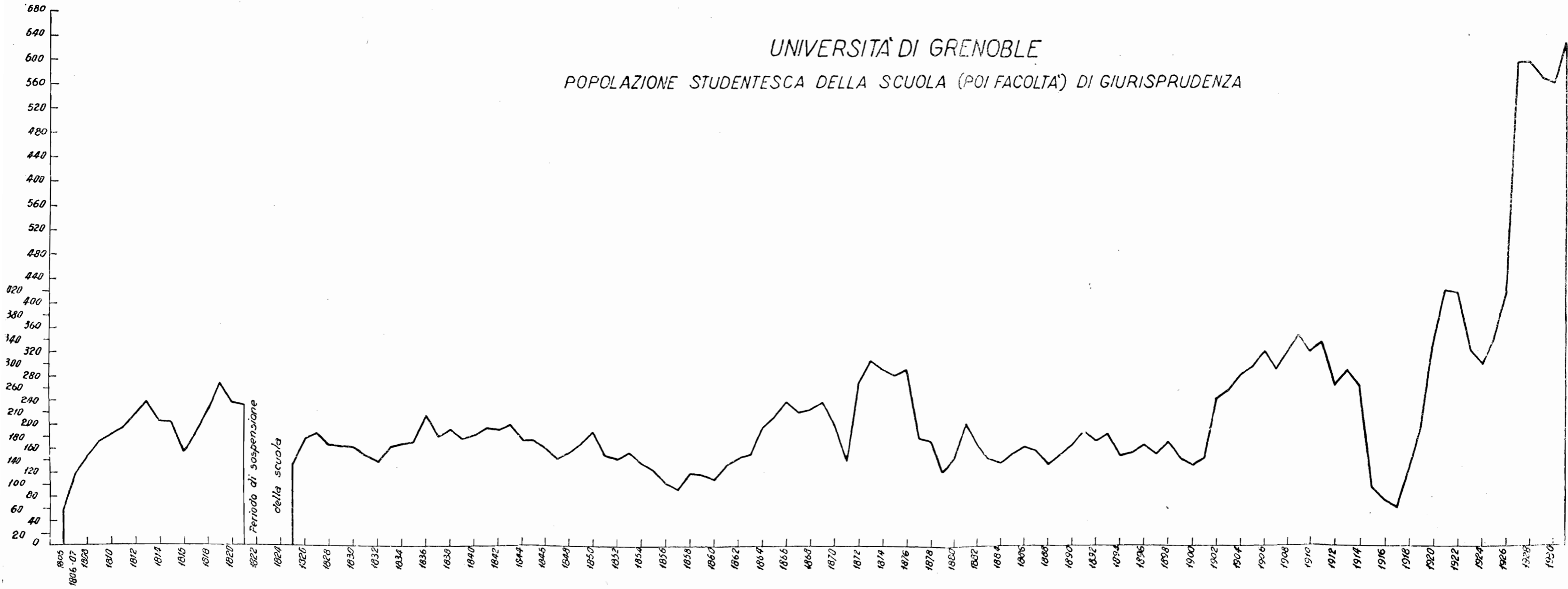
ANNI	Germanici	Russi	Polacchi	Italiani	Britannici	Bulgari	Americani degli S. U.	Austro- Ungarici	Ceco- slovacchi	Serbi, poi Jugoslavi	Altre nazionalità	TOTALE
1914	105	207	—	84	62	28	45	59	—	3	64	657
1915	—	11	—	30	8	—	2	—	—	—	9	60
1916	—	1	—	57	9	—	9	—	—	61	6	143
1917	—	—	—	54	1	—	5	—	—	83	8	151
1918	—	—	—	23	—	—	1	—	—	45	3	72
1919	—	—	4	166	112	—	11	—	1	20	133	447
1920	—	—	1	131	312	—	107	—	4	4	288	847
1921	—	3	2	72	214	—	99	—	5	10	155	560
1922	—	—	—	53	126	—	132	—	9	4	113	437
1923	—	9	9	73	207	1	165	—	67	2	144	677
1924	—	5	11	93	195	10	163	11	138	9	212	847
1925	—	1	80	90	226	20	270	69	97	13	195	1061
1926	2	6	78	126	317	31	263	273	206	53	424	1.779
1927	233	8	41	97	246	10	255	126	110	24	265	1.395
1928	289	2	104	87	245	6	217	124	75	14	259	1.422
1929	266	2	84	134	176	9	196	103	87	21	269	1.347
1930	254	2	129	107	218	5	186	87	85	30	257	1.360
1931	115	2	115	103	162	14	148	76	79	32	199	1.045
1932	79	1	17	93	89	5	158	26	36	13	166	683

*Ammontare delle iscrizioni ai corsi di francese
organizzati dal « Comité de patronage des étudiants étrangers ».*

ANNI	Iscritti	ANNI	Iscritt
1897-98.	57	1915-16.	318
1898-99.	153	1916-17.	343
1899-900	290	1917-18.	111
1900-01.	368	1918-19.	898
1901-02.	486	1919-20.	1.173
1902-03.	575	1920-21.	794
1903-04.	603	1921-22.	640
1904-05.	636	1922-23.	904
1905-06.	728	1923-24.	1.159
1906-07.	808	1924-25.	1.456
1907-08.	970	1925-26.	2.368
1908-09.	1.104	1926-27.	2.143
1909-10.	1.230	1927-28.	2.101
1910-11.	1.418	1928-29.	2.067
1911-12.	1.495	1929-30.	2.075
1912-13.	1.511	1930-31.	1.748
1913-14.	1.313	1931-32.	1.265
1914-15.	276		

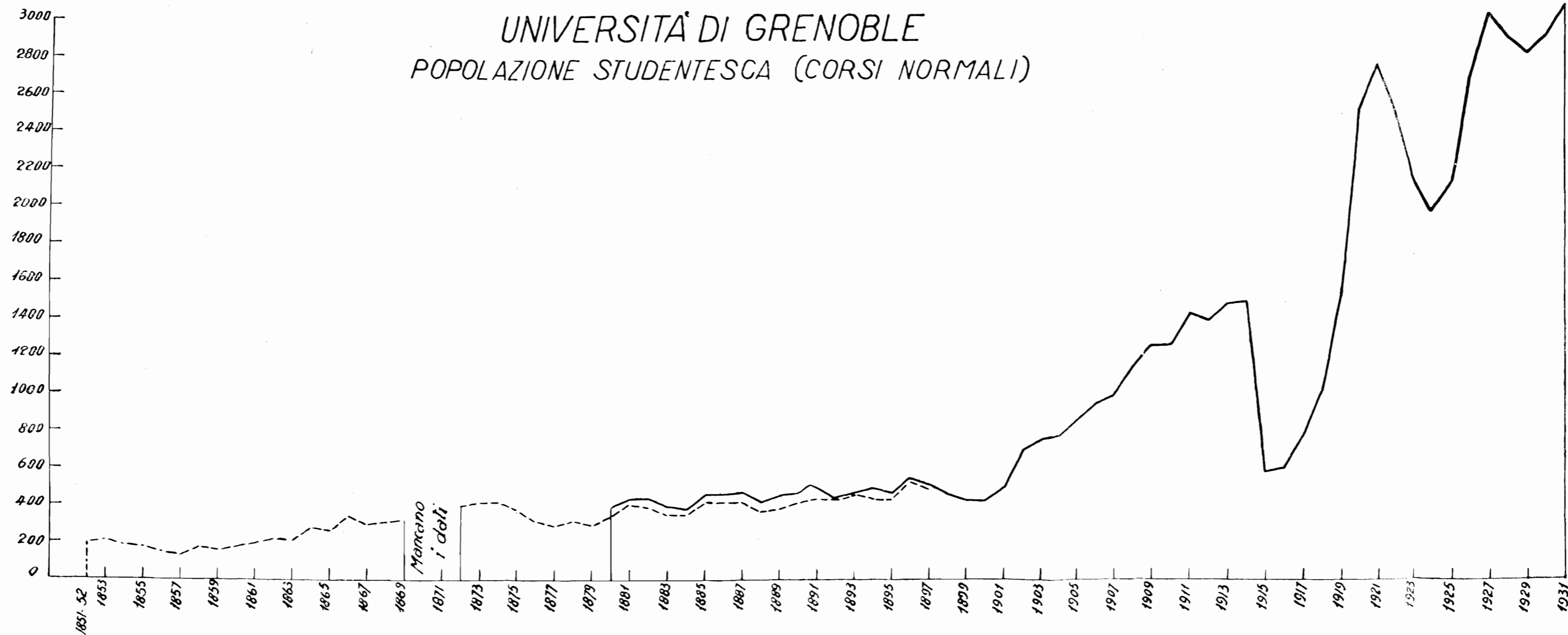
UNIVERSITA' DI GRENOBLE

POPOLAZIONE STUDENTESCA DELLA SCUOLA (POI FACOLTA') DI GIURISPRUDENZA



UNIVERSITÀ DI GRENOBLE

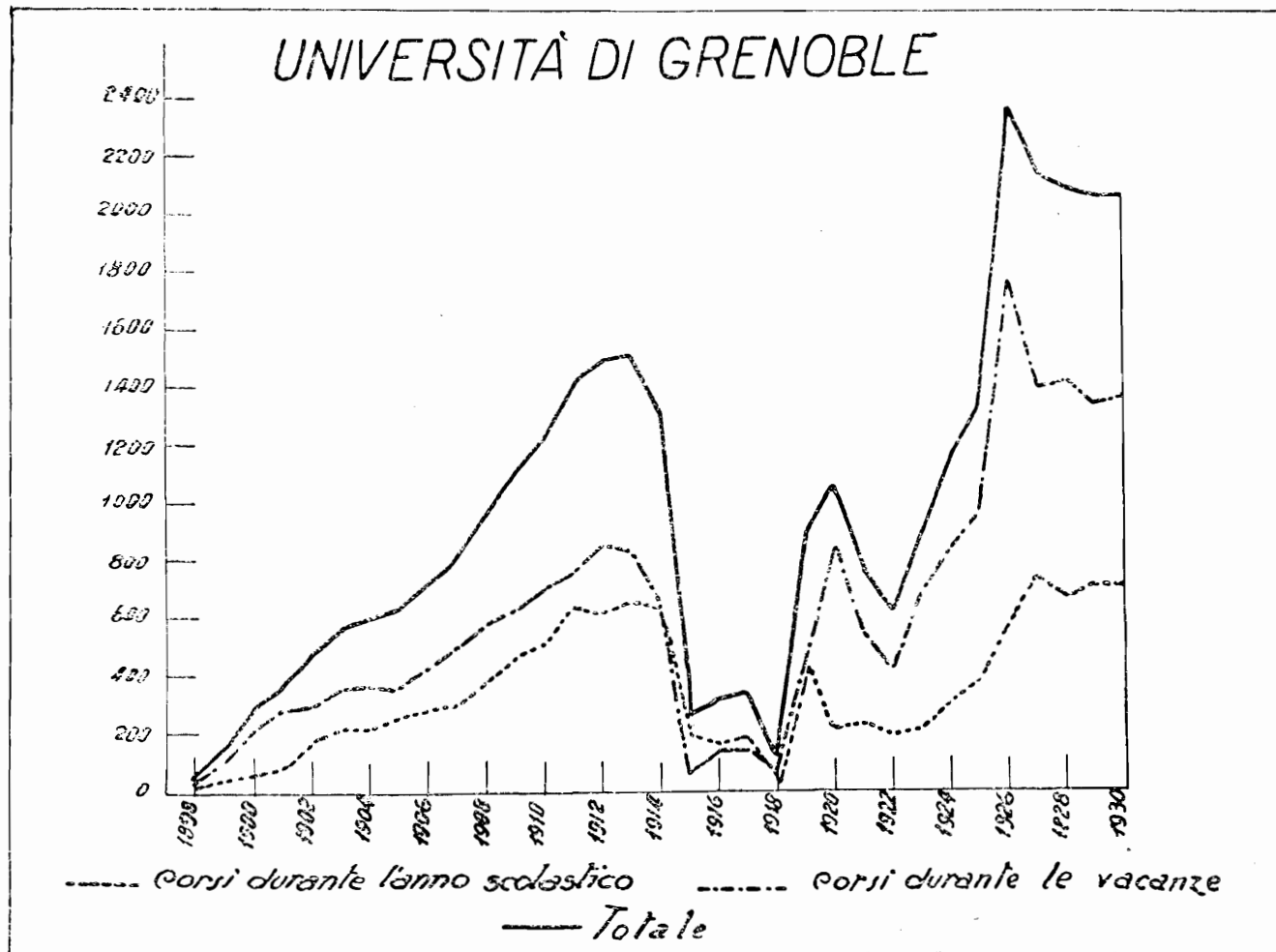
POPOLAZIONE STUDENTESCA (CORSI NORMALI)



LEGGENDA :

Dati incerti
 Studenti iscritti
 Totale popolazione studentesca.

AMMONTARE DELLE ISCRIZIONI AI CORSI DI FRANCESE PER STRANIERI.



CASSA NAZIONALE MALATTIE PER GLI ADDETTI AL COMMERCIO

Rettifica dei coefficienti di riduzione riportati nelle " Tavole di morbilità e frequenza delle malattie per i prestatori d'opera del commercio "

Nel N° 4 del Vol. X di questa Rivista è riportata la monografia :
« Tavole di morbilità e frequenza delle malattie per i prestatori d'opera
del Commercio ».

Nel prospetto N° II, riportato a pag. 122, che riproduce i cosiddetti
« coefficienti di riduzione », sono incorsi numerosi errori di trascrizione.

Dato che tali errori alterano sostanzialmente i coefficienti stessi e
darebbero luogo, praticamente, ad applicazioni inesatte, riteniamo op-
portuno di sostituire tali coefficienti con i seguenti :

GIORNO IN CUI HA INIZIO L'INDENNIZZABILITÀ DELLA MALATTIA	DURATA MASSIMA DEL PERIODO INDENNIZZABILE (giorni)					
	30	60	90	120	150	180
	<i>Coefficienti di riduzione.</i>					
dal 1° giorno	621	789	878	935	989	1.000
» 2° »	591	754	842	898	951	961
» 3° »	561	719	806	861	914	923
» 4° »	531	685	770	825	877	885
» 5° »	501	651	734	789	841	847
» 6° »	472	618	700	753	805	810
» 7° »	445	586	667	720	771	775
» 8° »	420	556	635	688	739	742
» 9° »	397	529	607	658	709	711
» 10° »	378	505	581	632	682	683

*I coefficienti di riduzione usati nella memoria erano invece esatti,
così che esatte devono riguardarsi le tavole che su essi si basano.*

PROF. CORRADO GINI, *Direttore responsabile.*

